Université du Littoral **2013-2014**
Licence Informatique **2 ème Année**

Algèbre linéaire

Séance 1 : Calcul Matriciel

Exercice 1. Soient A, B, C, D et E les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Effectuer toutes les sommes possibles de 2 matrices parmi A, B, C, D et E.

2. Effectuer tous mes produits possibles de 2 matrices parmi A, B, C, D et E.

3. Cacluler quand c'est possible : $A - 2B$, $A + 3C$.

4. Calculer les matrices ${}^tA, {}^tB, {}^tC, {}^tD$ et ${}^tE$.

5. Calculer la trace des matrices A, B, C, D et E.

Exercice 2. Soient A et B les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des réels quelconques. Calculer A^2, AI_3 I_3A et I_3B. Commenter.

Exercice 3. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer AB, BA puis $(AB)^2$ et A^2B^2 et commenter le résultat.

2. Soient A et B deux matrices réelles carrées de taille $n \in \mathbb{N}$. Développer les expressions $(A + B)^2$ et $(A + B)^3$.

Exercice 4. Calculer le produit ABC dans les deux cas suivants

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 5. Déterminer les matrices A et B telles que :

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 6. Soient A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculer AB et BA.

Exercice 7. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$. Trouver les matrices X telles que $AX = O_2$.

Exercice 8. Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ et U, X, Y les vecteurs colonnes de $\mathbb{R}$ suivants

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \text{et } Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer AY et $2U + 3Y$.

2. Ecrire et résoudre le système d'équations $AX = U$.

Exercice 9. Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que A^2 est de la forme $A^2 = aA$. Déterminer a.

2. Calculer A^3 et A^4 en fonction de A et a.

3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soient A et X les matrices données par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Calculer ${}^tA$ et ${}^tXAX$.

Exercice 11. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A + {}^tA$ est symétrique.

2. Montrer que $A - {}^tA$ est antisymétrique.

3. Montrer que A peut s'écrire $A = B + C$ où B est une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et C est une matrice antisymétrique de $M_n(\mathbb{R})$.