Université du Littoral **Année universitaire 2013-2014**
Licence 2 ème année **Informatique**

Algèbre

Séance 6 : Orthogonalité

Exercice 1. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ orthogonale à $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$. Trouver une base orthonormée de P.

Exercice 2. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - 2y + 4z + 2t = 0$ et soit p la projection orthogonal de $\mathbb{R}^4$ sur H.

1. Donner une base de H.

2. Déterminer une base de $H^\perp$.

3. Calculer $||u - p(u)||$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$.

4. Quel est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

5. Diagonaliser p.

Exercice 3. Soient

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix},$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée à partir de la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 4. Soient u_1, u_2, u_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ données par

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad et \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix},$$

On note p le projecteur orthogonal sur $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1)$.

1. Montrer que les vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3) en une base (v_1, v_2, v_3).

3. Déterminer la matrice de p dans la base (u_1, u_2, u_3).

4. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

5. Quel est le rang de p ?

6. Recommencer les question **3** à **5** pour la symétrie orthogonale s sur par rapport à F.

7. Quels sont les liens entre les matrices obtenues ?

Exercice 5. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On note p le projecteur orthogonal sur F. On pose $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F et de $F^\perp$.

2. Déterminer $p(u)$ puis l'angle entre u et $p(u)$.

Exercice 6. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer une équation de F.

2. Déterminer une base orthonormée de F et de $F^\perp$.

3. Calculer la projection orthogonale de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sur F.

4. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

5. Déterminer une matrice orthogonale dont la première colonne est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Exercice 7. Soit $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et H le plan vectorial d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Calculer la distance minimal de v à H, c'est-à-dire, la distance minmal de v à un vecteur de H.

Exercice 8. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Justifier sans aucun calcul l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

2. Calculer de telles matrices D et P.

Exercice 9. Soit f la matrice de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que f est une rotation.

2. Trouver un vecteur unitaire u_1 sur l'axe de rotation de f.

3. Trouver des vecteurs u_2 et u_3 tels que (u_1, u_2, u_3) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

4. Quel est la matrice de f sans la base (u_1, u_2, u_3).

5. Quel est l'angel de f ?

6. Même chose avec la matrice

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$