Université du Littoral **Année universitaire 2013-2014**
Licence 2 ème année **Informatique**

Algèbre

Séance 3 : Applications linéaires

Exercice 1. Soit f une application de E dans F. Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont linéaires ?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (0, x + y, -3x + 7y)$.

2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + z, x - 2y, -x + y + z + 1)$.

3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z, x + y, yz)$.

4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y, -x + y - z)$.

5. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Exercice 2. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x, 2x + y, y).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Donner la matrice A de l'application f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

4. f est-elle bijective ?

Exercice 3. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, 2x + 2y).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

3. f est elle injective ? surjetive ?

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 2x - 2y + 5z).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\ker f$.

3. f est elle bijective ?

Exercice 5. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + 5y + 2z, x + 3y + z, z).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.

3. f est elle bijective ?

Exercice 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient f,g et h les trois applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y - z, x),$$
$$g(e_1) = e_1 + e_3,\ g(e_2) = 2e_2 - e_3,\ g(e_3) = e_1,$$
$$h(e_1) = e_1 + e_3,\ h(e_2) = 2e_2,\ h(e_3) = e_1 - e_2,$$

1. A-t-on $f = g$? $f = h$?

2. Donner les matrices M_f et M_g de f et de g dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1}.

Posons $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

2. Montrer $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

4. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z,\ -2x + y + z,\ -6x + 2y + 4z).$$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Donner la matrice de f dans la base canonique.

3. Vérifier que ces trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Donner la matrice de f dans cette base.

5. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?