

Une Heyting semilattice est un ensemble partiellement ordonné qui est cartesian closed si on le regarde comme une catégorie. De façon équivalente, la variété HSLat des Heyting semilattices est donnée par la théorie algébrique générée par une constante 1 et deux opérations \wedge et \Rightarrow satisfaisant les équations

$$\begin{aligned} 1 \wedge x &= x, \quad x \wedge x = x, \quad x \wedge y = y \wedge x, \\ x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z, \quad x \Rightarrow x = 1, \\ x \wedge (x \Rightarrow y) &= x \wedge y, \quad y \wedge (x \Rightarrow y) = y, \\ x \Rightarrow (y \wedge z) &= (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z). \end{aligned}$$

En 2004, Johnstone montre que la variété HSLat est semi-abélienne en utilisant la caractérisation suivante :

Théorème : [Bourn, Janelidze, 2003]

Une variété est semi-abélienne si et seulement si la théorie correspondante contient une unique constante 0 et pour un certain $m \in \mathbb{N}$

- m opérations binaires $\alpha_i(x, y) = 0$ telles que $\alpha_i(x, x) = 0$,
 - une opération $(m+1)$ -aire Θ telle que
- $$\Theta(\alpha_1(x, y), \dots, \alpha_n(x, y), y) = x.$$

□

En effet, pour la variété HSLat la constante est 1 et les opérations sont

$$\alpha_1(x, y) = x \Rightarrow y, \quad \alpha_2(x, y) = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \Rightarrow x$$

$$\Theta(x, y, z) = (x \Rightarrow z) \wedge y.$$

Nous savons également que la catégorie HSLat est fortement protomodulaire (Rodelo) et arithmétique (Borceux-Bourn). En conséquence, elle satisfait la condition "Smith is Hug".

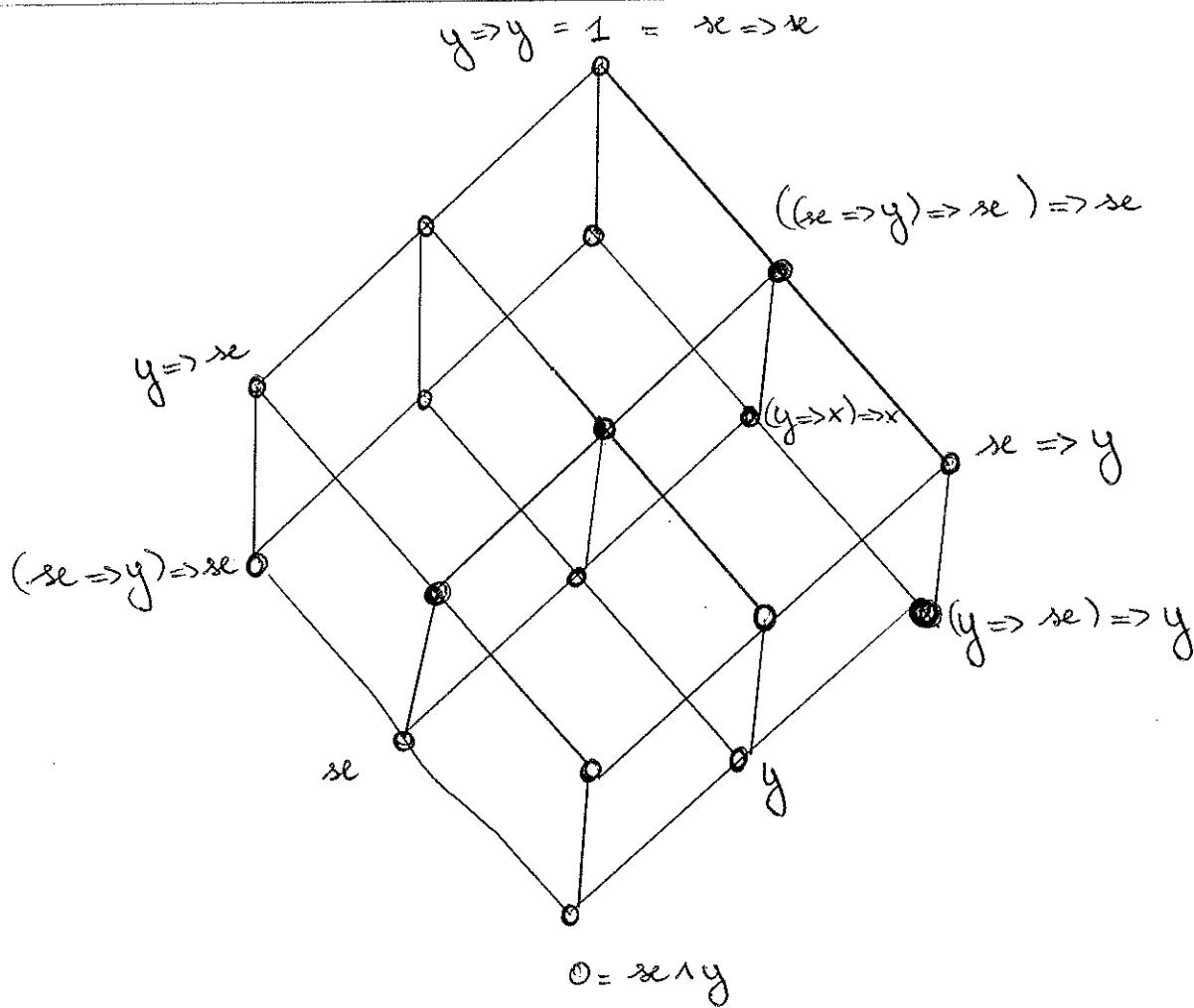
En collaboration avec X. Garcia-Martinez et T. Van der Linden, nous avons également prouvé que :

1. HSLat satisfait la condition (SSH), une version forte de "Smith is Hug".
2. HSLat ne satisfait pas la condition (W), une version forte de (SSH).
3. HSLat n'est pas une catégorie algébriquement cohérente.
4. Toute catégorie arithmétique satisfait la condition "Normalité de Higgins".

Après ce travail, plusieurs questions restent ouvertes :

- (i) Poumons-nous séparer les conditions "Smith is Hug" et (SSH)? Ou prouver leur équivalence?
- (ii) Existe-t-il une sous-variété non-triviale de HSLat qui serait algébriquement cohérente?
- (iii) Existe-t-il une variété semi-abélienne qui satisfait la caractérisation de Bourn-Janelidze pour un certain $m \geq 3$?
- (iv) Les épimorphismes sont-ils des surjections dans la catégorie HSLat?

Quelques faits intrigants



- Ci-dessus, la Heyting semilattice libre générée par deux éléments x et y . Elle a 18 éléments dont quelques-uns sont notés.
 - La Heyting semilattice libre générée par trois éléments comporte 623 662 965 552 330 éléments. (Londolt-Whaley 1976)
 - Deux Heyting semilattices X et Y Hdg-commutent si et seulement si $\forall x \in X$ et $\forall y \in Y$
- $$\left\{ \begin{array}{l} x \Rightarrow y = y \\ y \Rightarrow x = x \end{array} \right.$$
- De là, on voit aisément qu'il n'y a pas d'objet abélien non-trivial dans HSlat.
- Soit une extension scindée dans HSlat
- $$X \xrightarrow{h} A \xrightleftharpoons[]{P} B$$
- Tout élément $a \in A$ s'écrit $a = (se_1 \Rightarrow s(b)) \wedge se_2$ avec $se_1, se_2 \in X, b \in B$.