Université du Littoral Côte d'Opale
Licence 2ème année

Année universitaire 2013–2014
Informatique

Algèbre

Durée : 3h le mardi 1 juillet
Documents et calculatrices autorisés

Exercice 1. Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{Q})$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer A^3.
2. Calculer $\det(A)$, en déduire que A est inversible.
3. Déterminer l'inverse de A.

Exercice 2. Mettre sous forme matricielle puis résoudre à l'aide du pivot de Gauß le système

$$\begin{cases} x - y + z + t = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 8 \\ 3x + y - z + t = 7 \end{cases} \qquad \text{pour } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

Exercice 3. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x - y - 2z - 3t \\ 2x - 2y - 3z - 6t \\ -x + y + z + 3t \\ x + y + z + t \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Donner la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$: matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(f)$.
4. Déterminer le rang de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 4. Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{Q})$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Pour chacune des valeurs propres de A, calculer une base de l'espace propre associé.
4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
5. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles qu'on ait $A = PDP^{-1}$.
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Parmi les ensembles suivants déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Justifier.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + zx = 0\}$.

3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \,\text{et}\; x + y + 4z = 0\}$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on note $\mathcal{C}$ la base canonique. On pose

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (u_1, u_2, u_3) pour obtenir une base $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ orthonormalisée.

On note $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

3. Vérifier que la matrice P est orthogonale et calculer son déterminant.

4. Déterminer si la base $\mathcal{B}$ est directe ou indirecte.

Exercice 7. Soit A une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, vérifiant ${}^tA \times A = I_n$.

1. Montrer que le déterminant de A est soit 1 soit -1. (utiliser des propriétés du déterminant)

2. En déduire que A est inversible, d'inverse ${}^tA$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\}.$$

1. Donner une base de F et une base de $F^\perp$.

2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que (w_1, w_2) soit une base de F et (w_3) soit une base de $F^\perp$.

On note p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F.

3. Pour tout u de $\mathbb{R}^3$ exprimer $p(u)$ et $s(u)$ en fonction de u et de w_3.

4. Déterminer les matrices représentatives de p et de s relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. Déterminer les matrices représentatives de p et de s relativement à la base $\mathcal{C}$.