Algèbre - Devoir

Durée : 3h le mercredi 15 janvier
Documents et calculatrices personnelles autorisés
Tous les détails de calcul sont à mettre sur la copie.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2 points)**.** Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

On pose $w = u \wedge v$, le produit vectoriel de u par v.

1. Déterminer les coordonnées de w en fonction de u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3.

2. Montrer que w est orthogonal à u.

3. Démontrer l'identité du parallélogramme :

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2;$$

on peut le faire en utilisant seulement les propriétés du produit scalaire et non les coordonnées des vecteurs u et v.

Exercice 2 (5 points)**.** On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x+y-z \\ -x+3y-z \\ -x+y+z \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer la matrice $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

2. Calculer χ_f, le polynôme caractéristique de f.

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? Et leurs multiplicités algébriques ?

Les questions **4)** *et* **5)** *ne sont pas nécessaires pour le reste de l'exercice.*

4. Justifier que le polynôme minimal de f est $\mu_f(X) = (X-1)(X-2)$.

5. Sans calculer les espaces propres, déterminer si f est diagonalisable.

6. Déterminer les espaces propres et les multiplicités géométriques des valeurs propres de f.

7. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $D = P^{-1}AP$.

8. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (3 points)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on note $\mathcal{C}$ la base canonique. On pose

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (u_1, u_2, u_3) pour obtenir une base $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ orthonormalisée.

On note $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3. Vérifier que la matrice P est orthogonale et calculer son déterminant.

4. Déterminer si la base $\mathcal{B}$ est directe ou indirecte.

Exercice 4 (2 points)**.** Soit A une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, vérifiant ${}^tA \times A = I_n$.

1. Montrer que le déterminant de A est soit 1 soit -1. (utiliser des propriétés du déterminant)

2. En déduire que A est inversible, d'inverse ${}^tA$.

Exercice 5 (4 points)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Donner une base de F et une base de $F^\perp$.

2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que (w_1, w_2) soit une base de F et (w_3) soit une base de $F^\perp$.

On note p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

3. Pour tout u de $\mathbb{R}^3$ exprimer $p(u)$ et $s(u)$ en fonction de u et de w_3.

4. Déterminer les matrices représentatives de p et de s relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. Déterminer les matrices représentatives de p et de s relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 6 (4 points)**.** On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui est représenté dans la base canonique par la matrice A suivante

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que f est une rotation.

2. Déterminer un vecteur u_1 de norme 1 tel que $f(u_1) = u_1$.

3. Trouver un vecteur u_2 de norme 1 orthogonal à u_1.

4. En déduire un vecteur u_3 tel que la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ soit orthonormale.

5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

6. Quel est, au signe près, l'angle de rotation de f ?