

THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS POUR LES FONCTIONS DIGITALES

BRUNO MARTIN, CHRISTIAN MAUDUIT & JOËL RIVAT

RÉSUMÉ. L'objet de ce travail est de montrer un théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales et plus généralement une estimation des sommes d'exponentielles de la forme $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \exp(2i\pi(f(n) + \beta n))$, où Λ désigne la fonction de von Mangoldt, f une fonction digitale, et β un paramètre réel.

ABSTRACT. The aim of this work is to prove a Prime Number Theorem for digital functions. More generally we estimate exponential sums of the form $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \exp(2i\pi(f(n) + \beta n))$, where Λ denotes von Mangoldt's function, f a digital function, and $\beta \in \mathbb{R}$ a parameter.

1. INTRODUCTION

Dans tout cet article, q désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Rappelons que tout entier strictement positif n admet un unique développement q -adique de la forme

$$(1) \quad n = \sum_{j=0}^{\nu} n_j q^j, \quad 0 \leq n_j \leq q-1, \quad n_\nu \geq 1.$$

Pour $n = 0$, on convient de poser $\nu = 0$ et $n_0 = 0$. Conformément à l'usage, pour tout $0 \leq k \leq q-1$ on désigne par $|\cdot|_k$ la fonction comptant le nombre d'occurrences du chiffre k dans le développement en base q , soit

$$|n|_k = \#\{0 \leq j \leq \nu \mid n_j = k\}.$$

En particulier la fonction somme des chiffres est définie pour tout nombre entier positif n par

$$s(n) = \sum_{j=0}^{\nu} n_j = \sum_{0 \leq k < q} k |n|_k.$$

Dans la suite, la lettre p désigne toujours un nombre premier, nous notons \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers et, pour tout nombre réel x , $e(x) = \exp(2i\pi x)$, $\|x\|$ la distance de x à l'entier relatif le plus proche, $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x . Enfin nous désignons par Λ la fonction de von Mangoldt définie pour tout nombre entier positif n par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\ell \text{ avec } p \text{ premier et } \ell \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

par φ la fonction indicatrice d'Euler et par τ la fonction qui compte le nombre de diviseurs.

Date: 08 juillet 2011.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11A63, 11L03, 11N05. Secondary 11L20, 11N60.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence « ANR-10-BLAN 0103 » MUNUM. Bruno Martin a également bénéficié d'un financement de l'Austrian Science Foundation FWF dans le cadre du projet S9605, faisant partie de l'Austrian National Research Network "Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory".

Afin de détecter les congruences nous utiliserons la relation d'orthogonalité classique

$$(2) \quad \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e\left(\frac{j(a-b)}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv b \pmod{m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{Z}).$$

Même lorsque ce n'est pas mentionné, les constantes implicites dans les \ll et O peuvent dépendre de la base de numération q .

1.1. Fonctions q -additives et fonctions digitales.

La notion de fonction q -additive a été introduite indépendamment par Bellman et Shapiro [3] et Gelfond [18]. Il s'agit des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient pour tout $(a, b, j) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq b < q^j$:

$$f(aq^j + b) = f(aq^j) + f(b).$$

Une fonction q -additive vérifie donc nécessairement $f(0) = 0$. Lorsque l'on a de plus $f(aq^j) = f(a)$ pour tout $(a, j) \in \mathbb{N}^2$ on dit que la fonction f est fortement q -additive. La fonction somme de chiffres appartient à la classe des fonctions fortement q -additives à valeurs entières.

Si f est fortement q -additive alors on a pour tout nombre entier positif n vérifiant (1) :

$$(3) \quad f\left(\sum_{0 \leq j \leq \nu} n_j q^j\right) = \sum_{0 \leq j \leq \nu} f(n_j) = \sum_{1 \leq k < q} f(k) |n|_k,$$

de sorte que f est complètement déterminée par ses valeurs $f(k)$ pour $1 \leq k < q$. Réciproquement, toute fonction de la forme $f(n) = \sum_{1 \leq k < q} \alpha_k |n|_k$ est fortement q -additive. Par contre on remarquera que la fonction $|\cdot|_0$ n'est pas fortement q -additive.

Bassily et Kátai ont étudié dans [24] et [2] la distribution limite des fonctions q -additives dans l'ensemble des nombres premiers. On en déduit par exemple que lorsque f est fortement q -additive alors

$$\frac{1}{\pi(x)} \#\left\{p < x : f(p) \leq \mu_f \log_q x + y \sqrt{\sigma_f^2 \log_q x}\right\} = \Phi(y) + o(1)$$

où $\mu_f = \frac{1}{q} \sum_{0 \leq k < q} f(k)$, $\sigma_f^2 = \frac{1}{q} \sum_{0 \leq k < q} f^2(k) - \mu_f^2$ et Φ désigne la distribution normale.

Notation 1. On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout nombre entier positif n par

$$(4) \quad f(n) = \sum_{0 \leq k < q} \alpha_k |n|_k,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ sont des nombres réels.

Drmot et Mauduit ont étudié dans [13] certaines propriétés statistiques de ces fonctions, appelées fonctions digitales et l'objet de ce travail est de fournir un résultat assez général permettant d'étudier les propriétés statistiques de la restriction de ces fonctions à l'ensemble des nombres premiers.

1.2. Propriétés digitales des nombres premiers.

On ne connaît pas d'algorithme simple permettant de savoir si un nombre entier est premier à partir de la donnée de son écriture en base q . Minsky et Papert ont d'ailleurs montré dans [30] que l'ensemble des nombres premiers n'est reconnaissable par aucun q -automate fini (pour cette notion, on pourra consulter [1] ou [15]). Cobham a présenté dans [8] plusieurs preuves alternatives de ce résultat qui a été généralisé par Hartmanis et Shank dans [22] et Schützenberger dans [32] en montrant qu'aucun ensemble infini de nombres premiers n'est reconnaissable par un q -automate fini (ni même par un automate à pile), par Mauduit dans [26] en montrant que l'ensemble des nombres premiers n'est engendré par aucun morphisme sur un alphabet fini et par Cassaigne et Le Gonidec dans [7] en

montrant que l'ensemble des nombres premiers n'est reconnaissable par aucun q -automate infini (voir [27] pour cette dernière notion).

Il existe peu de résultats dans la littérature concernant les propriétés des chiffres des nombres premiers. Le théorème de Lejeune Dirichlet (voir [25, pp. 315–342] ou [12, p. 34]) concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques peut être considéré comme le premier résultat dans ce domaine. Il permet de montrer, comme l'a remarqué Sierpiński, que pour toute suite finie de chiffres a_1, \dots, a_m et b_1, \dots, b_n telle que $\text{pgcd}(b_n, q) = 1$, il existe une infinité de nombres premiers dont les m premiers chiffres sont successivement a_1, \dots, a_m et les n derniers chiffres successivement b_1, \dots, b_n ([33] contient une preuve de ce théorème dans le cas $q = 10$ et attribue à une remarque de Knapowski le cas général). Harman et Kátai ont étendu dans [21] ce résultat à des nombres premiers qui possèdent certains chiffres librement préassignés, améliorant des résultats antérieurs dûs à Kátai, Harman et Wolke [24, 20, 34] : pour tout nombre entier $t > 0$ fixé, pour tous $0 \leq j_1 < \dots < j_t \leq k$ et pour tout $(b_1, \dots, b_t) \in \{0, \dots, q-1\}^t$ vérifiant $(b_1, q) = 1$ si $j_1 = 0$ et $b_t \neq 0$ si $j_t = k$, alors, pour tout $c > 0$ fixé et pour tout nombre entier t vérifiant

$$(5) \quad 1 \leq t \leq c\sqrt{k}/\log k,$$

on a, pour $N = q^k$, $k \rightarrow \infty$,

$$\text{card} \left\{ p < N, p = \sum_{j=0}^k p_j q^j, (p_{j_1}, \dots, p_{j_t}) = (b_1, \dots, b_t) \right\} \sim \begin{cases} \frac{1}{q^t} \frac{N}{\log N} & \text{si } j_1 > 0 \\ \frac{1}{q^t} \frac{q}{\varphi(q)} \frac{N}{\log N} & \text{si } j_1 = 0. \end{cases}$$

Dans un travail récent ([6]), Bourgain a montré qu'il est possible de dépasser la barrière $1/2$ dans la majoration (5) en montrant que ce résultat restait valable pour tout nombre entier t vérifiant $1 \leq t \leq c(k/\log k)^{4/7}$.

Copeland et Erdős [10] en 1946 ont montré, pour tout ensemble \mathcal{E} de nombres entiers vérifiant, pour tout $\theta < 1$, $\text{card}\{n \leq x, n \in \mathcal{E}\} \gg x^\theta$ pour x assez grand, la normalité du nombre réel dont l'écriture en base q est formée de 0, suivi de la concaténation dans l'ordre croissant des éléments de l'ensemble \mathcal{E} écrits en base q . Il découle en particulier de leur théorème que si $f \in \mathcal{F}$ alors

$$\sum_{p \leq x} f(p) = \frac{x}{q \log q} \sum_{0 \leq k < q} \alpha_k + o(x).$$

Le théorème suivant démontré par Mauduit et Rivat dans [29] a permis de répondre à une question posée en 1967 par Gelfond dans [18] concernant la somme des chiffres des nombres premiers (voir [17, 16, 11] pour une réponse partielle dans le cas des nombres presque premiers, c'est-à-dire ayant au plus r facteurs premiers, où $r \geq 2$ est un nombre entier fixé).

Théorème A. *Pour $q \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(q-1)\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il existe $\sigma_q(\alpha) > 0$ tel que pour $x \geq 1$,*

$$(6) \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha s(n)) \ll_{q,\alpha} x^{1-\sigma_q(\alpha)}.$$

Un raffinement dans la preuve de [29] permet de s'affranchir de la dépendance implicite en α et de fournir une forme explicite pour l'exposant $\sigma_q(\alpha)$: c'est l'objet du théorème 2.1 de [14], qui permet de choisir $\sigma_q(\alpha) = c \|(q-1)\alpha\|^2$ où c est une constante strictement positive qui ne dépend que de q .

Lorsque $q = 2$, Bourgain a généralisé dans [4] l'estimation (6) au cas où la fonction s est remplacée, pour toute partie E de \mathbb{N} , par la fonction s_E définie pour tout nombre entier positif n par $s_E(n) = \sum_{i \in E} n_i$, qui apparaît de manière naturelle dans le cadre de l'étude de la transformation de Fourier-Walsh (voir aussi [19] pour le cas où le cardinal de

l'ensemble E est négligeable par rapport à $\sqrt{\log x}$ et [5] pour l'étude de la distribution de ces coefficients de Fourier-Walsh).

2. RÉSULTATS

Il est assez naturel de rechercher une estimation similaire à (6) pour une fonction fortement q -additive arbitraire. Nous établissons un tel résultat en traitant plus généralement la somme d'exponentielles

$$(7) \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) \quad (x \geq 1, \beta \in \mathbb{R})$$

où f est une fonction digitale.

Pour estimer (7) nous allons distinguer deux cas selon que la suite $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1 ou non :

Cas 1 : la suite $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{0, \dots, q-1\}$ on a $\alpha_j = \alpha_0 + j\theta \pmod{1}$. Nous verrons que dans ce cas le comportement de la somme d'exponentielles (7) dépend de $(q-1)\theta$:

— si $(q-1)\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) = o(x),$$

— si $(q-1)\theta = \ell \in \mathbb{Z}$ alors, en écrivant

$$\alpha_j = \alpha_0 + j\ell/(q-1) \pmod{1}$$

pour $0 \leq j < q$, et en notant que $|n|_0 + \dots + |n|_{q-1} = \lfloor \log_q n \rfloor + 1$, on parvient à l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e\left(\alpha_0 \lfloor \log_q n \rfloor + \alpha_0 + \frac{\ell}{q-1} s(n) + \beta n\right) \\ &= e(\alpha_0) \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e\left(\alpha_0 \lfloor \log_q n \rfloor + \frac{\ell n}{q-1} + \beta n\right), \end{aligned}$$

car $s(n) \equiv n \pmod{q-1}$ pour tout entier naturel n . En découpant la somme en n suivant des intervalles q -adiques, on se ramène ainsi à l'évaluation de sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{y \leq n < x} \Lambda(n) e(n\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq y < x),$$

qui peuvent être estimées par des techniques classiques de théorie analytique des nombres.

Cas 2 : la suite $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ n'est pas une progression arithmétique modulo 1. Dans ce cas nous verrons que l'on a toujours

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) = o(x).$$

Ceci nous conduit à introduire le sous-ensemble suivant de \mathcal{F} :

Notation 2. On note \mathcal{F}_0 l'ensemble des éléments de \mathcal{F} pour lesquels la suite des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1.

Remarque 1.

- Lorsque $q = 2$ on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$.
- Pour $q \geq 2$ et $f(n) = \alpha s(n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f \in \mathcal{F}_0$.

Lemme 1. *La suite $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1 si et seulement si*

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i - j)t\|^2 = 0.$$

Démonstration. Si la suite $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$ est une progression arithmétique modulo 1 alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{0, \dots, q-1\}$, $\alpha_j = \alpha_0 + jt \pmod{1}$. Par conséquent pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, q-1\}^2$ on a $\|\alpha_i - \alpha_j - (i - j)t\| = 0$. Réciproquement, si

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i - j)t\|^2 = 0$$

alors il existe un $t \in \mathbb{R}$ qui réalise ce minimum. Pour cette valeur de t tous les termes de la somme sont nuls, donc pour tout $j \in \{0, \dots, q-1\}$ on a $\|\alpha_j - \alpha_0 - jt\|^2 = 0$ c'est-à-dire $\alpha_j = \alpha_0 + jt \pmod{1}$. \square

Pour tout $f \in \mathcal{F}$ on note

$$(8) \quad \sigma_q(f) = \min_{t \in \mathbb{R}} \sum_{0 \leq j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i - j)t\|^2$$

et on remarque que

$$f \in \mathcal{F}_0 \iff \sigma_q(f) = 0.$$

Nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Pour tout $q \geq 2$, il existe $c_q > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}_0$, $x \geq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$(9) \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) \ll (\log x)^4 x^{1 - c_q \|(q-1)\theta\|^2},$$

où $\theta = \alpha_1 - \alpha_0$ et la constante implicite ne dépend que de q .

Théorème 2. *Pour tout $q \geq 2$, il existe $c_q > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $x \geq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$(10) \quad \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) \ll (\log x)^4 x^{1 - c_q \sigma_q(f)},$$

où la constante implicite ne dépend que de q .

Les théorèmes 1 et 2 permettent d'obtenir plusieurs applications de nature arithmétique qui feront l'objet d'un travail ultérieur.

Remarque 2. *Par la même méthode, on peut obtenir des majorations analogues pour les sommes*

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) e(f(n) + \beta n),$$

où μ est la fonction de Möbius, en utilisant une variante de l'identité de Vaughan adaptée à la fonction μ (voir [23] proposition 13.5).

La remarque 2 montre le lien entre notre travail et le programme général proposé par Sarnak concernant le principe heuristique connu sous le nom de « Möbius randomness principle » (voir par exemple [31], [23, p. 338], ainsi que les articles [19], [4] et [5] déjà cités dans le paragraphe 1.2).

3. DESCRIPTION DE LA PREUVE DES THÉORÈMES 1 ET 2

L'identité de Vaughan (voir par exemple [23] paragraphe 13.4) appliquée à la somme (7) conduit à l'estimation de sommes classiquement qualifiées de type I et II, qui font l'objet des paragraphes 6 et 7 respectivement. La pertinence de ces estimations repose sur l'étude de la transformée de Fourier discrète de versions tronquées de la fonction f . Plus précisément, nous fournissons au paragraphe 5 des estimation en moyenne L^1 et en norme infinie de ces transformées de Fourier discrètes qui semblent présenter un intérêt intrinsèque. La mise en œuvre de la méthode de Vaughan, et ainsi la preuve finale des théorèmes 1 et 2, sont effectuées au paragraphe 8.

La fonction somme des chiffres s correspond à un cas très particulier de fonction digitale car $(s(0), s(1), \dots, s(q-1)) = (0, 1, \dots, q-1)$ constitue une progression arithmétique. Dans la méthode mise en place dans [29] il est crucial de pouvoir estimer de manière très précise les transformées de Fourier discrètes :

$$|F_\lambda(h, \alpha)| = \frac{1}{q^\lambda} \prod_{j=1}^{\lambda} \left| \frac{\sin \pi q \left(\alpha - \frac{h}{q^j} \right)}{\sin \pi \left(\alpha - \frac{h}{q^j} \right)} \right|.$$

Lorsque f est une fonction digitale quelconque, l'étude des transformées de Fourier discrètes

$$|F_\lambda(h, \alpha)| = \frac{1}{q^\lambda} \prod_{j=1}^{\lambda} \varphi \left(\frac{h}{q^j} \right)$$

où $\varphi(t) = \left| \sum_{0 \leq k < q} e(\alpha_k - kt) \right|$, est extrêmement délicate. Si $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ constitue une progression arithmétique modulo 1 (c'est-à-dire si $f \in \mathcal{F}_0$) la fonction φ est une somme géométrique et la méthode mise en place dans [29] se généralise et permet d'obtenir le théorème 1. Dans le cas général la stratégie développée dans [29] est inopérante et il est nécessaire d'étudier d'une manière beaucoup plus fine ces transformées de Fourier. C'est l'objet des lemmes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

4. LEMMES TECHNIQUES

Nous établissons dans cette section quelques lemmes utiles pour la section 5. Nous commençons par fournir deux lemmes généraux concernant certaines moyennes quadratiques et biquadratiques d'un polynôme trigonométrique.

Lemme 2. *Soit $K \in \mathbb{N}$ et $P(t) = \sum_{k=0}^K c_k e(kt)$ ($c_k \in \mathbb{C}$). Alors pour tout nombre entier $N \geq K + 1$ on a*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P \left(t + \frac{n}{N} \right) \right|^2 = \sum_{k=0}^K |c_k|^2.$$

Démonstration. En développant le carré du membre de gauche et en intervertissant les sommes on obtient

$$\sum_{k=0}^K \sum_{k'=0}^K c_k \overline{c_{k'}} e((k-k')t) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e \left((k-k') \frac{n}{N} \right).$$

Pour tout $N \geq K + 1$, il y a équivalence entre $k - k' \equiv 0 \pmod{N}$ et $k - k' = 0$, d'où l'égalité annoncée. \square

Lemme 3. Soit $K \in \mathbb{N}$ et $P(t) = \sum_{k=0}^K c_k e(kt)$ ($c_k \in \mathbb{C}$). Alors $|P(t)|^2$ est un polynôme trigonométrique de degré K :

$$|P(t)|^2 = \sum_{|k| \leq K} \left(\sum_j c_{j+k} \bar{c}_j \right) e(kt),$$

où la somme sur j est restreinte par $\max(0, -k) \leq j \leq \min(K, K-k)$, et pour tout nombre entier $N \geq 2K + 1$ on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| P\left(t + \frac{n}{N}\right) \right|^4 = \sum_{k=-K}^K \left| \sum_j c_{j+k} \bar{c}_j \right|^2.$$

Démonstration. On écrit

$$|P(t)|^2 = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K c_i \bar{c}_j e((i-j)t)$$

et en posant $i = j + k$ on obtient la première égalité. Pour montrer la seconde égalité, on observe que $|P(t)|^2 = |Q(t)|$ avec

$$Q(t) = \sum_{|k| \leq K} \left(\sum_j c_{j+k} \bar{c}_j \right) e((k+K)t) = \sum_{0 \leq k' \leq 2K} \left(\sum_j c_{j+k'-K} \bar{c}_j \right) e(k't),$$

et on applique le lemme 2 à $Q(t)$. □

Pour $R \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, introduisons

$$(11) \quad \tilde{\varphi}_R(u) = \left| \sum_{0 \leq r < R} e(ru) \right|.$$

Lemme 4. Pour $L \geq 2$, $R \geq 2$, on a

$$(12) \quad \frac{1}{RL} \sum_{|\ell| < L} \left(1 - \frac{|\ell|}{L}\right) \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell}{RL}\right) \leq \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} < 1.$$

Démonstration. Pour $0 \leq a < 1$ fixé, la fonction $x \mapsto \sin(\pi ax)$ est concave sur $[0; 1/2]$, d'où $\sin(\pi ax) \geq 2x \sin(\pi a/2)$. En prenant $a = |\ell|/L$ et $x = 1/R$, on a donc

$$\frac{1}{R} \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell}{RL}\right) = \frac{\sin \frac{\pi|\ell|}{L}}{R \sin \frac{\pi|\ell|}{LR}} \leq \frac{\sin \frac{\pi|\ell|}{L}}{2 \sin \frac{\pi|\ell|}{2L}} = \cos \frac{\pi\ell}{2L}.$$

Le noyau de Fejér d'ordre $L - 1$ vaut pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$K_L(t) = \sum_{|\ell| < L} \left(1 - \frac{|\ell|}{L}\right) \cos(2\pi\ell t) = \sum_{|\ell| < L} \left(1 - \frac{|\ell|}{L}\right) e(\ell t) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin \pi t L}{\sin \pi t} \right)^2.$$

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{RL} \sum_{|\ell| < L} \left(1 - \frac{|\ell|}{L}\right) \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell}{RL}\right) \leq \frac{1}{L} K_L\left(\frac{1}{4L}\right) = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4L}} \right)^2 = \frac{1}{2L^2 \sin^2 \frac{\pi}{4L}}.$$

Par concavité de la fonction sinus, on a $\sin x \geq \frac{8x}{\pi} \sin \frac{\pi}{8}$ pour tout $x \in [0; \pi/8]$, ce qui, appliqué avec $x = \pi/4L \in [0; \pi/8]$, donne

$$\frac{1}{RL} \sum_{|\ell| < L} \left(1 - \frac{|\ell|}{L}\right) \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell}{RL}\right) \leq \frac{1}{8 \sin^2 \frac{\pi}{8}},$$

d'où la majoration (12) puisque $\sin^2 \frac{\pi}{8} = (2 - \sqrt{2})/4$. □

5. ÉTUDE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER DISCRÈTES

Dans cette section nous considérons une fonction $f \in \mathcal{F}$ fixée ce qui revient à fixer un q -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1})$ de nombres réels. Étant donné $\lambda \in \mathbb{N}$, nous introduisons les fonctions $| \cdot |_{\lambda, k}$ définie par

$$(13) \quad |n|_{\lambda, k} = \#\{0 \leq j < \lambda \mid n_j = k\} \quad (n = \sum_{j \geq 0} n_j q^j, 0 \leq n_j < q),$$

et la fonction f_λ définie par

$$(14) \quad f_\lambda(n) = \sum_{0 \leq k < q} \alpha_k |n|_{\lambda, k}.$$

Remarquons que pour $j \in \{0, \dots, q-1\}$, $u, v \in \mathbb{N}$, $v < q$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$(15) \quad |uq + v|_{\lambda, j} = |u|_{\lambda-1, j} + |v|_j,$$

d'où

$$f_\lambda(uq + v) = f_{\lambda-1}(u) + \sum_{0 \leq j < q} \alpha_j |v|_j = f_{\lambda-1}(u) + \alpha_v.$$

La fonction $n \mapsto e(f_\lambda(n))$ étant q^λ périodique, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier discrète

$$(16) \quad F_\lambda(h) := \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq u < q^\lambda} e\left(f_\lambda(u) - \frac{uh}{q^\lambda}\right) \quad (h \in \mathbb{Z}).$$

On a $F_0 = 1$, et pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$, en remplaçant u par $uq + v$ avec $0 \leq v < q$ et $0 \leq u < q^{\lambda-1}$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} F_\lambda(h) &= \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leq v < q} e\left(\alpha_v - \frac{vh}{q^\lambda}\right) \sum_{0 \leq u < q^{\lambda-1}} e\left(f_{\lambda-1}(u) - \frac{uh}{q^{\lambda-1}}\right) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{0 \leq v < q} e\left(\alpha_v - \frac{vh}{q^\lambda}\right) F_{\lambda-1}(h). \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient donc

$$(17) \quad |F_\lambda(h)| = \frac{1}{q^\lambda} \prod_{j=1}^{\lambda} \varphi\left(\frac{h}{q^j}\right) \quad (\lambda \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{Z}),$$

où φ est la fonction 1-périodique définie par

$$\varphi(t) = \left| \sum_{0 \leq k < q} e(\alpha_k - kt) \right| \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Les calculs ultérieurs nécessitent deux types de renseignements spécifiques concernant la fonction F_λ : une majoration en moyenne le long d'une progression arithmétique et une majoration en norme infinie.

5.1. Estimations en moyenne.

L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir une estimation fine du comportement en moyenne de F_λ le long d'une progression arithmétique. Dans le cas de la fonction somme de chiffres et lorsque $q \geq 3$, cela repose essentiellement sur l'étude de la fonction de transfert

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{q} \sum_{0 \leq r < q} \varphi\left(t + \frac{r}{q}\right),$$

pour laquelle il faut fournir une borne uniforme meilleure que la racine carrée de la borne triviale : voir la preuve du lemme 16 de [29] (la fonction de transfert φ est notée Ψ_q). Une

telle majoration n'est pas disponible dans le cas plus général traité ici. Tout comme dans le cas $q = 2$ pour la somme de chiffres (voir lemme 18 de [29]), il est nécessaire d'étudier la fonction de transfert d'ordre 2 soit

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= \frac{1}{q} \sum_{0 \leq r < q} \varphi\left(\frac{t+r}{q}\right) \Phi_1\left(\frac{t+r}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{0 \leq r < q} \varphi\left(\frac{t+r}{q}\right) \sum_{0 \leq s < q} \varphi\left(\frac{t+r}{q^2} + \frac{s}{q}\right)\end{aligned}$$

Pour des raisons techniques qui apparaîtront clairement dans la preuve de la Proposition 1 *infra*, résultat principal de ce paragraphe, il nous faut en fait étudier une version plus générale de la fonction Φ_2 : nous introduisons

$$(18) \quad \Psi(t, R, S) = \frac{1}{q^2} \sum_{r < R} \varphi\left(\frac{t+r}{R}\right) \sum_{s < S} \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{s}{S}\right) \quad (t \in \mathbb{R}, R, S \in \mathbb{N}^*).$$

Notons la majoration triviale $\Psi(t, R, S) \leq RS$ ($t \in \mathbb{R}$). Un majorant pour $\Psi(t, R, S)$ de la forme $(RS)^{\eta_q}$ avec $\eta_q < 1/2$ est fourni au lemme 7 *infra*, dont la preuve repose sur les Lemmes 5 et 6 qui suivent.

Lemme 5. *Pour $R \mid q$ et $S \mid q$ on a*

$$(19) \quad \Psi(t, R, S)^2 \leq \frac{S^2}{q} \sum_{|\ell| < q/S} \left(1 - \frac{S|\ell|}{q}\right) \tilde{\varphi}_R\left(\frac{\ell S}{qR}\right),$$

où $\tilde{\varphi}_R$ est définie en (11).

Démonstration. Commençons par remarquer que d'après le lemme 2 appliqué à la fonction φ , on a pour tout nombre entier $N \geq q$,

$$(20) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^2\left(t + \frac{n}{N}\right) = q.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme sur r dans l'expression (18) de $\Psi(t, R, S)$, et en observant à l'aide de (20) que

$$(21) \quad \frac{1}{q^2} \sum_{0 \leq r < R} \varphi^2\left(\frac{t+r}{R}\right) = \frac{1}{q^2} \sum_{0 \leq r < R} \varphi^2\left(\frac{t}{R} + \frac{rq/R}{q}\right) \leq \frac{1}{q^2} \sum_{0 \leq r' < q} \varphi^2\left(\frac{t}{R} + \frac{r'}{q}\right) = 1,$$

on voit qu'il suffit de majorer par le membre de droite de (19) l'expression

$$\frac{S}{q^2} \sum_{0 \leq r < R} \sum_{0 \leq s < S} \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{s}{S}\right).$$

Maintenant on peut écrire

$$\sum_{0 \leq s < S} \varphi^2\left(u + \frac{s}{S}\right) = \sum_{0 \leq i < q} \sum_{0 \leq j < q} e(\alpha_i - \alpha_j - (i-j)u) \sum_{0 \leq s < S} e\left(- (i-j) \frac{s}{S}\right),$$

ce qui entraîne, d'après la relation (2),

$$\sum_{0 \leq s < S} \varphi^2\left(u + \frac{s}{S}\right) = S \sum_{0 \leq i < q} \sum_{\substack{0 \leq j < q \\ j \equiv i \pmod{S}}} e(\alpha_i - \alpha_j - (i-j)u).$$

Il suffit donc de majorer par le membre de droite de (19) l'expression

$$\frac{S^2}{q^2} \sum_{0 \leq r < R} \sum_{0 \leq i < q} \sum_{\substack{0 \leq j < q \\ j \equiv i \pmod{S}}} e \left(\alpha_i - \alpha_j - (i - j) \frac{t + r}{qR} \right).$$

En intervertissant les sommes et en majorant trivialement, il suffit finalement de montrer que le membre de droite de (19) est égal à l'expression

$$\frac{S^2}{q^2} \sum_{0 \leq i < q} \sum_{\substack{0 \leq j < q \\ j \equiv i \pmod{S}}} \left| \sum_{0 \leq r < R} e \left(-(i - j) \frac{r}{qR} \right) \right|.$$

En découpant par tranches de longueur S on obtient

$$\frac{S^2}{q^2} \sum_{0 \leq i < S} \sum_{0 \leq k < q/S} \sum_{\substack{0 \leq j < q \\ j \equiv i \pmod{S}}} \tilde{\varphi}_R \left(\frac{-(i + kS - j)}{qR} \right),$$

c'est-à-dire en posant $j = i + k'S$,

$$\frac{S^2}{q^2} \sum_{0 \leq i < S} \sum_{0 \leq k < q/S} \sum_{0 \leq k' < q/S} \tilde{\varphi}_R \left(\frac{-(kS - k'S)}{qR} \right),$$

ce qui, en comptant le nombre de représentations de $\ell = k' - k$, donne

$$\frac{S^3}{q^2} \sum_{|\ell| < q/S} \left(\frac{q}{S} - |\ell| \right) \tilde{\varphi}_R \left(\frac{\ell S}{qR} \right),$$

c'est-à-dire le membre de droite de (19). □

Lorsque $S < q$, le membre de droite de (19) est strictement inférieur à RS car dans ce cas il existe des valeurs de ℓ telles que $1 \leq |\ell| < q/S$, et pour ces valeurs de ℓ on a $\tilde{\varphi}_R \left(\frac{\ell S}{qR} \right) < R$. En revanche, lorsque $S = q$, le majorant dans (19) vaut Rq et la majoration est donc triviale. Il est donc nécessaire d'obtenir une majoration plus précise dans ce cas. C'est l'objet du résultat suivant.

Lemme 6. *Pour tout nombre entier $R \geq 2$ tel que $R \mid q$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a*

$$(22) \quad \Psi^2(t, R, q) \leq Rq (1 - \Theta(f))$$

où

$$\Theta(f) = \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{q^2(q-1)} \sum_{k=1}^{q-1} \left| \sum_{j=0}^{q-1-k} e(\alpha_j - \alpha_{j+k}) \right|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

vérifie

$$(23) \quad \Theta_q := \min_{f \in \mathcal{F}} \Theta(f) \geq \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2}{q^2(q-1)} \right)^{1/2} \right\} > \frac{1}{q^3} > 0.$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme en r dans l'expression (18) de $\Psi(t, R, S)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi^2(t, R, q) &= \frac{1}{q^4} \left(\sum_{r < R} \varphi\left(\frac{t+r}{R}\right) \sum_{s < q} \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{s}{q}\right) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{q^4} \sum_{r < R} \varphi\left(\frac{t+r}{R}\right)^2 \sum_{r < R} \left(\sum_{s < q} \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{s}{q}\right) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{q^2} \sum_{r < R} \left(\sum_{s < q} \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{s}{q}\right) \right)^2,\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de (21). Cela donne, vu que φ est périodique de période 1,

$$\Psi^2(t, R, q) \leq \frac{1}{q^2} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q}\right) \varphi\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q} + \frac{\ell}{q}\right).$$

La contribution du terme $\ell = 0$ est d'après (20) :

$$\frac{1}{q^2} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q}\right) = R.$$

On isole ce terme $\ell = 0$ dans la majoration de $\Psi^2(t, R, q)$ ci-dessus et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la triple somme en r , k et ℓ :

(24)

$$\Psi^2(t, R, q) \leq R + \frac{1}{q^2} \left(Rq(q-1) \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\ell=1}^{q-1} \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q}\right) \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q} + \frac{\ell}{q}\right) \right)^{1/2}.$$

La triple somme dans la parenthèse vaut

$$(25) \quad \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q}\right) \varphi^2\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q} + \frac{\ell}{q}\right) - \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{q-1} \varphi^4\left(\frac{t+r}{qR} + \frac{k}{q}\right),$$

c'est-à-dire, d'après (20),

$$Rq^4 - \sum_{\ell=0}^{qR-1} \varphi^4\left(\frac{t+\ell}{qR}\right).$$

Or d'après le lemme 3 appliqué à la fonction φ , $\varphi^2(t)$ est un polynôme trigonométrique de degré $q-1$ qui vérifie pour tout nombre entier $N \geq 2q-1$,

$$(26) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^4\left(t + \frac{n}{N}\right) = \sum_{|k| \leq q-1} \left| \sum_j e(\alpha_j - \alpha_{j+k}) \right|^2.$$

Donc, comme $qR \geq 2q-1$ (car $R \geq 2$), la quantité (25) vaut

$$Rq^4 - Rq \sum_{|k| \leq q-1} \left| \sum_j e(\alpha_j - \alpha_{j+k}) \right|^2,$$

ou encore, en isolant le terme $k = 0$ et en exploitant la symétrie entre $-k$ et k :

$$Rq^4 - Rq^3 - 2Rq \sum_{k=1}^{q-1} \left| \sum_{j=0}^{q-1-k} e(\alpha_j - \alpha_{j+k}) \right|^2,$$

ce qui, en mettant $Rq^3(q-1)$ en facteur et en reportant dans (24), donne

$$\Psi^2(t, R, q) \leq R + R(q-1) \left(1 - \frac{2}{q^2(q-1)} \sum_{k=1}^{q-1} \left| \sum_{j=0}^{q-1-k} e(\alpha_j - \alpha_{j+k}) \right|^2 \right)^{1/2}$$

et fournit bien (22).

La minoration (23) s'obtient en ne conservant dans la définition de $\Theta(f)$ que le terme $k = q-1$ dans la sommation sur k . \square

Introduisons la quantité

$$(27) \quad \eta_q = \max \left(\frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2}, \frac{1}{2} + \frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q} \right).$$

En remarquant que $0 < \Theta_q < 1$, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q} < \frac{1}{2}$$

et

$$0,38577665 < \frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{2\log 2} \leq \frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2} < \frac{1}{2},$$

d'où

$$(28) \quad 0,38577665 < \eta_q < \frac{1}{2}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat suivant.

Lemme 7. *On a pour $t \in \mathbb{R}$, $R \mid q$, $S \mid q$ et $R, S \geq 2$,*

$$(29) \quad \Psi(t, R, S) \leq (RS)^{\eta_q}.$$

Démonstration. Lorsque $S < q$, nous employons le lemme 5 :

$$\Psi^2(t, R, q) \leq \frac{S^2}{q} \sum_{|\ell| < q/S} \left(1 - \frac{S|\ell|}{q} \right) \tilde{\varphi}_R \left(\frac{\ell S}{qR} \right).$$

En appliquant le lemme 4 avec $L = q/S$, on obtient, pour $R \geq 2$, $S \mid q$, $S < q$ (et donc $S \leq q/2$ et $L \geq 2$),

$$\Psi(t, R, S)^2 \leq (RS)^{1 - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{\log RS}},$$

et par suite, comme $RS \leq q^2/2$,

$$(30) \quad \Psi(t, R, S) \leq (RS)^{\frac{1}{2} - \frac{\log(4-2\sqrt{2})}{4\log q - 2\log 2}} \quad (S < q).$$

Lorsque $S = q$, on emploie (22) et (23), ce qui entraîne

$$\Psi^2(t, R, q) \leq Rq(1-\Theta_q) = (Rq)^{1 + \frac{\log(1-\Theta_q)}{\log(Rq)}}$$

et par suite, comme $R \leq q$ et $\log(1-\Theta_q) < 0$,

$$(31) \quad \Psi(t, R, q) \leq (Rq)^{\frac{1}{2} + \frac{\log(1-\Theta_q)}{4\log q}}$$

Les deux inégalités (30) et (31) entraînent bien (29). \square

La proposition suivante généralise les lemmes 17 et 18 de [29].

Proposition 1. *Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \delta \leq \lambda$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k|q^{\lambda-\delta}$, $q \nmid k$, on a*

$$(32) \quad \sum_{\substack{0 \leq h < q^\lambda \\ h \equiv a \pmod{kq^\delta}}} |F_\lambda(h)| \leq k^{-n_q} q^{n_q(\lambda-\delta)+1} |F_\delta(a)|.$$

En particulier, pour $k = 1$, $\delta = 0$, on a

$$(33) \quad \sum_{0 \leq h < q^\lambda} |F_\lambda(h)| \leq q^{n_q \lambda + 1}.$$

Démonstration. Si $\lambda = \delta$, la condition $k | q^{\lambda-\delta}$ entraîne $k = 1$ et le membre de gauche de (32) qui vaut $|F_\delta(a)|$ est bien inférieur au membre droite qui vaut lui $q|F_\delta(a)|$. Lorsque $\lambda > \delta$ nous reprenons les notations introduites dans la preuve du lemme 17 de [29] : on pose pour $\delta \leq \theta \leq \lambda$, $d_\theta = \text{pgcd}(q^\theta, kq^\delta)$, $u_\theta = q^\theta/d_\theta$, et pour $\delta < \theta \leq \lambda$, $\rho_\theta = d_\theta/d_{\theta-1} \in \mathbb{N}$. Rappelons que l'on a alors

$$(34) \quad \rho_\theta | q \quad \text{et} \quad \rho_\theta < q,$$

et que par ailleurs

$$(35) \quad \text{pgcd}(\rho_\theta, u_{\theta-1}) = 1 \quad (\delta < \theta \leq \lambda).$$

Enfin nous posons

$$(36) \quad G_\theta(a, d_\theta) = \sum_{\substack{0 \leq h < q^\theta \\ h \equiv a \pmod{d_\theta}}} |F_\theta(h)| = \sum_{0 \leq u < u_\theta} |F_\theta(a + ud_\theta)| \quad (\delta \leq \theta \leq \lambda).$$

En écrivant $u = su_{\theta-1} + v$ avec $0 \leq s < q/\rho_\theta$ et $0 \leq v < u_{\theta-1}$, on a, pour $\delta < \theta \leq \lambda$,

$$(37) \quad \begin{aligned} G_\theta(a, d_\theta) &= \sum_{0 \leq v < u_{\theta-1}} \sum_{0 \leq s < q/\rho_\theta} |F_\theta(a + vd_\theta + sq^{\theta-1}\rho_\theta)| \\ &= \sum_{0 \leq v < u_{\theta-1}} \sum_{0 \leq s < q/\rho_\theta} |F_\theta(a + v\rho_\theta d_{\theta-1} + sq^{\theta-1}\rho_\theta)| \end{aligned}$$

En employant l'écriture (17) de $|F_\theta|$ sous forme de produit, il vient

$$G_\theta(a, d_\theta) = \frac{1}{q} \sum_{0 \leq v < u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + v\rho_\theta d_{\theta-1})| \sum_{0 \leq s < q/\rho_\theta} \varphi\left(\frac{a + v\rho_\theta d_{\theta-1} + sq^{\theta-1}\rho_\theta}{q^\theta}\right).$$

La majoration triviale $\varphi(t) \leq q$ fournit donc la majoration

$$G_\theta(a, d_\theta) \leq \frac{q}{\rho_\theta} \sum_{0 \leq v < u_{\theta-1}} |F_{\theta-1}(a + v\rho_\theta d_{\theta-1})|.$$

D'après (35), $v\rho_\theta$ parcourt bijectivement l'ensemble des classes modulo $u_{\theta-1}$ lorsque v varie entre 0 et $u_{\theta-1}$. Et comme la fonction $h \mapsto F_{\theta-1}(a + hd_{\theta-1})$ est $u_{\theta-1}$ -périodique, il s'ensuit

$$(38) \quad G_\theta(a, d_\theta) \leq \frac{q}{\rho_\theta} G_{\theta-1}(a, d_{\theta-1}).$$

Nous effectuons à présent une seconde itération à partir de (37) : pour $\delta + 1 < \theta \leq \lambda$, en posant $v = ru_{\theta-2} + u$ avec $0 \leq u < u_{\theta-2}$, $0 \leq r < q/\rho_{\theta-1}$, on a

$$G_\theta(a, d_\theta) = \sum_{0 \leq u < u_{\theta-2}} \sum_{s < q/\rho_\theta} \sum_{r < q/\rho_{\theta-1}} |F_\theta(a + u\rho_{\theta-1}d_{\theta-2} + rq^{\theta-2}\rho_{\theta-1} + sq^{\theta-1}\rho_\theta)|.$$

En employant l'écriture de $|F_\theta|$ sous forme de produit, on obtient en posant $R_\theta = q/\rho_\theta$ et $t_\theta = R_{\theta-1}(a + u\rho_{\theta-1}d_{\theta-2})/q^{\theta-1}$,

$$\begin{aligned} G_\theta(a, d_\theta) &= \frac{1}{q^2} \sum_{0 \leq u < u_{\theta-2}} |F_\theta(a + u\rho_{\theta-1}d_{\theta-2})| \sum_{r < R_{\theta-1}} \sum_{s < R_\theta} \varphi\left(\frac{t_\theta + r}{R_{\theta-1}}\right) \varphi\left(\frac{t_\theta + r}{qR_{\theta-1}} + \frac{s}{R_\theta}\right) \\ &\leq \max_{t \in \mathbb{R}} |\Psi(t, R_{\theta-1}, R_\theta)| \sum_{0 \leq u < u_{\theta-2}} |F_{\theta-2}(a + u\rho_{\theta-1}d_{\theta-2})|, \end{aligned}$$

ce qui, comme $\text{pgcd}(\rho_{\theta-1}, u_{\theta-2}) = 1$, entraîne

$$G_\theta(a, d_\theta) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |\Psi(t, R_{\theta-1}, R_\theta)| G_{\theta-2}(a, d_{\theta-2}).$$

Notons que d'après (34), on a $R_\theta \mid q$ et $R_\theta \geq 2$ pour $\delta < \theta \leq \lambda$. Par conséquent, d'après le lemme 7 appliqué avec $R = R_{\theta-1}$ et $S = R_\theta$,

$$(39) \quad G_\theta(a, d_\theta) \leq \left(\frac{q^2}{\rho_\theta \rho_{\theta-1}}\right)^{\eta_a} G_{\theta-2}(a, d_{\theta-2}) \quad (\delta + 1 < \theta \leq \lambda).$$

En appliquant l'inégalité (39) $\lfloor (\lambda - \delta)/2 \rfloor$ fois, puis éventuellement une fois l'inégalité (38), il vient

$$\sum_{\substack{0 \leq h < q^\lambda \\ h \equiv a \pmod{kq^\delta}}} |F_\lambda(h)| = G_\lambda(a, d_\lambda) \leq (\rho_\lambda \dots \rho_{\delta+1})^{\eta_a} q^{2\lfloor (\lambda - \delta)/2 \rfloor \eta_a + 1} G_\delta(a, d_\delta).$$

Compte-tenu des identités

$$\rho_\lambda \dots \rho_{\delta+1} = \frac{d_\lambda}{d_\delta} = \frac{kq^\delta}{q^\delta} = k,$$

et

$$G_\delta(a, d_\delta) = G_\delta(a, q^\delta) = |F_\delta(a)|,$$

nous obtenons bien la majoration (32). □

5.2. Estimation en norme infinie.

Posons

$$(40) \quad q^{\gamma_q(f)} = \max_{t \in \mathbb{R}} \sqrt{\varphi(t)\varphi(qt)}.$$

Notons d'emblée qu'avec cette définition on a

$$(41) \quad \max_{h \in \mathbb{Z}} |F_\lambda(h)| \leq q^{\lambda(\gamma_q(f)-1)+1}.$$

En effet, cela résulte directement de l'expression (17) de F_λ sous forme de produit et de la suite d'inégalités

$$\prod_{j=1}^{\lambda} \varphi(tq^{-j}) \leq q \prod_{0 \leq j \leq \lfloor \lambda/2 \rfloor} \varphi(tq^{-2j})\varphi(tq^{-2j-1}) \leq q^{2\gamma_q(f)\lfloor \lambda/2 \rfloor + 1} \leq q^{\lambda\gamma_q(f)+1} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Mauduit et Rivat ont obtenu dans [29, Lemme 20] et [28, Lemme 7] des majorations de $\gamma_q(f)$ dans le cas particulier où $f(n) = \alpha s(n)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous commençons dans ce paragraphe par fournir une majoration générale de $\gamma_q(f)$ pour $f \in \mathcal{F}$ qui est, compte-tenu du lemme 1, non triviale dès que $f \notin \mathcal{F}_0$. Nous rappelons la définition de $\sigma_q(f)$ en (8).

Lemme 8. Pour $f \in \mathcal{F}$, on a

$$(42) \quad \varphi(t) \leq q \exp\left(-\frac{8}{q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\right) \quad (0 \leq i, j < q, t \in \mathbb{R}).$$

De plus,

$$(43) \quad \gamma_q(f) \leq 1 - \frac{16}{q^2(q-1)\log q} \sigma_q(f).$$

Démonstration. Lorsque $i = j$, l'inégalité (42) est triviale. Lorsque $i \neq j$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left| e(\alpha_i - it) + e(\alpha_j - jt) + \sum_{\substack{0 \leq k < q \\ k \notin \{i, j\}}} e(\alpha_k - kt) \right| \\ &\leq |e(\alpha_i - it) + e(\alpha_j - jt)| + q - 2 \\ &= |1 + e(\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t)| + q - 2. \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 12 de [9], nous disposons de l'inégalité

$$|1 + e(\beta)| \leq 2(1 - 4\|\beta\|^2) \quad (\beta \in \mathbb{R}).$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq 2(1 - 4\|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2) + q - 2 \\ &= q\left(1 - \frac{8}{q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\right), \end{aligned}$$

et compte-tenu de l'inégalité de convexité $1 - x \leq \exp(-x)$ ($x \in \mathbb{R}$), nous obtenons bien (42). Par ailleurs, en employant l'inégalité (42) pour chaque couple (i, j) avec $0 \leq j < i < q$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(t)^{q(q-1)/2} &\leq q^{q(q-1)/2} \exp\left(-\frac{8}{q} \sum_{0 \leq j < i < q} \|\alpha_i - \alpha_j - (i-j)t\|^2\right) \\ &\leq q^{q(q-1)/2} \exp\left(-\frac{8}{q} \sigma_q(f)\right). \end{aligned}$$

Cela fournit bien la majoration (43). \square

La preuve du Théorème 1 nécessite une majoration spécifique de $\gamma_q(f)$ lorsque $f \in \mathcal{F}_0$. Pour ce faire, nous établissons en premier lieu un lemme technique. Nous introduisons la fonction $g_{q,\theta}$ définie pour $q \geq 2$, $\theta \in \mathbb{R}$, par

$$g_{q,\theta}(t) = \|\theta + t\|^2 + \|\theta + qt\|^2 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 9. On a pour $q \geq 2$, $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\min_{t \in \mathbb{R}} g_{q,\theta}(t) \geq \frac{\|(q-1)\theta\|^2}{(q + \sqrt{2} - 1)^2}.$$

Démonstration. Dans ce qui suit on désigne par $d(x, A)$ la distance, au sens de la valeur absolue, entre un nombre réel x et une partie A de \mathbb{R} . Posons $\delta_0 = d((q-1)\theta, \mathbb{Z})$ de sorte que

$$d\left(\theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) = \frac{\delta_0}{q-1},$$

et fixons $0 \leq \delta \leq \delta_0$, un paramètre à fixer ultérieurement.

Si $\|(q-1)t\| \geq \delta$, alors en employant l'inégalité $\|u\|^2 + \|u+v\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v\|^2$ valable pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on obtient

$$g_{q,\theta}(t) \geq \frac{1}{2}\delta^2.$$

Si $\|(q-1)t\| < \delta$, cela signifie que $d((q-1)t, \mathbb{Z}) < \delta$, soit

$$d\left(t, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) < \frac{\delta}{q-1}.$$

On a alors

$$d\left(t + \theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) \geq d\left(\theta, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) - d\left(t, \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}\right) \geq \frac{\delta_0 - \delta}{q-1}.$$

Il suit

$$d(t + \theta, \mathbb{Z}) \geq \frac{\delta_0 - \delta}{q-1},$$

puis

$$g_{q,\theta}(t) \geq \frac{(\delta - \delta_0)^2}{(q-1)^2}.$$

Finalement

$$g_{q,\theta}(t) \geq \min\left(\frac{1}{2}\delta^2, \frac{(\delta - \delta_0)^2}{(q-1)^2}\right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

et en effectuant le choix $\delta = \frac{\delta_0\sqrt{2}}{q+\sqrt{2}-1}$, on parvient à la conclusion souhaitée. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une majoration de $\gamma_q(f)$, non triviale dès qu'il existe $(i, j) \in \{0, \dots, q-1\}^2$ tel que $(q-1)(\alpha_i - \alpha_j) \notin \mathbb{Z}$.

Lemme 10. *Pour $f \in \mathcal{F}$, on a pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, q-1\}^2$,*

$$\gamma_q(f) \leq 1 - \frac{4\|(q-1)(\alpha_i - \alpha_j)\|^2}{q(q + \sqrt{2} - 1)^2 \log q}.$$

Démonstration. D'après la majoration (42) nous avons

$$\varphi(t)\varphi(qt) \leq q^2 \exp\left(-\frac{8}{q} g_{q,\alpha_i - \alpha_j}((j-i)t)\right).$$

L'emploi du lemme 9 fournit alors directement la conclusion souhaitée. \square

On en déduit immédiatement lorsque $f \in \mathcal{F}_0$:

Lemme 11. *Pour $f \in \mathcal{F}_0$, on a*

$$(44) \quad \gamma_q(f) \leq 1 - \frac{4\|(q-1)\theta\|^2}{q(q + \sqrt{2} - 1)^2 \log q}.$$

avec $\theta = \alpha_1 - \alpha_0$.

6. SOMMES DE TYPE I

La majoration des sommes de type I constitue la partie facile de la preuve des théorèmes 1 et 2. La proposition 2 qui fournit une majoration des sommes de type I associées à la somme d'exponentielles (7) *via* la méthode de Vaughan, généralise ainsi la proposition 2 de [29] : la preuve en est d'ailleurs essentiellement identique, au moins une fois le lemme technique 12 établi. Nous la restituons sommairement dans le seul but de montrer comment le terme additionnel βn dans l'exponentielle peut être traité grâce à un argument de périodicité.

Pour $f \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, nous introduisons la fonction

$$\Phi_\lambda(t) = \sum_{0 \leq \ell < q^\lambda} e(f_\lambda(\ell) + \ell t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lemme 12. *Pour $n \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$, on a*

$$\left| \sum_{0 < n < N} e(f(n) + nt) \right| \leq 2(q-1) \sum_{\lambda \leq \frac{\log N}{\log q}} |\Phi_\lambda(t)|.$$

Démonstration. Nous reprenons les notations de la partie 2 de [13] :

$$S_N(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{0 < n < N} x_0^{|n|_0} x_1^{|n|_1} \dots x_{q-1}^{|n|_{q-1}} y^n,$$

et

$$T_{\nu, N}(x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, y) = \sum_{0 \leq n < N} x_0^{|n|_{\nu, 0}} x_1^{|n|_{\nu, 1}} \dots x_{q-1}^{|n|_{\nu, q-1}} y^n, \quad (N \geq 1, \nu \in \mathbb{N}),$$

où les fonctions $|\cdot|_{\nu, j}$ sont définies en (13), et nous posons

$$S_N = S_N(e(\alpha_0), e(\alpha_1), \dots, e(\alpha_{q-1}), e(t))$$

et

$$T_{\nu, N} = T_{\nu, N}(e(\alpha_0), e(\alpha_1), \dots, e(\alpha_{q-1}), e(t)),$$

de sorte que

$$S_N = \sum_{0 < n < N} e(f(n) + nt)$$

et

$$(45) \quad T_{\nu, q^\nu} = \Phi_\nu(t).$$

Nous pouvons écrire $N = \ell q^\nu + N'$ avec $\nu = \lfloor \log N / \log q \rfloor$, $N' < q^\nu$, $1 \leq \ell < q$. Il résulte alors des formules fournies au lemme 2.1 de [13] que

$$(46) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{0 < n < N} e(f(n) + nt) \right| &= |S_{\ell q^\nu + N'}| \leq |S_{\ell q^\nu}| + |T_{\nu, N'}| \\ &\leq |S_{q^\nu}| + (\ell - 1) |T_{\nu, q^\nu}| + |T_{\nu, N'}| \\ &\leq (q - 1) \sum_{0 \leq j < \nu} |T_{j, q^j}| + (\ell - 1) |T_{\nu, q^\nu}| + |T_{\nu, N'}| \\ &\leq (q - 1) \sum_{0 \leq j \leq \nu} |T_{j, q^j}| + |T_{\nu, N'}|. \end{aligned}$$

En posant $N' = m q^i + N''$ avec $i = \lfloor \log N' / \log q \rfloor$, $N'' < q^i$, $1 \leq m < q$, on a

$$|T_{\nu, N'}| \leq |T_{\nu, m q^i}| + |T_{i, N''}| \leq (q - 1) |T_{i, q^i}| + |T_{i, N''}|.$$

En itérant le procédé, on aboutit à

$$(47) \quad |T_{\nu, N'}| \leq (q - 1) \sum_{0 \leq \lambda \leq i} |T_{\lambda, q^\lambda}|.$$

En insérant (47) dans (46) nous obtenons

$$\left| \sum_{0 < n < N} e(f(n) + nt) \right| \leq 2(q - 1) \sum_{\lambda \leq \lfloor \log N / \log q \rfloor} |T_{\lambda, q^\lambda}|,$$

ce qui, compte tenu de (45), correspond bien à la conclusion attendue. \square

Proposition 2. On a pour $f \in \mathcal{F}$, $x \geq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq M \leq x^{1/3}$,

$$\sum_{M < m \leq 2M} \max_{t \leq \frac{x}{m}} \left| \sum_{n \leq t} e(f(mn) + \beta mn) \right| \ll x^{1 - \kappa_q(f)} \log x,$$

la constante implicite ne dépendant que de q , avec

$$\kappa_q(f) := \min \left(\frac{1}{6}, \frac{1 - \gamma_q(f)}{3} \right).$$

Démonstration. Nous posons

$$T := \sum_{M < m \leq 2M} \max_{t \leq \frac{x}{m}} \left| \sum_{0 \leq n \leq t} e(f(mn) + \beta mn) \right|.$$

Pour $M < m \leq 2M$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq n \leq t} e(f(mn) + \beta mn) \right| &= \left| \frac{1}{m} \sum_{0 \leq k < m} \sum_{0 \leq \ell \leq mt} e\left(f(\ell) + \ell\left(\beta + \frac{k}{m}\right)\right) \right| \\ &\leq 2 + \frac{1}{M} \sum_{0 \leq k < m} \left| \sum_{0 < \ell < mt} e\left(f(\ell) + \ell\left(\beta + \frac{k}{m}\right)\right) \right|. \end{aligned}$$

En employant le lemme 12 on obtient pour $mt \leq x$,

$$\left| \sum_{0 < \ell < mt} e\left(f(\ell) + \ell\left(\beta + \frac{k}{m}\right)\right) \right| \leq 2(q-1) \sum_{\lambda \leq \frac{\log x}{\log q}} \left| \Phi_\lambda\left(\beta + \frac{k}{m}\right) \right|.$$

de sorte que l'on a

$$T \ll M + \frac{1}{M} \sum_{\lambda \leq \frac{\log x}{\log q}} S(M, q, \lambda)$$

avec

$$(48) \quad S(M, q, \lambda) := \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{0 \leq k < m} \left| \Phi_\lambda\left(\beta + \frac{k}{m}\right) \right|.$$

En organisant la somme du membre de gauche de (48) selon la valeur de $d = \text{pgcd}(k, m)$, on a

$$S(M, q, \lambda) = \sum_{1 \leq d \leq 2M} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k, m) = d}} \left| \Phi_\lambda\left(\beta + \frac{k}{m}\right) \right|.$$

Tout comme la fonction F_λ , la fonction Φ_λ admet une écriture sous forme de produit : $|\Phi_\lambda(t)| = \prod_{0 \leq j < \lambda} \varphi(-q^j t)$ (on aura remarqué que $\Phi_\lambda(t) = q^\lambda F_\lambda(-q^\lambda t)$). En introduisant pour chaque d fixé un paramètre $\lambda_1 \leq \lambda$, on a donc, d'après la définition de $\gamma_q(f)$ en (40),

$$|\Phi_\lambda(t)| \leq |\Phi_{\lambda_1}(t)| q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1) + 1}.$$

Comme de plus les nombres réels k/m sont d^2/M^2 bien espacés, on peut appliquer l'inégalité de Sobolev-Gallagher à la fonction $t \mapsto \Phi_{\lambda_1}(\beta + t)$ et aux nombres k/m , et on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k, m) = d}} \left| \Phi_\lambda\left(\beta + \frac{k}{m}\right) \right| \\ &\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1)} \sum_{M/2 < m \leq M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k, m) = d}} \left| \Phi_{\lambda_1}\left(\beta + \frac{k}{m}\right) \right| \\ &\ll q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1)} \left(\frac{M^2}{d^2} \int_0^1 |\Phi_{\lambda_1}(\beta + t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^1 |\Phi'_{\lambda_1}(\beta + t)| dt \right). \end{aligned}$$

Comme la fonction Φ_{λ_1} est 1-périodique, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k,m)=d}} \left| \Phi_{\lambda} \left(\beta + \frac{k}{m} \right) \right| \\ & \ll q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1)} \left(\frac{M^2}{d^2} \int_0^1 |\Phi_{\lambda_1}(t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^1 |\Phi'_{\lambda_1}(t)| dt \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'égalité de Parseval, on obtient pour $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |\Phi_{\lambda}(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |\Phi_{\lambda}(t)|^2 dt \right)^{1/2} = q^{\lambda/2}.$$

Par ailleurs,

$$|\Phi'_{\lambda}(t)| \ll \sum_{0 \leq j < \lambda} q^j \prod_{\substack{0 \leq i < \lambda \\ i \neq j}} \varphi(-q^i t) \ll \sum_{0 \leq j < \lambda} q^j q^{\lambda-j} \prod_{0 \leq i < j} \varphi(-q^i t) = q^{\lambda} \sum_{0 \leq j < \lambda} \Phi_j(t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k,m)=d}} \left| \Phi_{\lambda} \left(\beta + \frac{k}{m} \right) \right| & \ll q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1)} \left(\frac{M^2}{d^2} q^{\lambda_1/2} + q^{\lambda_1} \sum_{0 \leq j < \lambda_1} q^{j/2} \right) \\ & \ll q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1)} \left(\frac{M^2}{d^2} q^{\lambda_1/2} + q^{3\lambda_1/2} \right). \end{aligned}$$

On choisit alors

$$\lambda_1 = \min \left(\lambda, \left\lfloor \frac{2 \log(M/d)}{\log q} \right\rfloor \right).$$

Compte tenu des inégalités $q^{\lambda_1} \leq \min(q^{\lambda}, M^2/d^2)$, $q^{-\lambda_1} \leq \max(q^{-\lambda}, qd^2/M^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{0 \leq k < m \\ \text{pgcd}(k,m)=d}} \left| \Phi_{\lambda} \left(\beta + \frac{k}{m} \right) \right| & \ll \frac{M^2}{d^2} q^{\gamma_q(f)(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1/2} \\ & \ll \frac{M^2}{d^2} q^{\lambda/2} + \frac{M^{3-2\gamma_q(f)}}{d^{3-2\gamma_q(f)}} q^{\gamma_q(f)\lambda} \\ & \ll \frac{M^2}{d^2} q^{\lambda/2} + \frac{M^{3-2\gamma_q(f)}}{d} q^{\gamma_q(f)\lambda}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du fait que $\gamma_q(f) \leq 1$. Il suit

$$S(M, q, \lambda) \ll M^2 q^{\lambda/2} + M^{3-2\gamma_q(f)} \log(2M) q^{\gamma_q(f)\lambda},$$

puis

$$T \ll x^{1/2} M + x^{\gamma_q(f)} M^{2-2\gamma_q(f)} \log(2M).$$

Comme $1 \leq M \leq x^{1/3}$, on obtient bien la conclusion souhaitée. \square

7. SOMMES DE TYPE II

Proposition 3. *On a pour tout $f \in \mathcal{F}$, toutes suites de nombres complexes a_m et b_n avec $|a_m| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$, $x \geq 2$, $0 < \varepsilon \leq 1/2$, $x^\varepsilon \leq M$, $N \leq x$, $MN \leq x$,*

$$(49) \quad \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} a_m b_n e(f(mn) + \beta mn) \ll x^{1-\xi_{q,\varepsilon}(f)} \log x,$$

la constante implicite ne dépendant que de q , avec

$$(50) \quad \xi_{q,\varepsilon}(f) = \min\left(\frac{\varepsilon}{6}, \frac{1}{20}\right) \cdot \min\left(\left(\frac{1}{2} - \eta_q\right) \frac{\log 2}{\log q}, 2(1 - \gamma_q(f))\right).$$

Démonstration. Quitte à intervertir les rôles de m et n , on peut supposer que $M \leq N$. Comme les constantes implicites sont autorisées à dépendre de q , la majoration (49) est vraie lorsque $N \leq (16q)^2$. Nous supposons donc dans la suite que $N > (16q)^2$. Nous posons

$$S := \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} a_m b_n e(f(mn) + \beta mn) \quad (|a_m|, |b_n| \leq 1, M \leq N).$$

Notons tout d'abord que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$S^2 \ll M \sum_{M < m \leq 2M} \left| \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} b_n e(f(mn) + \beta mn) \right|^2.$$

Rappelons l'inégalité de van der Corput (cf. par exemple lemme 4 de [29]) : pour tous nombres complexes z_1, \dots, z_N et $R' \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(51) \quad \left| \sum_{1 \leq j \leq N} z_j \right|^2 \leq \frac{N + R' - 1}{R'} \left\{ \sum_{1 \leq j \leq N} |z_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq r < R'} \left(1 - \frac{r}{R'}\right) \sum_{1 \leq j \leq N-r} \Re(z_{j+r} \bar{z}_j) \right\}$$

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z .

Considérons R un nombre réel tel que

$$(52) \quad 4 \leq R \leq 4N^{1/4},$$

et que nous fixerons ultérieurement. L'inégalité (51) appliquée aux nombres complexes

$$z_j = b_{N+j} e(f(m(N+j)) + \beta m(N+j)) \mathbf{1}_{m(N+j) \leq x},$$

de modules inférieur à 1, et à $R' = \lceil R \rceil$ (le plus petit entier $\geq R$) fournit la majoration

$$(53) \quad \left| \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} b_n e(f(mn) + \beta mn) \right|^2 \\ \leq \frac{N + R' - 1}{R'} \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} 1 \\ + 2 \frac{N + R' - 1}{R'} \sum_{1 \leq r < R'} \left(1 - \frac{r}{R'}\right) \\ \sum_{\substack{N < n \leq 2N-r \\ m(n+r) \leq x}} \Re(b_{n+r} \bar{b}_n e(f(m(n+r)) - f(mn) + \beta mr)).$$

En sommant sur m l'inégalité (53), puis en intervertissant les sommations, et enfin en observant que $\frac{N+R'-1}{R'} \leq \frac{N+R}{R}$, $R \leq N$ et que la condition $r < R' = \lceil R \rceil$ équivaut à la condition $r < R$ pour r entier, nous obtenons la majoration

$$(54) \quad S^2 \ll \frac{N^2 M^2}{R} + MN \max_{1 \leq r < R} \sum_{N < n \leq 2N} \left| \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e(f(m(n+r)) - f(mn) + mr\beta) \right|.$$

Le paramètre R ayant vocation à être choisi relativement petit par rapport à M et N , la quantité mr est petite devant mn et l'addition de mr ne va donc pas changer les chiffres de mn de poids supérieurs à un certain paramètre λ , sauf dans certains cas relativement rares. De sorte que l'on peut espérer remplacer dans (54) la fonction f par la fonction

tronquée f_λ définie en (14) au prix d'une erreur dont la contribution à S^2 est $o((MN)^2)$. Cet argument a été développé et explicitement mis en forme dans le lemme 5 de [29] puis raffiné dans le lemme 3.4 de [14]. Nous procédons un peu différemment ici et évitons ainsi le recours à des résultats concernant la répartition en moyenne de la fonction τ . En prime, cela évite de conditionner l'évaluation finale (49) à la minoration $M \geq x^{27/82}$, comme cela aurait été le cas si nous avions procédé exactement comme dans [14].

Désormais nous désignons par λ l'unique nombre entier tel que $q^{\lambda-1} \leq MR^2 < q^\lambda$. Notons que cela entraîne que $q^\lambda \leq qMR^2 \leq 16qMN^{1/2} \leq MN$. Lorsque $k, b \in \mathbb{N}^*$ et $kq^\lambda \leq b < (k+1)q^\lambda$, on a

$$|b|_j = |k|_j + |b|_{\lambda, j} \quad (0 \leq j < q).$$

Par conséquent, sous la condition $kq^\lambda \leq mn < m(n+r) < (k+1)q^\lambda$, ce qui revient à dire que les chiffres de mn et $m(n+r)$ de poids supérieur à λ sont les mêmes, nous avons

$$f(m(n+r)) - f(mn) = f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn).$$

Notons $E(M, N, r, \lambda)$ le nombre des couples (m, n) avec $M < m \leq 2M$, $N < n \leq 2N$ pour lesquels il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(55) \quad mn < kq^\lambda \leq m(n+r).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{N < n \leq 2N} \left| \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e\left(f(m(n+r)) - f(mn) + mr\beta\right) \right| \\ &= \sum_{N < n \leq 2N} \left| \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e\left(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\right) \right| \\ & \quad + O\left(E(M, N, r, \lambda)\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} E(M, N, r, \lambda) &\leq \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{mN/q^\lambda < k \leq (2mN+mr)/q^\lambda} \sum_{0 < \ell \leq mr} \mathbb{1}_{kq^\lambda - \ell \equiv 0 \pmod{m}} \\ &\leq \sum_{M < m \leq 2M} \sum_{mN/q^\lambda < k \leq (2mN+mr)/q^\lambda} \left(\frac{mr}{m} + 1\right) \\ &\ll \frac{M^2 NR}{q^\lambda} \ll \frac{MN}{R}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(56) \quad S^2 \ll \frac{N^2 M^2}{R} + MN \max_{1 \leq r \leq R} S_2(r, M, N, \lambda),$$

avec

$$S_2(r, M, N, \lambda) := \sum_{N < n \leq 2N} \left| \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e\left(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\right) \right|.$$

Rappelant la définition de F_λ en (16), nous avons d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète,

$$e(f_\lambda(n)) = \sum_{0 \leq h < q^\lambda} F_\lambda(h) e(nh/q^\lambda).$$

Nous en déduisons l'identité

$$(57) \quad \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e\left(f_\lambda(m(n+r)) - f_\lambda(mn) + mr\beta\right) \\ = \sum_{0 \leq h, k < q^\lambda} F_\lambda(h) \overline{F_\lambda(-k)} \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ m(n+r) \leq x}} e\left(\frac{m((h+k)n + hr)}{q^\lambda} + mr\beta\right).$$

En insérant (57) dans (7) puis en effectuant la somme géométrique sur m nous obtenons

$$S_2 \leq \sum_{0 \leq h, k < q^\lambda} |F_\lambda(h)| |F_\lambda(-k)| \sum_{N < n \leq 2N} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{(h+k)n + hr + r\beta q^\lambda}{q^\lambda}\right|}\right).$$

Nous employons alors le lemme suivant qui découle directement du lemme 6 de [29].

Lemme 13. *Soient $a, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \geq 1$ et $d = \text{pgcd}(a, m)$. Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $M > 0$, on a*

$$\sum_{0 \leq n \leq m-1} \min\left(M, \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{an+b}{m}\right|}\right) \ll d \min\left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{m} \left\|\frac{b}{d}\right\|}\right) + m \log m.$$

Nous découpons ainsi l'intervalle $]N; 2N]$ en un nombre $\ll 1 + N/q^\lambda$ d'intervalles de longueur q^λ , et nous organisons les sommes en h et k suivant les valeurs de $\text{pgcd}(h+k, q^\lambda)$ de sorte que

$$S_2 \ll \left(1 + \frac{N}{q^\lambda}\right) (S_3^{(1)} + S_3^{(2)})$$

avec

$$S_3^{(1)} := \sum_{d|q^\lambda} d \sum_{\substack{0 \leq h, k < q^\lambda \\ \text{pgcd}(h+k, q^\lambda) = d}} |F_\lambda(h)| |F_\lambda(-k)| \min\left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda} \left\|\frac{hr + q^\lambda \beta r}{d}\right\|}\right)$$

et

$$S_3^{(2)} := q^\lambda \log q^\lambda \sum_{0 \leq h, k < q^\lambda} |F_\lambda(h)| |F_\lambda(-k)|.$$

Pour estimer $S_3^{(2)}$, nous employons l'inégalité (33) :

$$(58) \quad S_3^{(2)} \ll (\log N) q^\lambda \left(\sum_{0 \leq h < q^\lambda} |F_\lambda(h)|\right)^2 \ll (\log x) q^{(1+2\eta_q)\lambda}.$$

Pour estimer $S_3^{(1)}$, nous commençons par remplacer la condition $\text{pgcd}(h+k, q^\lambda) = d$ par la condition plus faible ($h \equiv a \pmod{d}$ et $k \equiv -a \pmod{d}$) avec a parcourant l'ensemble des classes résiduelles modulo d . Nous obtenons ainsi

$$S_3^{(1)} \leq \sum_{d|q^\lambda} d \sum_{0 \leq a < d} \min\left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda} \left\|\frac{ar + q^\lambda \beta r}{d}\right\|}\right) \left(\sum_{\substack{0 \leq h < q^\lambda \\ h \equiv a \pmod{d}}} |F_\lambda(h)|\right)^2.$$

Pour $d | q^\lambda$, on note $v_q(d)$ le plus grand entier m tel que $q^m | d$. En employant la Proposition 1 sous la forme

$$\sum_{\substack{0 \leq h < q^\lambda \\ h \equiv a \pmod{d}}} |F_\lambda(h)| \ll \left(\frac{q^\lambda}{d}\right)^{\eta_q} |F_{v_q(d)}(a)| \quad (d | q^\lambda),$$

il suit

$$S_3^{(1)} \ll q^{2\eta_q \lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{1-2\eta_q} \sum_{0 \leq a < d} |F_{v_q(d)}(a)|^2 \min \left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda} \left\| \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right\|} \right).$$

D'après l'inégalité (41), on a

$$S_3^{(1)} \ll q^{2\eta_q \lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{1-2\eta_q} q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)} \sum_{0 \leq a < d} \min \left(M, \frac{1}{\sin \pi \frac{d}{q^\lambda} \left\| \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right\|} \right).$$

La fonction sinus étant concave sur $[0, \pi]$, on a

$$\sin \left(\pi \frac{d}{q^\lambda} \left\| \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right\| \right) \geq \frac{d}{q^\lambda} \sin \left(\pi \left\| \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right\| \right) = \frac{d}{q^\lambda} \left| \sin \pi \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right|.$$

Ainsi

$$S_3^{(1)} \ll q^{(1+2\eta_q)\lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{-2\eta_q} q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)} \sum_{0 \leq a < d} \min \left(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right|} \right).$$

Nous pouvons alors employer une nouvelle fois le lemme 13 :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq a < d} \min \left(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right|} \right) \\ & \ll (r, d) \min \left(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\sin \pi \frac{\text{pgcd}(r,d)}{d} \left\| \frac{q^\lambda r \beta}{\text{pgcd}(r,d)} \right\|} \right) + d \log d. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de majorer trivialement le minimum par $\frac{dM}{q^\lambda}$ pour obtenir une majoration indépendante de β :

$$\sum_{0 \leq a < d} \min \left(\frac{dM}{q^\lambda}, \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{ar+q^\lambda \beta r}{d} \right|} \right) \ll \frac{rdM}{q^\lambda} + d \log d \ll d \log d,$$

la dernière inégalité résultant du fait que $r \leq R$ et $q^\lambda \asymp MR^2$. Ainsi nous avons

$$S_3^{(1)} \ll (\log N) q^{(1+2\eta_q)\lambda} \sum_{d|q^\lambda} d^{1-2\eta_q} q^{(-2+2\gamma_q(f))v_q(d)}.$$

Nous décomposons à présent d sous la forme $d = kq^\delta$ avec $0 \leq \delta \leq \lambda$, $q \nmid k$, et donc $v_q(d) = \delta$, ce qui entraîne

$$S_3^{(1)} \ll (\log x) q^{(1+2\eta_q)\lambda} \sum_{0 \leq \delta \leq \lambda} q^{\delta(-1+2\gamma_q(f)-2\eta_q)} \sum_{\substack{k|q^{\lambda-\delta} \\ q \nmid k}} k^{1-2\eta_q}.$$

Posons

$$(59) \quad 0 < w_q = \left(\frac{1}{2} - \eta_q \right) \frac{\log 2}{\log q} \leq \frac{1}{2} - \eta_q \leq \frac{1}{4}$$

(d'après (28)). Comme $\text{pgcd}(k, q)$ est un diviseur strict de q , il en résulte que $(k, q) \leq q/2$ et nous en déduisons $k = \text{pgcd}(k, q^{\lambda-\delta}) \leq (k, q)^{\lambda-\delta} \leq (q/2)^{\lambda-\delta}$. Nous avons donc, en

employant la majoration $\tau(n) \ll n^{\omega_q}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k|q^{\lambda-\delta} \\ q \nmid k}} k^{1-2\eta_q} &\leq \tau(q^{\lambda-\delta})(q/2)^{(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)} \\ &\ll q^{\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)-(1-2\eta_q)\frac{\log 2}{\log q}(\lambda-\delta)} \\ &= q^{-\omega_q(\lambda-\delta)+(1-2\eta_q)(\lambda-\delta)}, \end{aligned}$$

d'où

$$S_3^{(1)} \ll (\log x)q^{(2-\omega_q)\lambda} \sum_{0 \leq \delta \leq \lambda} q^{\delta(2\gamma_q(f)-2+\omega_q)} \ll (\log x)q^{(2-\omega_q)\lambda} (1 + q^{\lambda(2\gamma_q(f)-2+\omega_q)}).$$

Finalement,

$$(60) \quad S_3^{(1)} \ll (\log x)(q^{(2-\omega_q)\lambda} + q^{2\gamma_q(f)\lambda}).$$

Ainsi, en regroupant les estimations (58) et (60) nous obtenons

$$S_2 \ll (\log x) \left(1 + \frac{N}{q^\lambda}\right) (q^{(2-\omega_q)\lambda} + q^{2\gamma_q(f)\lambda} + q^{(1+2\eta_q)\lambda}).$$

Posons

$$\mu_q(f) = \min(\omega_q, 1 - 2\eta_q, 2(1 - \gamma_q(f))) = \min(\omega_q, 2(1 - \gamma_q(f))).$$

Remarquons que l'on a, d'après (59),

$$(61) \quad 0 < \mu_q(f) < \frac{1}{4}.$$

On a ainsi

$$S_2 \ll (\log x) \left(1 + \frac{N}{q^\lambda}\right) q^{(2-\mu_q(f))\lambda},$$

d'où, d'après (56),

$$S^2 \ll (\log x) \left(N^2 M^2 R^{-1} + NMq^{(2-\mu_q(f))\lambda} + N^2 Mq^{(1-\mu_q(f))\lambda}\right).$$

Comme $q^\lambda \asymp MR^2$, il suit

$$(62) \quad S^2 \ll (\log x)NM \left(NMR^{-1} + M^{2-\mu_q(f)}R^{4-2\mu_q(f)} + NM^{1-\mu_q(f)}R^{2-2\mu_q(f)}\right).$$

Il nous faut à présent déterminer R de manière optimale suivant les tailles respectives de M et N . Lorsque

$$(63) \quad M \leq N^{1-\frac{2\mu_q(f)}{3}},$$

nous posons $R = 4M^{\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}}$: cette égalité entraîne que les premier et troisième termes de la somme figurant au membre de gauche de (62) sont de même ordre de grandeur. On peut vérifier que pour ce choix, la condition (52) est bien satisfaite. En effet, on a

$$4 \leq 4M^{\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}} \leq 4N^{1/10} \leq 4N^{1/4}.$$

Nous obtenons alors

$$(64) \quad S^2 \ll (\log x)NM \left(NM^{1-\frac{\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}} + M^{2-\mu_q(f)+\frac{(4-2\mu_q(f))\mu_q(f)}{3-2\mu_q(f)}}\right).$$

La condition (63) est précisément équivalente au fait que le deuxième terme de la somme figurant dans (64) n'excède pas le premier. Par conséquent,

$$(65) \quad S^2 \ll (\log x)N^2 M^{2-2c_1} \quad (M \leq N^{1-\frac{2\mu_q(f)}{3}}),$$

avec

$$c_1 = c_1(q, f) = \frac{\mu_q(f)}{6 - 4\mu_q(f)}.$$

Lorsque

$$(66) \quad N^{1 - \frac{2\mu_q(f)}{3}} \leq M \leq N,$$

nous posons $R = 4N^{\frac{1}{5-2\mu_q(f)}} M^{-\frac{1-\mu_q(f)}{5-2\mu_q(f)}}$: là encore il est facile de constater que la condition (52) est remplie. Ce choix de R entraîne cette fois que les premier et deuxième termes de la somme figurant dans (62) sont de même ordre de grandeur. Sous la condition (66), les premier et troisième termes de la somme figurant dans (62) n'excèdent pas le deuxième. Ainsi

$$S^2 \ll (\log x) N^{2-2c_2} M^{2+2c_2-2c_3} \quad (N^{1 - \frac{2\mu_q(f)}{3}} \leq M \leq N),$$

avec

$$c_2 = c_2(q, f) = \frac{1}{10 - 4\mu_q(f)} \quad \text{et} \quad c_3 = c_3(q, f) = \frac{\mu_q(f)}{10 - 4\mu_q(f)}.$$

Notons bien que pour $j = 1, 2, 3$, nous avons $0 < c_j < 1$ et que par ailleurs, $c_3 < c_2$. Nous obtenons donc la majoration uniforme

$$(67) \quad S \ll \left(NM^{1-c_1} + N^{1-c_2} M^{1+c_2-c_3} \right) \log x.$$

Sous les conditions $M \leq N \leq x$, $MN \leq x$ et $M \geq x^\varepsilon$, qui entraînent d'ailleurs $M \leq \sqrt{x}$, on a donc,

$$\begin{aligned} S &\ll \left(xM^{-c_1} + (MN)^{1-c_2} M^{2c_2-c_3} \right) \log x \\ &\ll \left(xM^{-c_1} + x^{1-c_2} (\sqrt{x})^{2c_2-c_3} \right) \log x \\ &\ll \left(x^{1-\varepsilon c_1} + x^{1-c_3/2} \right) \log x \\ &\ll x^{1-c_4} \log x, \end{aligned}$$

avec $c_4 = \min(\varepsilon c_1, c_3/2)$. Or $c_1 \geq \frac{\mu_q(f)}{6}$ et $c_3 \geq \frac{\mu_q(f)}{10}$, ce qui implique la majoration

$$S \ll x^{1-c_5\mu_q(f)} \log x,$$

avec $c_5 = \min(\varepsilon/6, 1/20)$. Compte-tenu de la définition de $\mu_q(f)$, nous obtenons bien la conclusion souhaitée. \square

8. PREUVE DES THÉORÈMES 1 ET 2

Rappelons l'identité de Vaughan pour la fonction de von Mangoldt (cf proposition 13.4 de [23] par exemple) : pour $u \geq 1$ et $n \geq 1$, on a

$$(68) \quad \Lambda(n) = \Lambda(n) \mathbb{1}_{n \leq u}(n) + \sum_{\substack{mk=n \\ k \leq u}} \log(m) \mu(k) - \sum_{\substack{mkl=n \\ k, \ell \leq u}} \mu(k) \Lambda(\ell) + \sum_{\substack{mkl=n \\ k, \ell > u}} \mu(k) \Lambda(\ell).$$

Posons à présent $u = x^{3/10}$ de sorte que $u \leq x^{1/3}$. Nous déduisons de (68) la décomposition

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) = S_0 + S_1 - S_2 + S_3,$$

avec

$$S_0 = \sum_{n \leq u} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n),$$

$$S_1 = \sum_{\substack{m \leq u \\ mn \leq x}} \mu(m) \log(n) e(f(mn) + \beta mn),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{m_1 \leq u \\ m_2 \leq u \\ m_1 m_2 n \leq x}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) e(f(m_1 m_2 n) + \beta m_1 m_2 n),$$

et

$$S_3 = \sum_{\substack{u < m < x \\ u < n_1 < x \\ mn_1 n_2 \leq x}} \mu(m) \Lambda(n_1) e(f(mn_1 n_2) + \beta mn_1 n_2).$$

Nous avons classiquement

$$S_0 \ll u.$$

La somme S_1 peut être traitée comme une somme de type I.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m \leq u} \mu(m) \sum_{n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{m \leq u} \mu(m) \int_1^x \sum_{t < n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \frac{dt}{t}. \\ &\ll (\log x) \sum_{m \leq u} \max_{t \leq x/m} \left| \sum_{t < n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \right| \\ &\ll (\log x) \sum_{m \leq u} \max_{t \leq x/m} \left| \sum_{n < t} e(f(mn) + \beta mn) \right|. \end{aligned}$$

En découpant la sommation en m suivant des intervalles dyadiques, et en employant la Proposition 2, nous obtenons la majoration

$$S_1 \ll x^{1-\kappa_q(f)} (\log x)^3.$$

Pour traiter S_2 , nous posons $m = m_1 m_2$ de sorte que

$$S_2 = \sum_{m \leq u^2} \left(\sum_{\substack{m_1 m_2 = m \\ m_1 \leq u \\ m_2 \leq u}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) \right) \sum_{mn \leq x} e(f(mn) + \beta mn).$$

De la majoration

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 = m \\ m_1 \leq u \\ m_2 \leq u}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) \leq \sum_{m_2 | m} \Lambda(m_2) = \log m,$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} S_2 &\ll (\log u) \sum_{m \leq u^2} \left| \sum_{n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \right| \\ &\ll (S_I + S_{II} + u^3) \log x, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_I &= \sum_{m \leq u} \left| \sum_{n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \right| \\ S_{II} &= \sum_{u < m \leq u^2} \left| \sum_{u < n \leq x/m} e(f(mn) + \beta mn) \right|. \end{aligned}$$

Nous traitons S_I comme une somme de type I en découpant la sommation sur m suivant des intervalles dyadiques et en appliquant la Proposition 2 :

$$S_I \ll x^{1-\kappa_q(f)}(\log x)^2.$$

Nous traitons S_{II} comme une somme de type II : en découpant les sommations sur m et n suivant des intervalles dyadiques il vient

$$S_{II} \ll (\log x)^2 \sup \left| \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{N < n \leq 2N \\ mn \leq x}} b_n e(f(mn) + \beta mn) \right|$$

où le supremum est pris sous les contraintes $|a_m| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$ pour tous entiers m et n , $M \geq u$, $N \geq u$, $MN \leq x$. En appliquant la Proposition 3 avec $\varepsilon = 3/10$, nous avons donc

$$S_{II} \ll (\log x)^3 x^{1-\xi_{q,3/10}(f)}.$$

Ainsi

$$S_2 \ll (\log x)^3 \left(x^{1-\kappa_q(f)} + x^{1-\xi_{q,3/10}(f)} + x^{9/10} \right).$$

Traitons enfin la somme S_3 .

$$S_3 = (\log x) \sum_{u < m \leq x/u} \mu(m) \sum_{u < n \leq x/m} \left(\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{u < n_1 \leq x \\ n_1 n_2 = n}} \Lambda(n_1) \right) e(f(mn) + \beta mn)$$

Nous remarquons que

$$\sum_{\substack{u < n_1 \leq x \\ n_1 n_2 = n}} \Lambda(n_1) \leq \log n,$$

de sorte que l'on peut réécrire S_3 sous la forme

$$S_3 = (\log x) \sum_{u < m \leq x/u} a_m \sum_{u < n \leq x/m} b_n e(f(mn) + \beta mn)$$

avec $|a_m| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$ pour tous entiers m et n . En procédant comme pour S_{II} , nous obtenons donc

$$S_3 \ll (\log x)^4 x^{1-\xi_{q,3/10}(f)}.$$

Finalement, nous avons

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(f(n) + \beta n) \ll (\log x)^4 \left(x^{1-\kappa_q(f)} + x^{1-\xi_{q,3/10}(f)} + x^{1-9/10} \right) \ll (\log x)^4 x^{1-\tau_q(f)},$$

avec

$$\begin{aligned} \tau_q(f) &= \min \left(\kappa_q(f), \xi_{q,3/10}(f), \frac{1}{10} \right) \\ &= \min \left(\frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} - \eta_q \right) \frac{\log 2}{\log q}, \frac{1 - \gamma_q(f)}{10}, \frac{1 - \gamma_q(f)}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{6} \right) \\ &= \min \left(\frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} - \eta_q \right) \frac{\log 2}{\log q}, \frac{1 - \gamma_q(f)}{10} \right). \end{aligned}$$

D'après la majoration (43), on a pour tout $f \in \mathcal{F}$

$$\tau_q(f) \geq \min \left(\frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} - \eta_q \right) \frac{\log 2}{\log q}, \frac{8\sigma_q(f)}{5q^2(q-1)\log q} \right).$$

Comme $\sigma_q(f) \leq q(q-1)/8$, nous aboutissons à

$$\tau_q(f) \geq c_q \sigma_q(f),$$

avec

$$c_q = \frac{1}{q(q-1)} \min \left(\frac{2(\frac{1}{2} - \eta_q) \log 2}{5 \log q}, \frac{8}{5q \log q} \right) > 0$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème 2.

De la même manière, lorsque $f \in \mathcal{F}_0$, nous obtenons grâce à la majoration (44) et en tenant du compte du fait que $\|(q-1)\theta\|^2 \leq 1/4$,

$$\tau_q(f) \geq c_q \|(q-1)\theta\|^2$$

avec

$$c_q = \min \left(\frac{(\frac{1}{2} - \eta_q) \log 2}{5 \log q}, \frac{2}{5q(q + \sqrt{2} - 1)^2 \log q} \right) > 0,$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème 1.

Nous remercions Guy Barat pour ses remarques pertinentes concernant ce travail.

RÉFÉRENCES

- [1] J.-P. ALLOUCHE ET J. SHALLIT, *Automatic sequences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Theory, applications, generalizations.
- [2] N. L. BASSILY ET I. KÁTAI, Distribution of the values of q -additive functions on polynomial sequences, *Acta Math. Hungar.* **68**,4 (1995), 353–361.
- [3] R. BELLMAN ET H. N. SHAPIRO, On a problem in additive number theory, *Ann. of Math. (2)* **49** (1948), 333–340.
- [4] J. BOURGAIN, Moebius-Walsh correlation bounds and an estimate of Mauduit and Rivat, *Journal d'Analyse*, to appear.
- [5] J. BOURGAIN, On the Fourier-Walsh Spectrum on the Moebius Function, *Israel J. Math.*, to appear.
- [6] J. BOURGAIN, Prescribing the binary digits of primes, *Israel J. Math.*, to appear.
- [7] J. CASSAIGNE ET M. LE GONIDEC, Propriétés et limites de la reconnaissance d'ensembles d'entiers par automates dénombrables, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **22**,2 (2010), 307–338.
- [8] A. COBHAM, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), 164–192.
- [9] S. COL, Diviseurs des nombres ellipsépiques, *Period. Math. Hungar.* **58**,1 (2009), 1–23.
- [10] A. H. COPELAND ET P. ERDŐS, Note on normal numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 857–860.
- [11] C. DARTYGE ET G. TENENBAUM, Sommes des chiffres de multiples d'entiers, *Ann. Inst. Fourier* **55**,7 (2005), 2423–2474.
- [12] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory*, *Graduate Texts in Mathematics* vol. 74, Springer-Verlag, New York, éd. third, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.
- [13] M. DRMOTA ET C. MAUDUIT, Weyl sums over integers with affine digit restrictions, *J. Number Theory* **130**,11 (2010), 2404–2427.
- [14] M. DRMOTA, C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Primes with an Average Sum of Digits, *Compositio* **145**,2 (2009), 271–292.
- [15] S. EILENBERG, *Automata, languages, and machines. Vol. A*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.
- [16] E. FOUVRY ET C. MAUDUIT, Méthodes de crible et fonctions sommes des chiffres, *Acta Arithmetica* **77**,4 (1996), 339–351.
- [17] E. FOUVRY ET C. MAUDUIT, Sommes des chiffres et nombres presque premiers, *Mathematische Annalen* **305** (1996), 571–599.
- [18] A. O. GELFOND, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arith.* **13** (1967/1968), 259–265.
- [19] B. GREEN, On (not) computing the Mobius function using bounded depth circuits, *Combinatorics, Probability and Computing* **21**,6 (2012), 942–951.
- [20] G. HARMAN, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **125**,2 (2006), 179–185.
- [21] G. HARMAN ET I. KÁTAI, Primes with preassigned digits. II, *Acta Arith.* **133**,2 (2008), 171–184.

- [22] J. HARTMANIS ET H. SHANK, On the recognition of primes by automata, *J. Assoc. Comput. Mach.* **15** (1968), 382–389.
- [23] H. IWANIEC ET E. KOWALSKI, *Analytic number theory, American Mathematical Society Colloquium Publications* vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [24] I. KÁTAI, Distribution of digits of primes in q -ary canonical form, *Acta Math. Hungar.* **47**,3-4 (1986), 341–359.
- [25] G. LEJEUNE DIRICHLET, *Mathematische Werke. Bände I, II, Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker*, Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1969.
- [26] C. MAUDUIT, Propriétés arithmétiques des substitutions, in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1989–90*, pp. 177–190, *Progr. Math.* vol. 102, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.
- [27] C. MAUDUIT, Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis, *Ann. Inst. Fourier* **56**,7 (2006), 2525–2549.
- [28] C. MAUDUIT ET J. RIVAT, La somme des chiffres des carrés, *Acta Mathematica* **203** (2009), 107–148.
- [29] C. MAUDUIT ET J. RIVAT, Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers, *Annals of Mathematics* **171**,3 (2010), 1591–1646.
- [30] M. MINSKY ET S. PAPERT, Unrecognizable sets of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach.* **13** (1966), 281–286.
- [31] P. SARNAK, Mobius randomness and dynamics, <http://www.math.princeton.edu/sarnak/>, 2010.
- [32] M.-P. SCHÜTZENBERGER, A remark on acceptable sets of numbers, *J. Assoc. Comput. Mach.* **15** (1968), 300–303.
- [33] W. SIERPIŃSKI, Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés, *Acta Arith.* **5** (1959), 265–266.
- [34] D. WOLKE, Primes with preassigned digits, *Acta Arith.* **119**,2 (2005), 201–209.

Adresse électronique:

`martin@lmpa.univ-littoral.fr`, `mauduit@iml.univ-mrs.fr`, `rivat@iml.univ-mrs.fr`

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES JOSEPH LIOUVILLE, CENTRE UNIVERSITAIRE DE LA MI-VOIX, MAISON DE LA RECHERCHE BLAISE PASCAL, 50 RUE F.BUISSON B.P. 699, 62228 CALAIS CEDEX.

UNIVERSITÉ D’AIX-MARSEILLE, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE LUMINY, 163 AVENUE DE LUMINY, CASE 907, 13288 MARSEILLE CEDEX 9, FRANCE.