CORRECTION Exercices Chapitre 3 - Échantillonnage et estimation.

Exercice 18 <u>*Correction*</u> :

1. Ici on travaille sur un échantillon de taille 200 (la taille de la population étant considérée comme infinie).
   (a) La variable aléatoire $\overline{X}$ égale à la moyenne des poids maximaux sur tout échantillon de taille 200 suit la loi normale $\mathcal{N}(58, \frac{3}{\sqrt{200}}) = \mathcal{N}(58; 0,212)$. On cherche a tel que $P(58 - a \leq \overline{X} \leq 58 + a) = 0,99$. Après avoir posé $T = \frac{\overline{X} - 58}{0,212}$ et consulté la table de la loi normale centrée réduite, on obtient $a = 0,55$. Donc l'intervalle de confiance, sur l'échantillon de taille 200, de la moyenne des poids, est $[57,45; 58,55]$.
   (b) Le poids moyen constaté sur l'échantillon ci-dessus est conforme aux attentes (57, 7 kg appartient à l'intervalle).
2. On cherche $P(\overline{X} > b) = 0,97$ donc après calculs, on obtient $b = 57,6$: le poids moyen dépassé dans 97% des cas est 57, 6 kg.

Exercice 19 <u>*Correction*</u> : Ici il s'agit bien d'une induction puisque le résultat de l'enquête est connu. De plus, la taille de la population ($N = 1500$) n'étant pas plus de 10 fois supérieure à la taille de l'échantillon ($n = 200$), il faut utiliser le coefficient d'exhaustivité. Soit F la variable aléatoire égale à la la proportion de personnes de l'entreprise ayant au moins un crédit en cours sur tout échantillon de taille 200. Comme $n \geq 30$, F suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0,65; \sqrt{\frac{0,65 \times 0,35}{200}} \times \sqrt{\frac{1500 - 200}{1500 - 1}}) = \mathcal{N}(0,65; 0,0314)$. On considère F_1 et F_2 les variables aléatoires indépendantes de même loi que F, donnant la proportion de personnes ayant au moins un crédit en cours sur les échantillons 1 et 2 de 200 personnes. On sait par des propriétés classiques des variables aléatoires que $F_1 - F_2$ suit une loi normale telle que : $E(F_1 - F_2) = 0$ et $V(F_1 - F_2) = 2V(F) = 0,00197 = 0,044^2$. On cherche la probabilité $P(|F_1 - F_2| > 0,1)$. Or

$$\begin{aligned} P(-0,1 < F_1 - F_2 < 0,1) = P(-\frac{0,1}{0,044} < T < \frac{0,1}{0,044}) &= P(-2,27 < T < 2,27) = 2 \times P(T < 2,27) - 1 \\ &= 2 \times 0,9884 - 1 = 0,9768. \end{aligned}$$

Donc la probabilité que deux échantillons de 200 personnes chacun indiquent plus de 10 points d'écart entre les proportions de personnes ayant au moins un crédit en cours est 2, 32%.

Exercice 20 <u>*Correction*</u> :

1. On a le tableau suivant :

Durée (mn)	**Effectif** n_i	**Centre** x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[0; 10[$	3	5	15	75
$[10; 20[$	6	15	90	1350
$[20; 30[$	10	25	250	6250
$[30; 40[$	7	35	245	8575
$[40; 50[$	3	45	135	6075
$[50; 60[$	1	55	55	3025
Total	30	–	790	25350

   On en déduit $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i = \frac{790}{30} = 26,33$ et $V(x) = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{25350}{30} - (26,33)^2 = 151,73$ ce qui implique $\sigma_x = 12,32$.
2. Des estimations sans biais de m et σ (les moyenne et écart-type de la <u>population</u>) sont données par $\overline{x}$ et $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_x$. Donc l'estimation ponctuelle de la moyenne de la population est $\hat{m} = 26,33$ et l'estimation ponctuelle de l'écart-type de la population vaut $\hat{\sigma} = 12,53$.

3. La variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Or ici, σ est inconnu donc il faut utiliser la loi de Student. On pose $S = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$ qui suit la loi de Student à 29 degrés de liberté. On cherche ensuite la valeur du réel $\tau_{n-1,\alpha}$ tel que $p(-\tau_{n-1,\alpha} \leq S \leq +\tau_{n-1,\alpha}) = 0,95$ dans l'annexe B et on trouve $\tau_{n-1,\alpha} = \tau_{29;0,05} = 2,045$. On a ainsi
$$p(-2,045 \leq S \leq 2,045) = p(-2,045 \leq \frac{\overline{X} - m}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \leq 2,045) = p(2,045 \geq \frac{m - \overline{X}}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \geq -2,045) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow p(26,33 - 2,045 \times \frac{12,5}{\sqrt{30}} \leq m \leq 26,33 + 2,045 \times \frac{12,5}{\sqrt{30}}) = 0,95 \Leftrightarrow I = [21,66; 30,10].$$

Remarque : L'utilisation de la loi normale, néanmoins possible car $n \geq 30$, conduit à l'intervalle $[21,86; 30,80]$ puisqu'alors $Z_\alpha = 1,96$.

Exercice 21

1. La variable aléatoire F, égale à la proportion d'entreprises intéressées par le logiciel sur tout échantillon de taille 100, suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{0,68 \times 0,32}{100-1}}) = \mathcal{N}(p; 0,0469)$. On cherche la valeur du réel a tel que $P(F - a \leq p \leq F + a) = 0,99$. On pose $T = \frac{F - p}{0,0469}$ et T suit la loi normale centrée réduite. On a alors $P(-\frac{a}{0,0469} \leq T \leq \frac{a}{0,469}) = 0,99$. Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on obtient $a = 0,0469 \times 2,576 = 0,12$. Donc l'intervalle de confiance de la proportion p des entreprises intéressées par le logiciel, au seuil de risque 1%, est $[56\%, 80\%]$.

   Remarque : Ici l'échantillonnage est exhaustif mais le coefficient d'exhaustivité a été négligé car la taille de la population est grande par rapport à la taille de l'échantillon.
2. La variable aléatoire F, égale à la proportion d'entreprises intéressées par le logiciel sur tout échantillon de taille n, suit approximativement la loi $\mathcal{N}(p, \sigma^\star)$ où $\sigma^\star = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Comme précédemment, on cherche a tel que $P(-\frac{a}{\sigma^\star} \leq T \leq \frac{a}{\sigma^\star}) = 0,99$. Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on obtient $\frac{a}{\sigma^\star} = 2,575 \Leftrightarrow a = 2,575\sigma^\star$. Or $\sigma^\star = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ où p est inconnue. On démontre aisément que ma grandeur $p(1-p)$ est maximale pour $p = \frac{1}{2}$ donc, quelle que soit la valeur de p, $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$. Donc, $\sigma^\star \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et donc $2,575\sigma^\star \leq \frac{2,575}{2\sqrt{n}}$. Il suffit alors de choisir n tel que $\frac{2,575}{2\sqrt{n}} \leq 0,1$ donc $\sqrt{n} \geq \frac{2,575}{0,2}$ donc $n \geq 165,77$. En conclusion, si on prend $n = 166$, on est sûr que l'amplitude de l'intervalle de confiance sera inférieure ou égale à 0,2. Cette valeur ne dépend pas de l'échantillon choisi.

Exercice 22 *Correction* :

1. Le tirage des boulons se fait sans remise car une fois testés (jusqu'à la rupture) les boulons sont hors d'usage ! Dans l'optique où on s'intéresse ensuite à l'estimateur $\overline{X}$, le tirage sans remise implique un facteur d'exhaustivité $\rho = \frac{N-n}{N-1}$. En effet, $E(\overline{X}) = m$ et $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$. Or, il est précisé dans l'énoncé que la population des boulons fabriqués est de très grand effectif donc N est très grand et $N >> n$. Par conséquent $\frac{N-n}{N-1} \simeq \frac{N}{N} = 1$ et $V(\overline{X}) \simeq \frac{\sigma^2}{n}$. Cela permet d'affirmer que le tirage peut être considéré comme avec remise.
2. Une estimation sans biais de la moyenne est donnée par $\overline{x}_e$ puisque'on sait que $E(\overline{X}_e) = m$. Donc une estimation ponctuelle de la moyenne est donnée égale à 225.
   En supposant que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m; \sigma)$, on a $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Donc si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(225; 34,5)$, on a $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(225; 12,198)$.
   σ est connu donc on peut utiliser la table de la loi normale centrée réduite (et non celle de la loi de Student).
   On pose $Z = \frac{\overline{X} - m}{12,198}$ et on cherche dans la table de l'annexe A la borne Z_α telle que
   (a) $p(-Z_\alpha \leq Z \leq Z_\alpha) = 0,95 \Leftrightarrow \Pi(Z_\alpha) \leq 0,975 \Leftrightarrow Z_\alpha = 1,96$. En considérant la réalisation de $\overline{X}$, à savoir $\overline{x}_e = 225$, on a

$$p(-1,96 \leq \frac{225-m}{12,198} \leq 1,96) = 0,95 \Leftrightarrow p(1,96 \geq \frac{m-225}{12,198} \geq -1,96) = 0,95$$
$$\Leftrightarrow p(225 - 1,96 \times 12,198 \leq m \leq 225 + 1,96 \times 12,198) = 0,95 \Leftrightarrow I = [201,09; 248,91].$$

(b) $p(-Z_\alpha \leq Z \leq Z_\alpha) = 0,99 \Leftrightarrow \Pi(Z_\alpha) \leq 0,995 \Leftrightarrow Z_\alpha = 2,58$. Ainsi,
$$p(-2,58 \leq \frac{225-m}{12,198} \leq 2,58) = 0,99 \Leftrightarrow p(2,58 \geq \frac{m-225}{12,198} \geq -2,58) = 0,99$$
$$\Leftrightarrow p(225 - 2,58 \times 12,198 \leq m \leq 225 + 2,58 \times 12,198) = 0,99 \Leftrightarrow I = [193,53; 256,47].$$

Exercice 23 *Correction* :

1. X vérifie $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000}$ avec
$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'appareil est défectueux} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
et

x_j	0	1	Total
$p(X_i = x_j)$	1-p	p	1

, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$

Donc $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = \frac{60}{1000} = 0,06$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Comme les X_i sont indépendantes deux à deux, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1000; 0,06)$.
Vérifions les conditions de normalité : $n = 1000 \geq 30$, $np = 1000 \times 0,06 = 60 \geq 5$ et $n(1-p) = 1000(1-0,06) = 940 \geq 5$. On sait dans ce cas que $\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ et par conséquent, $\mathcal{B}(1000; 0,06) \simeq \mathcal{N}(60; 7,51)$.

2. On pose $F = \frac{X}{n}$. Or, on sait que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ alors $F = \frac{X}{n} \rightsquigarrow \mathcal{N}(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$. Dans notre cas, on peut affirmer que $F \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,06; 0,0075)$. Ainsi, $Z = \frac{F - 0,06}{0,0075} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. On cherche ensuite Z_α tel que
$$p(-Z_\alpha \leq Z \leq Z_\alpha) = 1 - 0,05 = 0,95 \Leftrightarrow p(Z \leq Z_\alpha) = 0,975 \Leftrightarrow Z_\alpha = 1,96.$$
Par conséquent,
$$p(-1,96 \leq \frac{F-0,06}{0,0075} \leq 1,96) = p(0,06 - 1,96 \times 0,0075 \leq F \leq 0,06 + 1,96 \times 0,0075) = 0,95.$$
On en déduit l'intervalle recherché à savoir $I = [0,0453; 0,0747] = [4,53\%; 7,47\%]$.

Exercice 24 *Correction* :

1. On trouve $m = 8,67$ et $\sigma = 3,35$ en appliquant les formules classiques.
2. On a le tableau suivant :

Éch. i	$\overline{x}_i$	p_i	$p_i\overline{x}_i$	$p_i\overline{x}_i^2$	**Éch.** i	$\overline{x}_i$	p_i	$p_i\overline{x}_i$	$p_i\overline{x}_i^2$	**Éch.** i	$\overline{x}_i$	p_i	$p_i\overline{x}_i$	$p_i\overline{x}_i^2$
$(4,5)$	$4,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4,5}{15}$	$\frac{20,25}{15}$	$(5,8)$	$6,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6,5}{15}$	$\frac{42,25}{15}$	$(8,12)$	10	$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{100}{15}$
$(4,8)$	6	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{36}{15}$	$(5,10)$	$7,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7,5}{15}$	$\frac{56,25}{15}$	$(8,13)$	$10,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{10,5}{15}$	$\frac{110,25}{15}$
$(4,10)$	7	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{49}{15}$	$(5,12)$	$8,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8,5}{15}$	$\frac{72,25}{15}$	$(10,12)$	11	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{121}{15}$
$(4,12)$	8	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{15}$	$(5,13)$	9	$\frac{1}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{81}{15}$	$(10,13)$	$11,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11,5}{15}$	$\frac{132,25}{15}$
$(4,13)$	$8,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8,5}{15}$	$\frac{72,25}{15}$	$(8,10)$	9	$\frac{1}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{81}{15}$	$(12,13)$	$12,5$	$\frac{1}{15}$	$\frac{12,5}{15}$	$\frac{156,25}{15}$
										Total	130	1	$\frac{130}{15}$	$\frac{1194}{15}$

3. On a fait figurer dans le tableau précédent la distribution d'échantillonnage des moyennes ainsi que la loi de probabilité de la variable aléatoire $\overline{X}$ égale à la moyenne des éléments sur tout échantillon exhaustif de taille 2.
Par conséquent, $E(\overline{X}) = \sum_i p_i\overline{x}_i = \frac{130}{15} = 8,67 = m$. On retrouve bien le fait que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de m.
Ensuite, $V(\overline{X}) = \sum_i p_i\overline{x}_i^2 - E(\overline{X})^2 = 4,49 \Rightarrow \sigma(\overline{X}) = 2,12$. On sait que dans le cas d'un tirage exhaustif,

$\sigma^2(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}\dfrac{N-n}{N-1}$ ce qui est bien vérifié dans notre cas puisque $\sigma^2(\overline{X}) = 4,49$ est approximativement égal à $\dfrac{(3,35)^2}{2}\dfrac{6-2}{6-1}$.

Exercice 25 *Correction* :

1. La valeur de la moyenne dans la population est $\overline{y}_U = \dfrac{3+1+0+1+5}{5} = 2$ et la médiane est $\text{med}_U(Y) = 1$. Les échantillons possibles de taille 3 sont les 10 échantillons suivants :

1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5
4	1	2	4
5	1	2	5
6	1	3	4
7	1	3	5
8	1	4	5
9	2	4	5
10	2	3	5

   Puisque les échantillons sont équiprobables, la probabilité de chaque échantillon S est $p(S) = 1/10$.

2. On calcule la moyenne et la médiane de chaque échantillon $i = 1, \ldots, 10$, qui estiment respectivement la moyenne et la médiane de la population et on obtient les résultats suivants :

S	$\overline{y}_S$	$\text{med}_S(Y)$
1	1,33	1
2	0,67	1
3	2	1
4	1,67	1
5	3	3
6	1,33	1
7	2,67	3
8	3	3
9	2,33	1
10	2	1

   Si on calcule la moyenne arithmétique des $\overline{y}_S$, on obtient : $E(\overline{y}_S) = (1,33+0,67+2+1,67+3+1,33+2,67+3+2,33+2)/10 = 20/10 = 2 = \overline{y}_U$ donc l'estimateur est sans biais.

   Si on calcule la moyenne arithmétique des $\text{med}_S(Y)$, on obtient : $E(\text{med}_S(Y)) = (1+1+1+1+3+1+3+3+1+1)/10 = 16/10 = 1,6 \neq \text{med}_U(Y)$ et donc l'estimateur est biaisé.

3. Pour chaque échantillon, on calcule S^2_{YS}. Par exemple, pour le premier échantillon $\{1,2,3\}$, on a : $S^2_{Y1} = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}(3^2+1^2+0^2) - 1,33^2\right)$. Les résultats sont récapitulés dans le tableau suivant :

S	S^2_{YS}
1	2,33
2	0,33
3	7
4	1,33
5	4
6	2,33
7	6,33
8	4
9	5,33
10	7

   Si on calcule la moyenne arithmétique des S^2_{YS}, on obtient : $E(S^2_{YS}) = (2,33+0,33+7+1,33+4+2,33+6,33+4+5,33+7)/10 = 40/10 = 4$. Or,
   $S^2_{YU} = \dfrac{5}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}(3^2+1^2+0^2+1^2+5^2) - 2^2\right) = 4$ et par conséquent, l'estimateur S^2_{YS} est sans biais.

Exercice 26 *Correction* :

1. (a) Échantillon de loi normale.
La table de fonction de répartition de variable normale centrée réduite dont nous disposons donne les valeurs de fonction de répartition avec quatre chiffres après la virgule : il suffira donc d'avoir des valeurs de fonction de répartition avec quatre chiffres après la virgule.
Pour avoir dix valeurs, il faudra donc choisir 40 nombres au hasard entre 0 et 9.

(b) Échantillon de loi uniforme.
Dans une table de nombres au hasard, choisissons au hasard un point de départ, par exemple 4e ligne, 5e colonne, et prenons les 40 chiffres qui suivent : 50 47 36 50 91 19 09 15 98 75 60 58 33 15 94 03 80 04 21 49.
Ces chiffres, groupés par 4, engendrent un échantillon aléatoire de taille 10 d'une variable aléatoire continue X de loi uniforme sur l'intervalle [0,1] :

$$x_1 = 0,5047,\ x_2 = 0,3650,\ x_3 = 0,9119,\ x_4 = 0,0915,\ x_5 = 0,9875,$$
$$x_6 = 0,6058,\ x_7 = 0,3315,\ x_8 = 0,9403, x_9 = 0,8004,\ x_{10} = 0,2149,$$

qui est la réalisation d'un échantillon aléatoire $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10})$, où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$ que la variable parente X.

(c) Échantillon de loi normale.
Soit ϕ la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite U. ϕ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
On sait qu'alors la variable aléatoire $\phi^{-1}(X)$ suit la même loi de probabilité que U donc $\phi^{-1}(X)$ est une variable normale centrée réduite.
La variable aléatoire $Y = \mu + \phi^{-1}(X)\sigma$ est donc une variable normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

$$Y = \mu + \phi^{-1}(X)\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

La table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite permet de calculer la valeur des $\phi^{-1}(x_i)$ et les y_i s'en déduisent par la formule ($\mu = 5$ et $\sigma = 2$) :

$$y_i = 5 + 2\phi^{-1}(x_i).$$

x_i	0,5047	0,3650	0,9119	0,0915	0,9875	0,6058	0,3315	0,9403	0,8004	0,2149	Total
$\phi^{-1}(x_i)$	$0,018$	-$0,345$	$1,353$	-$1,332$	$2,241$	$0,268$	-$0,436$	$1,557$	$0,843$	-$0,790$	–
y_i	5,024	4,310	7,705	2,337	9,483	5,537	4,128	8,115	6,686	3,421	56,745
y_i^2	25,236	18,574	59,369	5,461	89,924	30,656	17,044	65,847	44,704	11,703	368,516

L'échantillon $5,024; 4,310; 7,705; 2,337; 9,483; 5,537; 4,128; 8,115; 6,686; 3,421$ est un échantillon de loi normale.

2. Vérification de la normalité d'un échantillon.
On classe les valeurs de Y obtenues par ordre croissant. Comme les nombres aléatoires ont été choisis au hasard, on peut attribuer à chaque valeur une probabilité empirique 0,10. Les valeurs de fonction de répartition empirique sont donc :

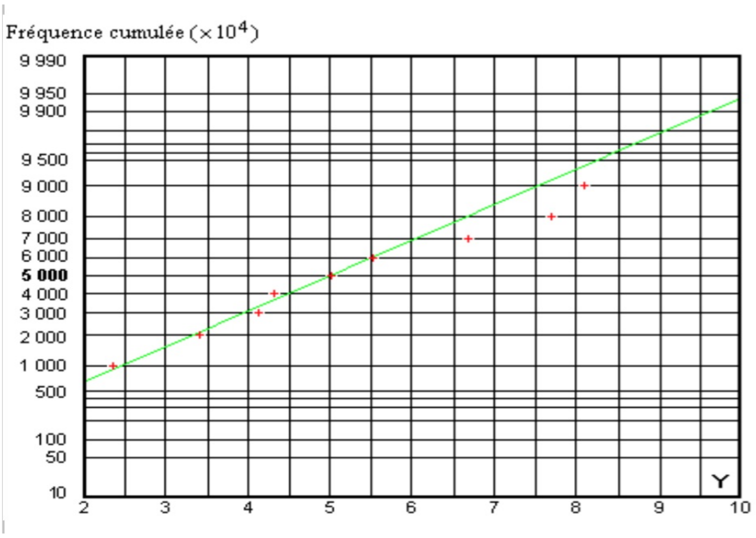
y_i	2,337	3,421	4,128	4,310	5,024	5,537	6,686	7,705	8,115	9,483
$\phi(y_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Représentons ci-après ces points en coordonnées gausso-arithmétiques sans tenir compte du dernier point (le dernier point ne peut jamais être représenté car l'ordonnée 1 est à l'infini).

Grossièrement, on peut dire que les points (en rouge) sont assez bien alignés : la fonction de répartition empirique est donc proche d'une fonction de répartition de variable normale. Elle est à rapprocher de la fonction de répartition de la variable normale de moyenne 5 et d'écart-type 2, représentée par la droite en vert dans ce graphique.

3. Estimation sans biais de la moyenne.

$$\sum_i y_i = 56,745$$
$$\overline{Y}^* = \frac{1}{n}\sum_i y_i = 5,6745$$



4. Estimation sans biais de la variance.

$$\sum_i y_i^2 = 368,516$$

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i y_i)^2\right) = \frac{1}{9}(368,516 - \frac{1}{10}(56,745)^2) = 5,169$$

Cette estimation sans biais de la variance permet une estimation de l'écart-type : $\sigma^* = 2,273$.

5. Intervalle de confiance à 95%.

$$\overline{Y}^* \pm 1,96\frac{\sigma^\star}{\sqrt{10}} = 5,6745 \pm 1,409 = [4,266; 7,084]$$

Intervalle de confiance de la moyenne à 95% : $[4,27; 7,08]$. Interprétation : l'échantillon de loi normale obtenu indique que l'on peut considérer, avec 95% de chance de succès, que la vraie valeur de la moyenne est entre $4,27$ et $7,08$.