

## TD d'Algèbre

### 6 – Applications linéaires

---

**Exercice 1.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont linéaires ?

1.  $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}^3, f(x, y) = (0, x + y, -3x + 7y)$ .
2.  $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + z, x - 2y, -x + y + z + 1)$ .
3.  $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (z, x + y, yz)$ .
4.  $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, -x + y - z)$ .
5.  $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y) = (x, 2x + y, y).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Donner la matrice  $A$  de l'application  $f$  par rapport aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .
4.  $f$  est-elle bijective ?

**Exercice 3.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, 2x + 2y).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .
3.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que  $\ker f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 2x - 2y + 5z).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$ .
3.  $f$  est-elle bijective ?

**Exercice 5.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + 5y + 2z, x + 3y + z, z).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im } f$ .
3.  $f$  est-elle bijective ?
4. A-t-on  $\ker f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^4$  ?

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $f$  et  $g$  les deux applications linéaires de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définies par

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + z, 2y - z, x), \\ g(e_1) &= e_1 + e_3, \quad g(e_2) = 2e_2 - e_3, \quad g(e_3) = e_1, \end{aligned}$$

$$h(e_1) = e_1 + e_3, \quad h(e_2) = 2e_2, \quad h(e_3) = e_1 - e_2,$$

1. A-t-on  $f = g$ ?  $f = h$ ?
2. Donner les matrices  $M_f$  et  $M_g$  de  $f$  et de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 7.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $f$  est bijectif et déterminer  $f^{-1}$ .  
Posons  $e'_1 = e_1$ ,  $e'_2 = e_1 + e_2 - e_3$  et  $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ .
2. Montrer  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Déterminer  $A'$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
4. Donner la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
5. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique.
3. Vérifier que ces trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

4. Donner la matrice de  $f$  dans cette base.
5.  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?

**Exercice 9.** Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$