DUT TC 2 **ULCO - Dunkerque**

Probabilités et Statistiques Inférentielles Novembre 2016 - IE 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Tous documents autorisés

Exercice 1 *Correction* : 7pts

1. 1,5pt Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'accidents recensés par jour ; les valeurs possibles de X sont entières (variable discrète) et varient de 0 à 5. À chacune de ces valeurs x_i, on associe sa probabilité de réalisation $p_i = \frac{x_i}{200}$:

i	1	2	3	4	5	6
Nombre x_i d'accidents	0	1	2	3	4	5
Probabilité p_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005

Le nombre moyen d'accidents par jours correspond à l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{0 \times 86 + 1 \times 82 + 2 \times 22 + 3 \times 7 + 4 \times 2 + 5 \times 1}{200} = \frac{4}{5}.$$

On peut donc affirmer qu'il y a 4 accidents en moyenne tous les 5 jours.

2. 1,5pt La loi de Poisson est la loi des "anomalies" indépendantes et de faible probabilité. On peut l'appliquer ici à priori directement, faute d'autres informations sur la survenue des accidents. Afin de mieux s'en convaincre, en notant que les accidents sont considérés comme des événements indépendants, on peut interpréter X comme une variable binomiale de paramètre $n = 200$ (nombre d'épreuves), de moyenne $np = 0,8$. Par suite, $p = 0,004$. On est tout à fait dans le champ d'approximation de la loi de Poisson :

$$n = 200 > 50,\ p = 0,004 \leq 0,1 \text{ et } np = 0,8 \leq 10.$$

Le paramètre de cette loi sera $\lambda = np = 0,8$ et

$$P(X = k) = e^{-0,8} \frac{(0,8)^k}{k!}.$$

2pts Donnons le tableau comparatif :

i	1	2	3	4	5	6
Nombre x_i d'accidents	0	1	2	3	4	5
Probabilité p_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005
p_i théorique selon loi de Poisson	0,449	0,359	0,114	0,038	0,008	0,001
p_i théorique selon loi binomiale	0,448	0,360	0,114	0,038	0,0075	0,001

La dernière ligne indique les probabilités obtenues par la loi binomiale, très peu pratique ici eu égard au grand nombre d'observations (manipulation de combinaisons et puissances) :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Par exemple,

$$P(X = 2) = C_{200}^2 (0,004)^2 (0,996)^{200-2} \simeq \frac{200 \times 199}{2} \times 0,000016 \times 0,452219 \simeq 0,144.$$

3. $\boxed{\text{1pt}}$ La probabilité de voir survenir moins de 3 accidents est théoriquement égale à

$$P(X < 3) = 0,449 + 0,359 + 0,144 = 0,952.$$

Le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents est donc $0,952 \times 200 = 190,4$.
$\boxed{\text{1pt}}$ Le nombre fourni par la réalité (statistique) est :

$$86 + 82 + 22 = 190.$$

On remarque un bon ajustement par la loi de Poisson. Le cas $k = 5$ est moins convaincant mais il est marginal.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On complète le tableau de l'énoncé de la manière suivante :

Longueur L (cm)	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[24; 24,5[$	24,25	5	121,25	2940,3125
$[24,5; 25[$	24,75	13	321,75	7963,3125
$[25; 25,5[$	25,25	24	606	15301,5
$[25,5; 26[$	25,75	8	206	5304,5
Total	–	50	1255	31509,375

On obtient donc

$$\overline{L} = \frac{1255}{50} = 25,1 \text{ et } \sigma = \left(\frac{31509,375}{50} - (25,1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,4 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par défaut.}$$

2. *Remarque* : contrairement à ce qui a été dit lors de l'examen, il fallait lire $\sigma = 0,4$ et non $\sigma = 10,4$. La correction ci-dessous donne les résutats dans ce cas.
   (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $P(L < 25,6) = P(T < 1,25) = 0,8944$.
   (b) $\boxed{\text{1pt}}$ $P(24,6 < L < 25,4) = P(-1,25 < T < 0,75) = P(T < 0,75) - (1 - P(T < 1,25)) = 0,7734 - (1 - 0,8944) = 0,6678$.
   (c) $\boxed{\text{1pt}}$ Étant donné que $\overline{L} - \sigma = 25,1 - 0,4 = 24,7$ et $\overline{L} + \sigma = 25,1 + 0,4 = 25,5$, on obtient :

$$P(\overline{L}-\sigma < L < \overline{L}+\sigma) = P(24,7 < L < 25,5) = P(-1 < T < 1) = 2P(T < 1)-1 = 2\times 0,8413-1 = 0,6826.$$

   (d) $\boxed{\text{1pt}}$ Étant donné que $\overline{L} - 2\sigma = 25,1 - 2 \times 0,4 = 24,3$ et $\overline{L} + 2\sigma = 25,1 + 2 \times 0,4 = 25,9$, on obtient :

$$P(\overline{L}-2\sigma < L < \overline{L}+2\sigma) = P(24,3 < L < 25,9) = P(-2 < T < 2) = 2P(T < 2)-1 = 2\times 0,9772-1 = 0,9544.$$

   (e) $\boxed{\text{1pt}}$ Étant donné que $\overline{L} - 3\sigma = 25,1 - 3 \times 0,4 = 23,9$ et $\overline{L} + 2\sigma = 25,1 + 3 \times 0,4 = 26,3$, on obtient :

$$P(\overline{L}-3\sigma < L < \overline{L}+3\sigma) = P(23,9 < L < 26,3) = P(-3 < T < 3) = 2P(T < 3)-1 = 2\times 0,9987-1 = 0,9974.$$

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{7pts}}$

1. On a $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(13, 2)$. On pose $T = \dfrac{X - 13}{2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(X = 14) = 0$.
   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(X \leq 15) = p(T \leq 1) = 0,8413$.
   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(10 \leq X \leq 14) = p(-1,5 \leq T \leq 0,5) = \pi(0,5) - \pi(-1,5) = \pi(0,5) - (1 - \pi(1,5)) = 0,6915 - (1 - 0,9332) = 0,6247$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ On cherche a tel que

$$P(13-a \leq X \leq 13+a) = 0,9 \Leftrightarrow p\left(-\frac{a}{2} \leq T \leq \frac{a}{2}\right) = 0,9 \Leftrightarrow 2\pi_T\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 0,9 \Leftrightarrow \pi_T\left(\frac{a}{2}\right) = 0,95.$$

À l'aide de la table on trouve $\frac{a}{2} = 1,645$. L'intervalle centré en 13 litres recherché est donc égal à

$$[13 - 1,645; 13 + 1,645] = [11,355; 14,645].$$

3. On suppose que X_1 et X_2 suivent la même loi normale $\mathcal{N}(13; 2)$.
   (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ X_1 et X_2 étant indépendantes, on a d'après le cours

   $$Y = X_1 - X_2 \rightsquigarrow \mathcal{N}(13 - 13; \sqrt{2^2 + 2^2}) = \mathcal{N}(0; 2\sqrt{2}).$$

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On souhaite calculer $p(X_1 - X_2 = 1) = p(Y = 1)$. Or on sait que si X est une variable continue, $p(X = a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Donc, $p(Y = 1) = 0$.
   Remarque : si la question posée était :"Quelle est la probabilité pour que ces consommations diffèrent au plus (ou au moins) d'un litre ?", nous aurions calculé $p(Y \leq 1)$ (ou $p(Y \geq 1)$).
4. $X_1, X_2 \ldots, X_{20}$ suivent la même loi normale $\mathcal{N}(13; 2)$.
   (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $X_1, X_2 \ldots, X_{20}$ étant indépendantes, on a d'après le cours

   $$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\underbrace{13 + 13 + \ldots + 13}_{20 \text{ fois}}; \sqrt{\underbrace{2^2 + 2^2 + \ldots + 2^2}_{20 \text{ fois}}}\right) = \mathcal{N}(260; 4\sqrt{5}).$$

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(S \leq 280) = p\left(\frac{S - 260}{4\sqrt{5}} \leq \frac{280 - 260}{4\sqrt{5}}\right) = p(S' \leq \sqrt{5}) \simeq p(S' \leq 2,24) = 0,9875$ d'après la table.
   (c) $\boxed{\text{1pt}}$ $E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20}E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}) = \frac{1}{20}E(S) = \frac{260}{20} = 13.$
   $V(\overline{X}) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20^2}V(X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}) = \frac{1}{20^2}V(S) = \frac{(4\sqrt{5})^2}{400} = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$
   donc $\sigma(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   On sait d'après le cours que $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(E(\overline{X}), \sigma(\overline{X})) = \mathcal{N}(13, \frac{1}{\sqrt{5}})$ donc

   $$P(12,8 \leq \overline{X} \leq 13,2) = P\left(\frac{12,8 - 13}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \leq \overline{X}' \leq \frac{13,2 - 13}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \overline{X}' \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

   $$= 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 1 \simeq 2\pi(0,45) - 1 = 2 \times 0,6736 - 1 = 0,3472.$$

5. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a $R \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.
   - $P(R \leq 6500) = P\left(\frac{R - m}{\sigma} \leq \frac{6500 - m}{\sigma}\right) = 0,8413 \Leftrightarrow \frac{6500 - m}{\sigma} = 1 \Leftrightarrow m + \sigma = 6500.$
   - $P(R < 5000) = 0,0228 \Leftrightarrow P(R \geq 5000) = P\left(\frac{R - m}{\sigma} \geq \frac{5000 - m}{\sigma}\right) = 0,9772.$
     Or par symétrie, on a $P\left(\frac{R - m}{\sigma} \geq \frac{5000 - m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{R - m}{\sigma} \leq -\frac{5000 - m}{\sigma}\right)$ donc

     $$-\frac{5000 - m}{\sigma} = 2 \Leftrightarrow m - 2\sigma = 5000.$$

   On est donc amené à résoudre le système linéaire $\begin{cases} \sigma + m = 6500 \\ m - 2\sigma = 5000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6000 \\ \sigma = 500 \end{cases}$

   Finalement, $R \rightsquigarrow \mathcal{N}(6000; 500)$.