Université du Littoral **Année universitaire 2013-2014**
Licence 2 ème année **Informatique**

Algèbre

Séance 5 : Diagonalisation

Exercice 1. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x - y, -x + 2y)$.

1. Déterminer le polynôme caractéristiqueχ_f de f ainsi que ses valeurs propres.

2. Pour chacune des valeurs propres de f, déterminer à l'aide d'une base l'espace propre associé.

3. f est-il diagonalisable ?

4. Recommencer l'exercice (sauf le **4.**) avec l'endomorphisme $f(x, y) = (x, y - 2x)$.

Exercice 2. Chercher les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres des endomorphisme f_i représentée par les matrices A_i suivantes dans la base canonique. Déterminer si f_i est diagonalisable et si oui déterminer une base $\mathcal{B}_i$ et une matrice diagonale D_i telles que $\text{mat}_{\mathcal{B}_i}(f) = D_i$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_7 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ A_8 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Diagonaliser A : déterminer D et P tels que$A = PDP^{-1}$.

2. On suppose que B est une matrice telle que $B^3 = A$. On pose $F = P^{-1}BP$. Exprimer F^3.

3. Montrer $FD = DF$.

4. En déduire que F est diagonale.

5. En déduire que F est diagonale.

6. En déduire F et B.

Exercice 4. Soient f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-y, x)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ définie par $g(x, y) = (-y, x)$.

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que g est diagonalisable : trouver une matrice $\mathcal{B}$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale.

Exercice 5. La suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Le but de cet exercice est d'établir la formule de Binet :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 (sans utiliser la formule de Binet).

2. On pose $U_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$. Pour quelle matrice A a-t-on $U_{n+1} = A \times U_n$?

3. Calculer U_n en fonction de A et de U_0.

4. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

On pose $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5. Etablir les relations $\phi + \phi' = 1'$ et $\phi\phi' = -1$.

6. Déterminer E_ϕ et $E_{\phi'}$, les espaces propres associés respectivement à ϕ et ϕ'.

7. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles qu'on ait $A = P^{-1}AP$.

8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Etablir la formule de Binet.