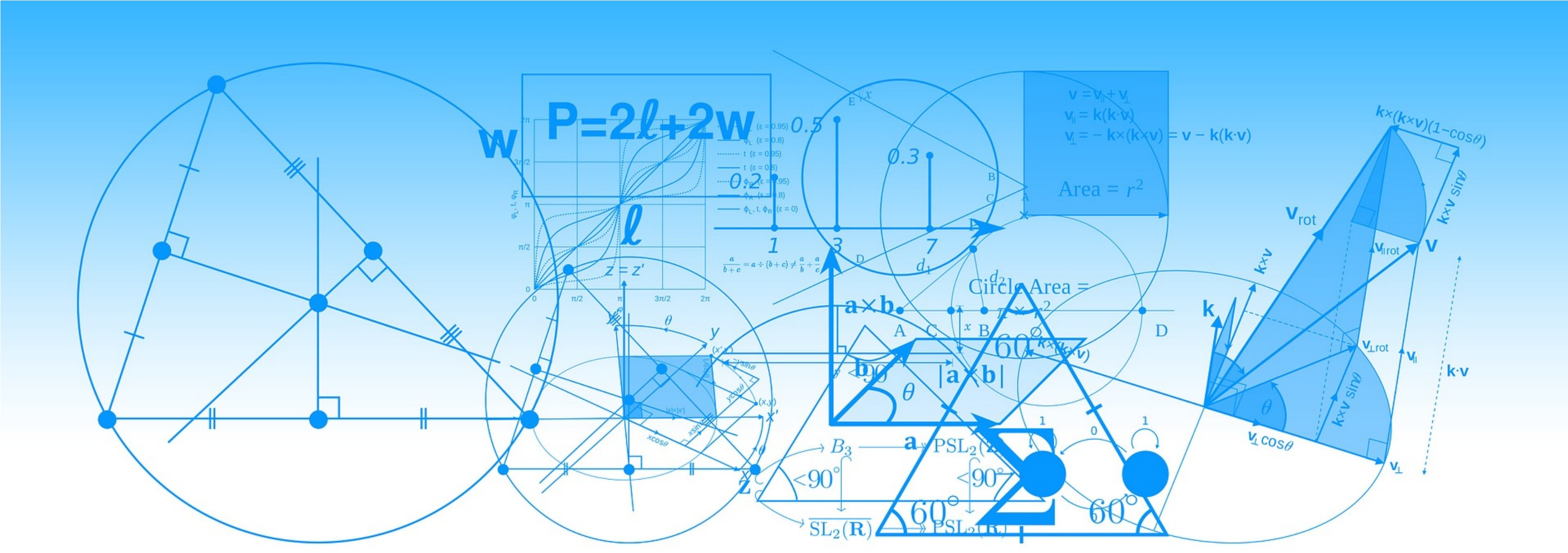


2. Les fonctions usuelles

2.1 Théorèmes d'analyse admis

Théorème 2.1.1 — Fonctions constantes. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

Théorème 2.1.2 — Théorème de la bijection. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

- continue sur I,
- strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection récirpoque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

Théorème 2.1.3 — Dérivation de la bijection réciproque. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :

- f est strictement monotone sur l'intervalle I,
- f est dérivable au point x_0,
- $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors, la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si

- $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I,
- f est dérivable sur l'intervalle I,
- $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$,

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

2.2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

2.2.1 Fonction logarithme

Definition 2.2.1 On appelle fonction logarithme, toute fonction $f:\mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ dérivable, différente de la fontion nulle, qui vérifie la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x\times y) = f(x) + f(y)$$

Théorème 2.2.1 Les fonctions logarithmes sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k \times \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

2.2.2 Fonction logarithme népérien

Definition 2.2.2 Si $k=1$, on appelle logarithme népérien ou logarithme naturel la fonction logarithme obtenue. Il est caractérisé par $\ln e = 1$.

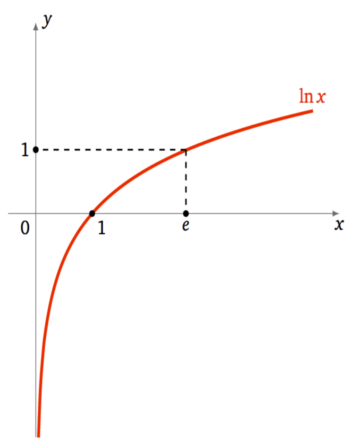
R Soit ℓ une fonction logarithme alors il existe $k \in \mathbb{R}^\star$ telle que $\ell(x) = k \times \ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Proposition 2.2.2 Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (pour tout } x>0) \text{ et } \ln 1 = 0.$$

Propriété 2.2.3 La fonction logarithme népérien vérifie (pour tous $x, y > 0$) les propriétés suivantes :

- $\ln(x\times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n\ln x$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- la fonction ln est concave et $\ln x \leq x-1$ (pour tout $x>0$)



2.2.3 Fonction logarithme base a

Toute fonction logarithme ℓ est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$, on a

$$\ell(x) = 1 \Leftrightarrow k \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{k} \text{ car } k \neq 0$$

Donc $\frac{1}{k}$ admet un unique antécédent pour ln à savoir a.

Definition 2.2.3 Le nombre a est appelé base de la fonction logarithme ℓ. La fonction ℓ est alors notée $\log_a$.

Definition 2.2.4 Pour $x > 0$, on définit le logarithme en base $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

de sorte que $\log_a a = 1$.

Propriété 2.2.4 $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a les propriétés suivantes :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$
- $\log_a(x^n) = n \log_a x$

R

- Pour $a = 10$, on obtient le logarithme décimal $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique, on utilise l'équivalence :
$$x = 10^y \Leftrightarrow y = \log_{10} x$$
- En informatique intervient le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.
- La base de ln est e : $\ln e = 1$.

Étudions les variations de la fonction $\log_a$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

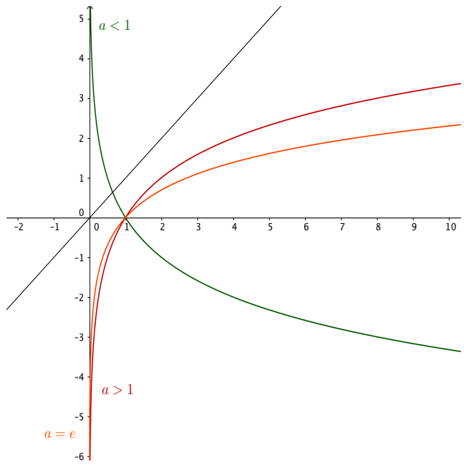
- $0 < a < 1$, $\ln a < 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\log'_a x$			$-$		
variations de $\log_a$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- $1 < a$, $\ln a > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\log'_a x$			$+$		
variations de $\log_a$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit les graphiques qui suivent :

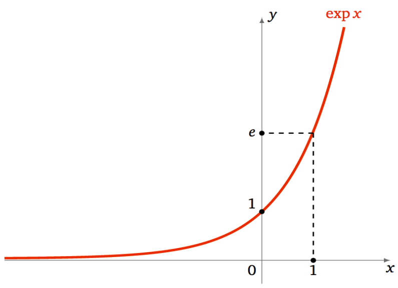


R Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$, (Ox) est une branche parabolique.

2.2.4 Fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $I=]0,+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $J=f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

Definition 2.2.5 La bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$.



Proposition 2.2.5 La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(\ln x)=x$ pour tout $x>0$ et $\ln(\exp x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
- $\exp(x+y)=\exp x\times\exp y$
- $\exp(nx)=(\exp x)^n$
- $\exp(x-y)=\dfrac{\exp x}{\exp y}$
- $\exp:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x=+\infty$
- la fonction exponentielle est dérivable et $(\exp x)'=\exp x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (elle satisfait donc l'équation différentielle $f'=f$) (*)
- la fonction exponentielle est convexe et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp x\geq 1+x$ (l'inégalité est stricte si $x\in\mathbb{R}^\star$)
- on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\exp x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\exp x=0$.

R On retrouve (*) de la manière suivante : comme la fonction ln est dérivable sur $I =]0, \infty[$, et que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) \neq 0$, sa bijection réciproque est dérivable sur $f(I) = J = \mathbb{R}$ avec $((\ln)^{-1})' = \dfrac{1}{(\ln)' \circ ((\ln)^{-1})}$.

2.2.5 Fonction exponentielle base a

Lorque $a > 0$ et $a \neq 1$, le logarithme en base a est une fonction f_a continue sur $I = \mathbb{R}_+^\star$, et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection, il réalise une bijection de I vers $J = f_a(I) = \mathbb{R}$. On note $\exp_a$ sa bijection réciproque (qui est donc continue sur $\mathbb{R}$, de même sens de variation que f_a).

Definition 2.2.6 On définit pour $a > 0$, l'exponentielle de base a :

$$\exp_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x \ln a) \end{array} \right.$$

Proposition 2.2.6 L'exponentielle de base a vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp_a(x+y) = \exp_a x \times \exp_a y$$

Comme la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_a'(x) \neq 0$, la fonction $\exp_a$ est dérivable sur l'intervalle $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in J = \mathbb{R}, (\exp_a x)' = \ln a \exp_a x$$

Études les variations de la fonction $\exp_a$:

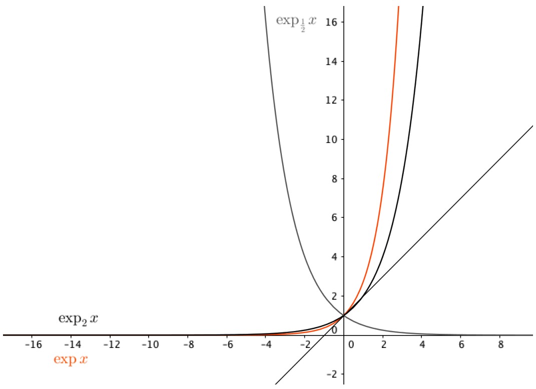
- $0 < a < 1$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp_a' x$		$-$	
variations de $\exp_a$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\searrow$ 0

- $a > 1$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp_a' x$		$+$	
variations de $\exp_a$	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

On en déduit les graphiques qui suivent :



R

- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle.
- On a $\exp_e = \exp$.
- On note aussi $\exp x$ par e^x (puissance x-ième de $e = \exp 1 \simeq 2,718$, le nombre qui vérifie $\ln e = 1$) ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$.

Notation 2.1. *Pour tout reél x et tout nombre $a \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $a^x = \exp_a x$.*

Propriété 2.2.7 $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, l'exponentielle base a vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp_a(x+y) = \exp_a x \times \exp_a y \Leftrightarrow a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^x \times b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

2.2.6 Fonction puissance

Definition 2.2.7 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance par :

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction composée, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

En notant $I =]0,+\infty[$,

- si $\alpha = 0$, f_α est constante et vaut 1,
- si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur I,
- si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur I.

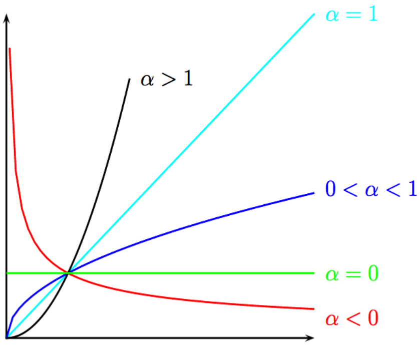
Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger f_α par continuité en en posant $f_\alpha(0) = 0$. Étudions la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée (encore notée f_α) :

- si $\alpha > 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$,
- si $\alpha = 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 1$,
- si $0 < \alpha < 1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star$, f_α est continue sur $I =]0,+\infty[$ et strictement monotone sur I, elle est bijective de I vers $J =]0,+\infty[$. On montre alors que

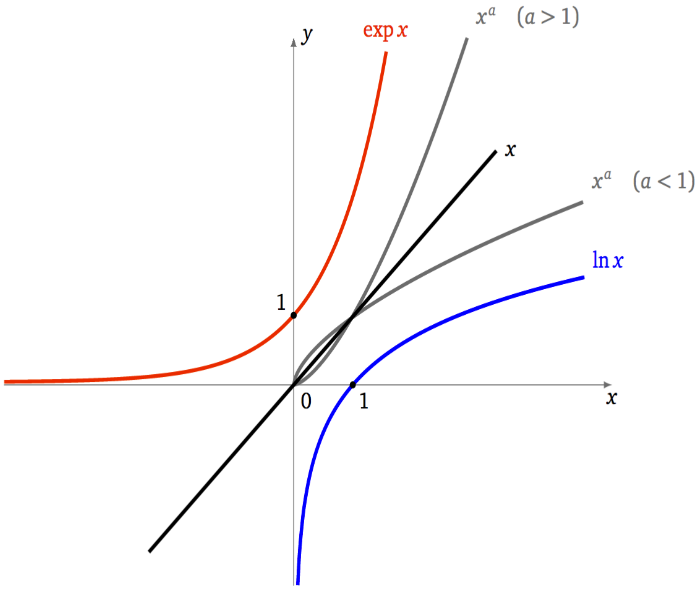
$$f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$$

On a les graphiques suivants en fonction des valeurs de α :



Propriété 2.2.8 Soient $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction puissance vérifie les propriétés suivantes :
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a \ln x$

Pour terminer cette section, on peut rassembler sur un même graphe les courbes représentatives des fonctions logarithme, exponentielle et puissance :



2.3 Fonctions circulaires (ou trigonométriques) inverses (ou réciproques)

2.3.1 Fonction arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

On a par définition de la bijection réciproque les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.1
- $\cos(\text{Arccos}\, x) = x$, $\forall x \in [-1,1]$
- $\text{Arccos}(\cos x) = x$, $\forall x \in [0,\pi]$
- $\sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$
- $\tan(\text{Arccos}\, x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\forall x \in [-1,1]$, $x \neq 0$

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.2 si $x \in [0,\pi]$, $\cos x = y \Leftrightarrow x = \text{Arccos}\, y$

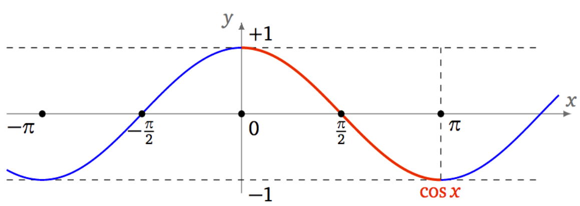
Propriété 2.3.3
- Arccos est continue sur $[-1,1]$,
- Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$,
- $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$ (le point de coordonnées $(0,\frac{\pi}{2})$ est centre de symétrie de la courbe représentative de Arccos,
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

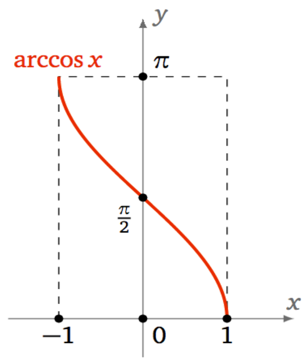
  (Donc, $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{Arccos}\, x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arccos :

x	-1		1
signe de $(\text{Arccos})'(x)$	$\Vert\ -\infty$	$-$	$-\infty\ \Vert$
variations de Arccos	π	$\searrow$	0

et en déduire le graphe associé :





2.3.2 Fonction arcsinus

La restriction

$$\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

est une bijection (elle est continue et strictement croissante).

Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\text{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

On a par définition de la bijection réciproque les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.4

- $\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$, $\forall x \in [-1,1]$,
- $\text{Arcsin}(\sin x) = x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$,
- $\tan(\text{Arcsin}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.5 si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = y \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}\, y$

Propriété 2.3.6

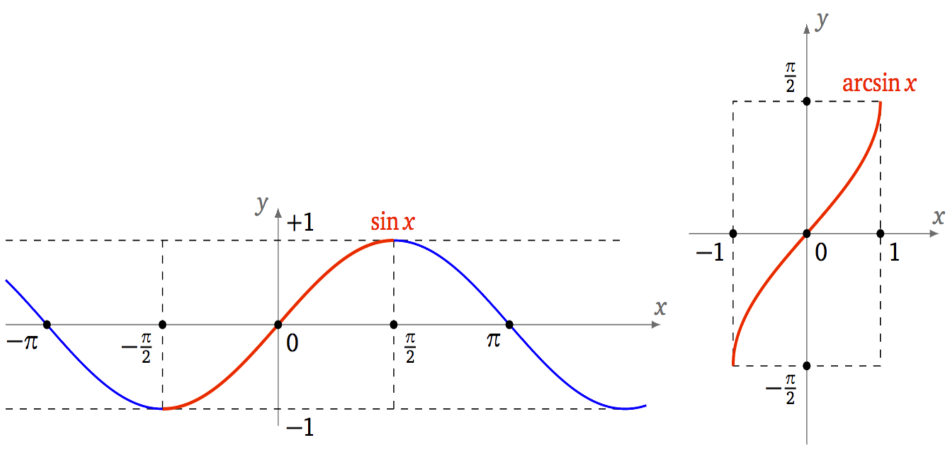
- Arcsin est continue sur $[-1,1]$,
- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$,
- $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}\, x$ (l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de Arcsin),
- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

  (Donc, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin}\, x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arcsin :

x	-1		0		1
signe de $(\text{Arcsin})'(x)$	$\Vert$	$+\infty$	$+$	$+\infty$	$\Vert$
variations de Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

et en déduire le graphe associé :



Proposition 2.3.7 $\forall x \in [-1,1]$,

$$\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$$

2.3.3 Fonction arctangente

La restriction

$$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

est une bijection (elle est continue et strictement croissante). Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

On a par définition de la bijection réciproque :

Propriété 2.3.8

- $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $\text{Arctan}(\tan x) = x$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
- $\cos(\text{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $\sin(\text{Arctan}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.9 si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = y \Leftrightarrow x = \text{Arctan}\, y$

Propriété 2.3.10

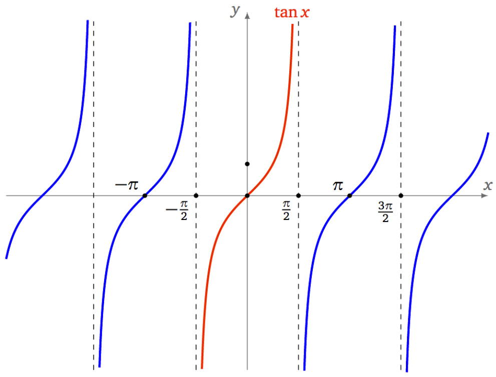
- Arctan est continue sur $\mathbb{R}$,
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}\, x$ (l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de Arctan),
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

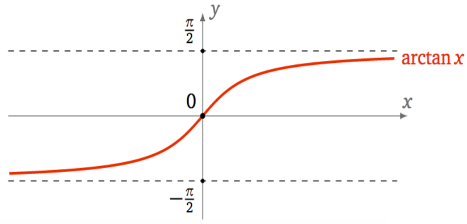
  (Donc $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}\, x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arctan :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $(\text{Arctan})'(x)$		$+$	
variations de Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$

et en déduire le graphe associé :





On peut conclure cette section avec le résultat suivant :

Proposition 2.3.11 $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$, $(\varepsilon = \operatorname{sgn}(x))$

2.4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

2.4.1 Fonctions hyperboliques

Definition 2.4.1 Pour $x \in \mathbb{R}$,

- le cosinus hyperbolique est défini par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- le sinus hyperbolique est défini par :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Le sinus et le cosinus hyperboliques vérifient les propriétés suivantes :

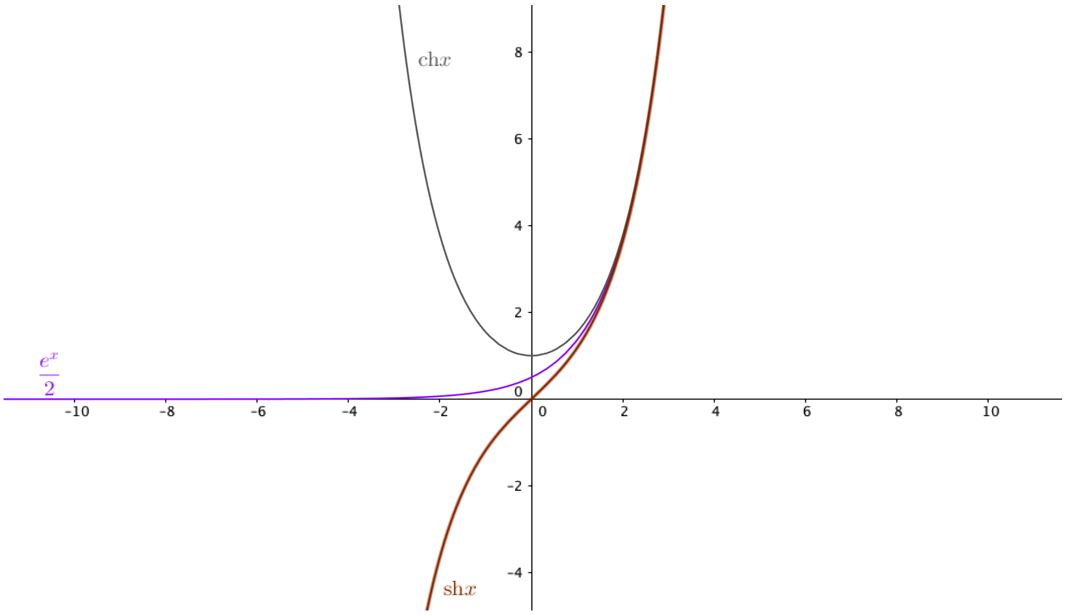
Propriété 2.4.1

- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$
- $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- sh et ch sont continues sur $\mathbb{R}$,
- ch est une fonction paire, sh est une fonction impaire.
- ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$ et $(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x$,

On en déduit aisément les variations des deux fonctions :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $(\operatorname{sh})'(x)$			$+$		
variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ainsi que les graphes associés :



R

- $\operatorname{sh} 0 = 0$ et $\operatorname{ch} 0 = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh} x \leq \frac{e^x}{2} \leq \operatorname{ch} x \text{ et } \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, la courbe $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes $y = \operatorname{sh} x$ et $y = \operatorname{ch} x$ et on a de fait la position des courbes par rapport à la courbe asymptote.

Definition 2.4.2 La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

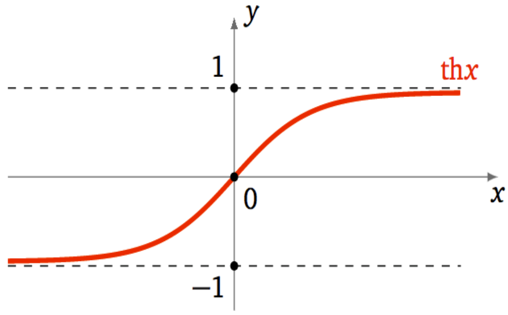
Propriété 2.4.2 La tangente hyperbolique a les propriétés suivantes :

- $\operatorname{th} x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$,
- th est continue sur $\mathbb{R}$,
- th est impaire,
- th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{th})'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$.

On déduit du dernier résultat le tableau de variations de th :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $(\operatorname{th})'(x)$		$+$	
variations de th	-1 ↗	0 ↗	1

ainsi que le graphe associé :



On peut citer enfin quelques résultats de trigonométrie hyperbolique :

Propriété 2.4.3 Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a alors :

- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y$
- $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$
- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}y \operatorname{ch}x$
- $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x$
- $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}y}{1 + \operatorname{th}x \operatorname{th}y}$

2.4.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante, vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh}x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}x = +\infty$. Elle réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ ves $J = \mathbb{R}$. On appelle $\operatorname{Argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$ sa bijection réciproque.

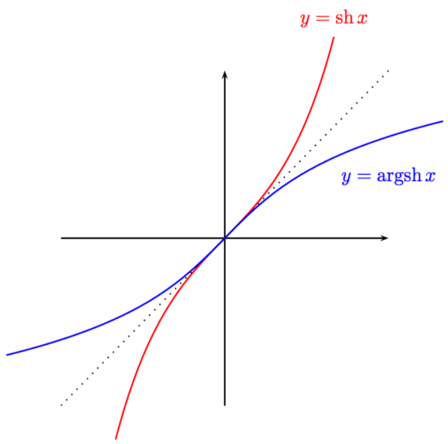
Propriété 2.4.4 La fonction Argsh vérifie les propriétés suivantes :

- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue,
- Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{Argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- on a l'expression logarithmique $\operatorname{Argsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,
- on en déduit que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{Argsh}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argsh le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $(\operatorname{Argsh})'(x)$	$+$	
variations de Argsh	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ainsi que le graphe associé :



Fonction argument cosinus hyperbolique

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante, vérifiant $\lim_{x \to 0} \operatorname{ch} x = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$. Elle réalise donc une bijection strictement croissante de I vers $J = [1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est Argch : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$.

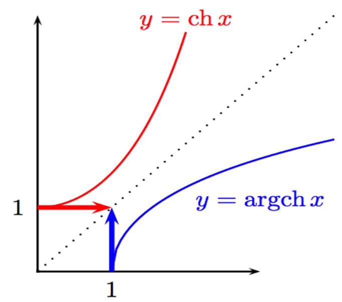
Propriété 2.4.5 La fonction Argch vérifie les propriétés suivantes :

- Argch : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante et continue,
- Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, et $\forall x \in]1, +\infty[$, $(\mathrm{Argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,
- on a l'expression logarithmique $\mathrm{Argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
- on en déduit la primitive : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{Argch}\, x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argch le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
signe de $(\mathrm{Argch})'(x)$	$+$
variations de Argch	$0 \nearrow +\infty$

ainsi que le graphe associé :



Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $J =]-1, 1[$. On note Argth : $]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

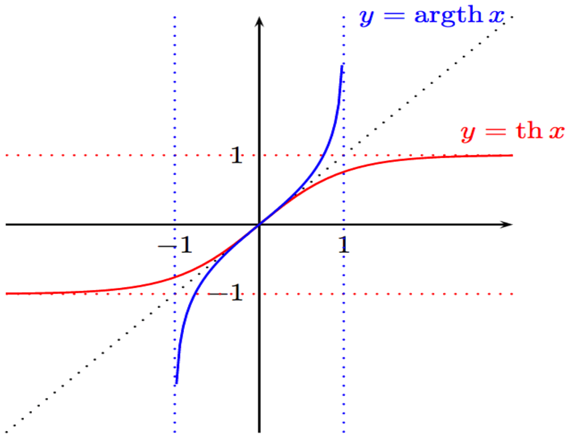
Propriété 2.4.6 La fonction Argth vérifie les propriétés suivantes :

- Argth est strictement croissante et continue,
- Argth est dérivable sur $]-1,1[$, et $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,
- on a l'expression logarithmique $\text{Argth}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argth le tableau de variations suivant :

x	-1 1
signe de $(\text{Argth})'(x)$	$+$
variations de Argth	$-\infty \nearrow +\infty$

ainsi que le graphe associé :



On précise enfin que la fonction cotangente hyperbolique, notée coth, est définie sur $R^\star$ par :

$$\coth x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$

2.5 Exercices

2.5.1 Fonctions logarithmes

Exercice 2.1 Résoudre dans $]0;+\infty[$, $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \dfrac{11}{2}$. ■

Exercice 2.2

1. Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$, que :

$$\frac{y-x}{\ln y - \ln x} < \frac{x+y}{2}$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

■

Exercice 2.3 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad \text{avec } x > y > 1.$$

■

Exercice 2.4 Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$. ■

Exercice 2.5 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que $x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$.
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y$$

De l'étude de f, déduire que pour tout α de $]0,1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

3. Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

■

2.5.2 Fonctions exponentielles

Exercice 2.6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$,

$$(S) \begin{cases} x + e^x & = & y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 & = & 27 \end{cases}$$

■

Exercice 2.7 Soit $\begin{array}{rcl} f :]-1;+\infty[& \to & \left]-\dfrac{1}{e};+\infty\right[\\ x & \mapsto & x\exp x \end{array}$. Montrer que f bijective, et que f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs ensembles de définition. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$. ■

Exercice 2.8 Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 2.9 Résoudre les équations définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln 18$
2. $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$
3. $9^x + 3^x - 12 = 0$

4. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

2.5.3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 2.10 Établir les formules suivantes :

1. $2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{2} = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{4}{3}$
2. $2\,\mathrm{Arccos}\,\dfrac{3}{4} = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{8}$
3. $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{5}{13} = 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{2}{3}$
4. $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$
5. $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{5}{13} + \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{3}{5} = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{56}{65}$
6. $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{5} + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 2.11 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(4\,\mathrm{Arctan}\,x)$ 2. $\sin(3\,\mathrm{Arctan}\,x)$ 3. $\sin(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,x)$

Exercice 2.12 Établir les relations suivantes :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arccos}(-x) = \pi$
3. $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$
4. $\mathrm{Arctan}(2x+1) - \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{x+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\end{cases}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(1+x) - \mathrm{Arctan}\,x = \mathrm{Arccotan}(1+x+x^2)$. En déduire la limite
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arccotan}(1+k+k^2)$$

Exercice 2.13 Étudier et représenter les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin x)$ 2. $x \mapsto \mathrm{Arccos}(\cos x)$ 3. $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\tan x)$

Exercice 2.14 Soit $f(x) = \mathrm{Arccos}(1-2x^2)$.

1. Préciser l'ensemble de définition et la parité de f.
2. On pose $x = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $f(\sin\varphi)$, et en déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$.
3. Construire le graphe de f.

Exercice 2.15 Soit $f(x) = \text{Arccos}\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition et la parité de f.
2. (a) Calculer $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$, et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $]-\infty,0]$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. On pose $x = \tan\dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi \in [0,\pi[$. Calculer $f(\tan\frac{\varphi}{2})$ et retrouver les résultats du 2. (a).
4. Construire le graphe de f.

Exercice 2.16 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p.

1. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal α_0 ?
2. Vérifier que $\alpha_0 = \arctan\dfrac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.
3. Application à la statue de la liberté : haute de 46 mètres avec un piédestal de 47 mètres.

Exercice 2.17

1. Montrer, pour tout $(a,b) \in [0,1[^2$, que :
$$\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$$
2. En déduire la valeur de $S = 5\arctan\dfrac{1}{8} + 2\arctan\dfrac{1}{18} + 3\arctan\dfrac{1}{57}$.

2.5.4 Fonctions hyperboliques directes et réciproques

Exercice 2.18

1. Exprimer $\text{ch}(3x)$ en fonction de $\text{ch}\,x$, et $\text{sh}(3x)$ en fonction de $\text{sh}\,x$.
2. Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{ch}(3x) - 3\,\text{ch}(x)$.

Exercice 2.19

1. Exprimer $\text{sh}^4 x$ en fonction de $\text{ch}(2x)$ et $\text{ch}(4x)$.
2. Calculer $\displaystyle\int \text{sh}^4 x\,dx$.

Exercice 2.20 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $a\,\text{ch}\,x + b\,\text{sh}\,x = 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. $(\text{ch}\,x + \text{sh}\,x)^{\text{Argsh}(x-a)} = (\text{ch}\,x - \text{sh}\,x)^{\text{Argsh}(x-b)}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
3. $2\,\text{Argsh}\,x = \text{Argth}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{Argch}\,\sqrt{2}$.

Exercice 2.21 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$,

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y & = & 4\\ \operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y & = & 1\end{array}\right.$$

■

Exercice 2.22 Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y & = & a\operatorname{ch}b\\ \operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y & = & a\operatorname{sh}b\end{array}\right.$$

■

Exercice 2.23

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^\star$, $\operatorname{th}x=\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}-\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\operatorname{th}(2^kx)$, pour $n\in\mathbb{N}$.

■

Exercice 2.24 Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[$, $\arctan(\operatorname{sh}x)=\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$. ■

Exercice 2.25

1. Démontrer l'expression logarithmique de $\operatorname{Argsh}x$.
2. Démontrer l'expression logarithmique de $\operatorname{Argch}x$. Retrouver son développement limité au voisinage de 1.

■