Université du Littoral — **Année universitaire 2011-2012**
Licence 1 ère année — **Mathématiques et Informatique**

TD d'Algèbre

5 – Espaces vectoriels

Exercice 1. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
1. $(x,y)+(x',y')=(y+y',x+x')$ et $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$.
2. $(x,y)+(x',y')=(0,0)$ et $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)$.
3. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et $\lambda(x,y)=(\lambda x,0)$.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des suites réelles. Montrer que E muni des opérations naturelles (addition des suites et multiplication d'une suite par un réel) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Les sous ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
1. $F=\mathbb{Z}^2$.
2. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|=|y|\}$.
3. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+2y=0\}$.
4. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+y=1\}$.

Exercice 4. Considérons le sous-ensemble $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y=0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Le complémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel.
1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On considère les sous-ensembles de E suivants. Préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E :
2. les fonctions vérifiant $2f(0)=f(1)$.
3. les fonctions vérifiant $f(0)=f(1)+1$.
4. les fonctions paires.
5. les fonctions polynomiales de degré exactement 4.
6. les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4.

Exercice 6. Pour chacune des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire si elle est génératrice, libre ou si elle constitue une base de $\mathbb{R}^2$:
1. $A=\{(2,1);(4,1)\}$.
2. $B=\{(-1,2);(4,3);(6,-1)\}$.
3. $C=\{(2,-3);(1,5);(0,0)\}$.
4. $D=\{(1,1)\}$.

Exercice 7. Les polynômes suivants sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[X]$?
1. $1,\ X-1,\ X^2+X+1,\ X^3$.
2. $2X,\ X+1,\ X^2+1,\ X^2-1$.
3. $X^3,\ X^2+1,\ X-1,\ X^4+X+1$.
Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans $\mathbb{R}_4[X]$?
4. $1,\ X+2,\ -X^2+X+4,\ X^4+X^3,\ X^4+X^3+2X^2$.
5. $X+1,\ X-1,\ X^2+X-1,\ X^3,\ X^4+X,\ X^4+X^2+X^2$.

Exercice 8. Considérons les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F =< (1,1,0); (0,1,-2) > \text{ et } G =< (2,1,2); (1,0,2) > .$$

Montrer que $F = G$.

Exercice 9. Les sous-espaces vectoriels $F =< (3,0,1,2) >$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+3y+2t = 0\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par A dans E, et déterminer un supplémentaire de A dans E.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(0,1)\}$.

2. $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(1,0,0);\ (1,1,0)\}$.

3. $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $A = \{X^3 + X + 1;\ X + 2;\ X^3 + 2X + 1\}$.

Exercice 11. Soient $u = (2,1,1)$, $v = (1,3,1)$ et $w = (-2,1,3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'ils constituent une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 12. La famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est elle libre ?

$$F = \{(1,1,1); (2,0,-1); (3,1,0); (-1,1,2)\}$$

Déterminer une base du sous-espace vectoriel engendré par F. Quelle est sa dimension ?

Exercice 13. Quel est le rang des matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$