Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2013–2014
Licence 2ème année — Informatique

# Algèbre - Devoir

Durée : 1h30 le vendredi 22 novembre
Documents et calculatrices autorisés

**Exercice 1** (4 points)**.** Dans cet exercice les matrices considérées sont à coefficients sur $\mathbb{R}$.

**1.** Calculer $A - 2B$ pour

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

**2.** Calculer $C \times D$ pour

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**3.** Calculer l'inverse de la matrice $E$ donnée par

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

**Exercice 2** (3 points)**.** Mettre sous forme matricielle puis résoudre à l'aide du pivot de Gauß le système

$$\begin{cases} x - 2y + t = 2 \\ x - y - z + 4t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = 3 \end{cases} \qquad \text{pour } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

**Exercice 3** (3 points)**.** Parmi les ensembles suivants déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Justifier.

**1.** $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

**2.** $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$.

**3.** $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$.

**Exercice 4** (7 points)**.** Soit $f$ l'application définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -x + y + z \\ -2x + y + z \\ -6x + 2y + 4z \end{bmatrix} \end{array}$$

**1.** Montrer que l'application $f$ est linéaire.

**2.** Donner la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ : matrice de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

**3.** Déterminer $\ker(f)$.

**4.** L'appication $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**5.** Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**6.** Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

**7.** Déterminer la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$ : matrice de $f$ dans la base $\mathcal{C}$.

**Exercice 5** (3 points)**.** On pose $E = M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n$.

**1.** Montrer que $F = \{A \in E \,|\, {}^tA = A\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**2.** Montrer que $G = \{A \in E \,|\, {}^tA = -A\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**3.** Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

**4.** Montrer que $E = F + G$. (On peut remarquer que pour $A \in E$ la matrice $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est dans $F$).