

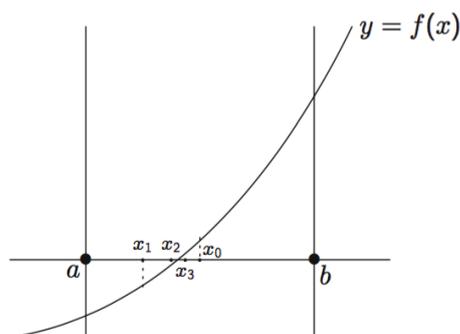
## 4. Résolution d'équations non linéaires

On considère une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a < b$ , et continue sur cet intervalle et on suppose que  $f$  admet une unique racine sur  $I = ]a, b[$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique  $\alpha \in I$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

### 4.1 Méthode de dichotomie

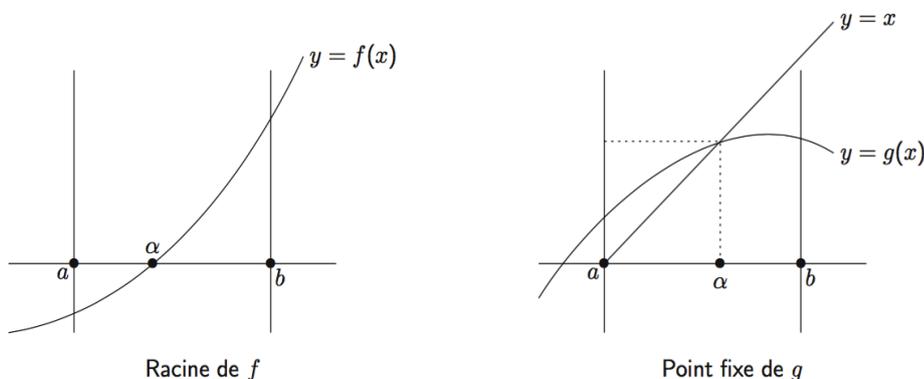
On considère un intervalle  $[a, b]$  et une fonction  $f$  continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(a)f(b) < 0$  et que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . La méthode de dichotomie consiste à construire une suite  $(x_n)$  qui converge vers  $\alpha$  de la manière suivante :

1. Initialisation : soit  $x_0$  le milieu de  $[a, b]$ . La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles  $]a, x_0[$  ou  $]x_0, b[$  ou bien elle est égale à  $x_0$ .
  - Si  $f(a)f(x_0) < 0$ , alors  $\alpha \in ]a, x_0[$ . On pose  $a_1 = a$ ,  $b_1 = x_0$ .
  - Si  $f(a)f(x_0) = 0$ , alors  $\alpha = x_0$ .
  - Si  $f(a)f(x_0) > 0$ , alors  $\alpha \in ]x_0, b[$ . On pose  $a_1 = x_0$ ,  $b_1 = b$ .
2. Algorithme : soit  $x_1$  le milieu de  $[a_1, b_1]$ . On construit ainsi une suite  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \dots, x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$  telle que  $|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ .



Etant donnée une précision  $\varepsilon$ , cette méthode permet d'approcher  $\alpha$  en un nombre prévisible d'itérations.

Les principes de construction suivants consistent à transformer l'équation  $f(x) = 0$  en une équation équivalente  $g(x) = x$ . On peut poser par exemple  $g(x) = x + f(x)$ , mais on prendra plus généralement  $g(x) = x + u(x)f(x)$  où  $u$  est une fonction non nulle sur l'intervalle  $I$ . Il reste à choisir  $u$  pour que la suite définie par  $x_0 \in I$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = x_n + u(x_n)f(x_n)$  soit bien définie et converge vers la racine  $\alpha$  de  $f$ . Géométriquement, on a remplacé la recherche de l'intersection du graphe de la fonction  $f$  avec l'axe  $Ox$ , par la recherche de l'intersection de la droite d'équation  $y = x$  avec la courbe d'équation  $y = g(x)$ .



Le choix d'une méthode est conditionné par les réponses aux questions suivantes :

1. La suite  $(x_n)$  converge-t-elle ?
2. Si la suite converge, sa limite est-elle  $\alpha$  ?
3. Si on veut la solution à  $\varepsilon$  près, comment arrêter les itérations dès que cette condition est remplie ?
4. Comme dans tout calcul, on désire obtenir rapidement le résultat approché. Comment estimer la manière dont évolue l'erreur  $e_n = x_n - \alpha$  au cours des itérations ?

Les deux premières questions sont purement mathématiques. Les deux dernières sont numériques car on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'itérations pour le calcul. La continuité des fonctions considérées permet de répondre à la question 2 : si la suite converge, elle converge vers une racine de l'équation ; si, de plus,  $x_n \in I$  pour tout  $n$ , alors par unicité de la racine dans  $I$ , la suite converge vers  $\alpha$ .

## 4.2 Théorème du point fixe

**Definition 4.2.1** On dit que l'application  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement contractante si

$$\exists L \in ]0, 1[, \forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b], |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

**Proposition 4.2.1** Soit  $g$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $g'$  vérifie

$$\max\{|g'(x)|; x \in [a, b]\} \leq L < 1,$$

alors l'application  $g$  est strictement contractante dans l'intervalle  $[a, b]$ .

**Théorème 4.2.2** Si  $g$  est une application définie sur l'intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $[a, b]$ , strictement contractante, alors la suite  $(x_n)$  définie par  $x_0 \in [a, b]$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge vers l'unique solution  $\alpha$  de l'équation  $x = g(x)$  avec  $\alpha \in [a, b]$ .

*Démonstration.* La suite  $(x_n)$  est bien définie car  $g([a, b]) \subset [a, b]$ .

Montrons par l'absurde que l'équation  $g(x) = x$  a au plus une solution. Supposons qu'il y ait deux

solutions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

or  $L < 1$  donc on a nécessairement  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Montrons que la suite  $(x_n)$  est convergente. On a

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence,  $|x_{n+1} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|$ . On en déduit que

$$|x_{n+p} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0| \cdot \frac{1 - L^p}{1 - L} \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

Cette suite vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente vers  $\alpha \in [a, b]$ . Or, l'application  $g$  est continue donc, la limite  $\alpha$  vérifie  $g(\alpha) = \alpha$ . ■

On a aussi une évaluation de l'erreur en faisant tendre  $p$  vers l'infini car on obtient :

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

On constate que, pour  $n$  fixé, l'erreur est d'autant plus petite que  $L$  est proche de 0.

## 4.3 Méthode de la sécante

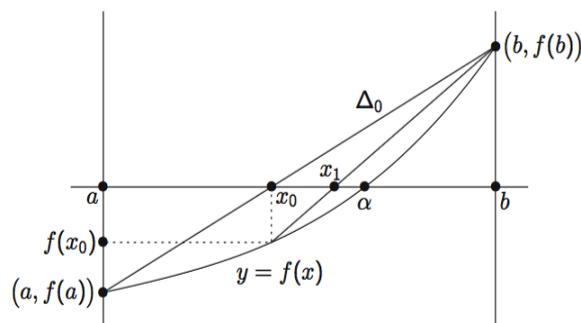
### 4.3.1 Description de la méthode

Cette méthode est également appelée méthode de Lagrange, méthode des parties proportionnelles ou encore regula falsi.

On considère un intervalle  $[a, b]$  et une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(a)f(b) < 0$  et que  $f'$  ne s'annule pas sur  $[a, b]$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[a, b]$ .

**R** L'hypothèse “ $f$  dérivable” suffirait, mais demanderait une rédaction un peu plus fine des démonstrations.

La méthode de la sécante consiste à construire une suite  $(x_n)$  qui converge vers  $\alpha$  de la manière suivante : soit  $\Delta_0$  la droite passant par  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ , elle coupe l'axe  $Ox$  en un point d'abscisse  $x_0 \in ]a, b[$ . On approche donc la fonction  $f$  par un polynôme  $P$  de degré 1 et on résout  $P(x) = 0$ .



Méthode de la sécante

Ensuite, suivant la position de  $\alpha$  par rapport à  $x_0$ , on considère la droite passant par  $(a, f(a))$  et  $(x_0, f(x_0))$  si  $f(x_0)f(a) < 0$  ou celle passant par  $(x_0, f(x_0))$  et  $(b, f(b))$  si  $f(x_0)f(b) < 0$ . On appelle  $x_1$  l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe  $Ox$ . On réitère ensuite le procédé.

Plaçons-nous dans le cas où  $f' > 0$  est dérivable et  $f$  est convexe (i.e.  $f'' \geq 0$ ), c'est-à-dire que sa représentation graphique est au dessus des tangentes et en dessous des cordes. Alors la suite  $(x_n)$  est définie par

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \frac{bf(x_n) - x_n f(b)}{f(x_n) - f(b)} \end{cases}$$

En effet, si  $f$  est convexe, on remplace l'intervalle  $[x_n, b]$  par l'intervalle  $[x_{n+1}, b]$ . L'équation d'une droite passant par  $(c, f(c))$  et  $(b, f(b))$  avec  $c \neq b$  est

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - b).$$

On cherche son intersection avec l'axe  $Ox$  donc on prend  $y = 0$  et on obtient la formule donnée plus haut. On pose

$$g(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)} = x - \frac{b - x}{f(b) - f(x)}f(x)$$

d'où  $x_{n+1} = g(x_n)$ . Montrons que cette suite  $(x_n)$  est définie. Pour cela, il suffit de montrer que  $g([a, b]) \subset [a, b]$ . Vérifions d'abord que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Elle l'est de manière évidente sur  $[a, b[$ . L'application  $g$  est continue en  $b$  et  $g(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ . On a, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$g'(x) = 1 - f'(x) \frac{b - x}{f(b) - f(x)} + f(x) \frac{f(b) - f(x) - (b - x)f'(x)}{(f(b) - f(x))^2} = f(b) \frac{f(b) - f(x) - (b - x)f'(x)}{(f(b) - f(x))^2}.$$

On en déduit que  $g'$  est continue en  $b$  car

$$\lim_{x \rightarrow b} g'(x) = f(b) \lim_{x \rightarrow b} \frac{(b - x) \left( \frac{f(b) - f(x)}{b - x} - f'(x) \right)}{(b - x)^2 \left( \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \right)^2} = f(b) \lim_{x \rightarrow b} \frac{\frac{f(b) - f(x)}{b - x} - f'(x)}{\left( \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \right)^2} = f(b) \frac{f''(b)}{2f'(b)^2} = g'(b).$$

De plus, l'application  $f$  est convexe, donc  $f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) \geq 0$ . On a également  $f(b) > 0$  car  $f$  est croissante et  $f(a)f(b) < 0$ . La fonction  $g$  est donc croissante sur  $[a, b]$ . On a alors

$$g([a, b]) \subset [g(a), g(b)]. \text{ De plus, } g(a) = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}, \text{ or } f(a) < 0 \text{ et } \frac{b - a}{f(b) - f(a)} > 0$$

par croissance de  $f$ ; donc  $g(a) \geq a$ . De même,  $g(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ , or  $f'(b) > 0$  et  $f(b) > 0$  donc

$g(b) \leq b$ . La croissance de  $g$  montre que la suite  $(x_n)$  est croissante car  $x_1 = g(a) \geq a = x_0$ , or elle est dans l'intervalle  $[a, b]$ , donc elle converge vers  $\ell \in [a, b]$  tel que, par continuité de  $g$ ,  $g(\ell) = \ell$ . De plus,  $x_0 \leq \alpha$  donc une récurrence immédiate et la croissance de  $g$  montrent que pour tout entier  $n$ ,  $x_n \leq \alpha$ . On en déduit que  $\ell \leq \alpha$ , c'est-à-dire que  $\ell \in ]a, b[$ . Soit  $x \in ]a, b[$  tel que  $f(x) = 0$ , alors il est

immédiat que  $g(x) = x$ . Réciproquement, soit  $x \in ]a, b[$  tel que  $g(x) = x$ , alors  $\frac{b - x}{f(b) - f(x)}f(x) = 0$ , or  $x \neq b$  et  $f(x) \neq f(b)$  car  $f$  est strictement croissante et  $x \in ]a, b[$ . On en déduit que  $f(x) = 0$ . Il y a unicité de la racine de  $f$ , donc  $\ell = \alpha$  et la suite  $(x_n)$  converge vers  $\alpha$ .

### 4.3.2 Rapidité de convergence de la méthode de la sécante

On a  $x_n - \alpha = g'(\xi)(x_{n-1} - \alpha)$ . On en déduit, par continuité de  $g'$  en  $\alpha$ , que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

## 4.4 Méthode de Newton

On cherche les points fixes de la fonction  $g(x) = x + u(x)f(x)$ , et on a vu que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

Pour obtenir une convergence plus rapide, on peut chercher  $u$  tel que  $g'(\alpha) = 0$ . On a, si les fonctions ont les régularités nécessaires,  $g'(x) = 1 + u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$  et on en déduit que  $g'(\alpha) = 0$  si  $u(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ . Si la fonction  $f'$  ne s'annule pas, on peut choisir  $u(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ . On obtient alors la méthode de Newton.

### 4.4.1 Description de la méthode

On considère une fonction réelle définie sur un intervalle  $I = [a, b]$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ ; on suppose que les fonctions  $f'$  et  $f''$  ne s'annulent pas et gardent chacune un signe constant sur  $I$ . On pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

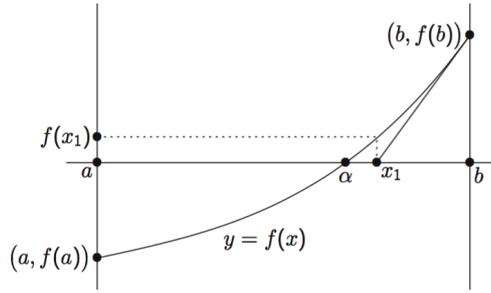
Si  $f'f''$  est positive (respectivement négative) sur  $[a, b]$ , on pose  $x_0 = b$  (respectivement  $a$ ). On définit alors la suite  $(x_n)$  par la donnée de  $x_0$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

**Théorème 4.4.1** La suite  $(x_n)$  converge vers  $\alpha$  l'unique racine de  $f$  sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Pour simplifier la rédaction, on va supposer que  $f'$  est strictement positive et  $f''$  est strictement négative sur  $I$ . Les autres cas se traitent de manière similaire. Ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité de  $\alpha \in I$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . On va montrer que la suite  $(x_n)$  est croissante et majorée par  $\alpha$ . On a  $x_0 = a$ , donc  $x_0 \leq \alpha$ . Supposons que  $x_n \leq \alpha$ , alors, comme  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  et que la fonction  $f'$  est positive,  $f$  est donc croissante et on en déduit immédiatement que  $x_{n+1} \geq x_n$  et la suite  $(x_n)$  est croissante. De plus,  $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi)(x_n - \alpha)$  avec  $\xi \in ]x_n, \alpha[$ . Or,  $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$  donc  $g'(\xi) > 0$  et  $x_{n+1} \leq \alpha$ . La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée; elle est donc convergente. Notons  $\ell$  sa limite. La continuité de  $g$  permet d'écrire que  $\ell = g(\ell)$  et donc  $f(\ell) = 0$  d'où  $\ell = \alpha$ . ■

### 4.4.2 Interprétation graphique

La méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente en une de ses deux extrémités. Le point  $x_1$  est l'intersection de cette tangente avec l'axe  $Ox$ . Pour faire le dessin, on va se placer dans le cas étudié pour la méthode de la sécante, i.e.  $f' > 0$  et  $f'' < 0$ . On prend alors  $x_0 = b$ .



Méthode de Newton

Traçons la tangente à la courbe représentative de  $f$  passant par  $(b, f(b))$ . L'équation de cette tangente est  $y = f'(b)(x - b) + f(b)$ . Son intersection avec l'axe  $Ox$  a une ordonnée nulle et son abscisse vaut  $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ . On trace ensuite la tangente à la courbe au point  $(x_1, f(x_1))$ . Le réel  $x_2$  est l'abscisse de l'intersection de cette deuxième tangente avec l'axe  $Ox$  et on réitère ce procédé.

**R** Si on prenait la tangente à la courbe en  $(a, f(a))$ , son intersection avec l'axe  $Ox$  ne serait pas, sur ce dessin, dans l'intervalle  $[a, b]$ .

#### 4.4.3 Rapidité de convergence de la méthode de Newton

On suppose que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $I = [a, b]$ , que l'on a  $f(a)f(b) < 0$  et que les fonctions  $f'$  et  $f''$  sont toutes deux strictement positives sur  $[a, b]$ . Ceci nous garantit l'existence et l'unicité d'une racine simple  $\alpha$  de  $f$  sur  $[a, b]$ . On a donc  $f(\alpha) = 0$  et  $f'(\alpha) \neq 0$ . On pose  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  et on définit la suite  $(x_n)$  par  $x_0 = b$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

**Théorème 4.4.2** On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

*Démonstration.* Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$ ,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ; on a  $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$  car  $\alpha$  est racine simple de  $f$ . La formule de Taylor à l'ordre 1 s'écrit  $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\xi)$  or  $g'$  est continue sur  $[a, b]$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - \alpha| = g'(\alpha) = 0$ .

La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 g''(\xi) = \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 g''(\xi)$$

or  $g''$  est continue sur  $[a, b]$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = g''(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}.$$

■

**R** Le résultat est encore vrai si on suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . La démonstration est cependant plus difficile.

- R** On peut utiliser la méthode de Newton avec un point de départ dans  $]a, b[$ , mais la convergence de la suite n'est pas garantie. En pratique, on utilise souvent la méthode de dichotomie pour trouver un  $x_0$  assez proche de la racine.

## 4.5 Ordre de convergence

La convergence de la suite ne suffit pas numériquement, on aimerait avoir une estimation de la rapidité de convergence. On pose  $e_n = x_n - \alpha$ .  $e_n$  est l'erreur absolue au pas  $n$ . L'erreur relative vaut  $\frac{e_n}{\alpha}$ .

**Definition 4.5.1** La méthode définie par  $x_{n+1} = g(x_n)$  est dite d'ordre  $p$  si  $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$  a une limite non nulle en  $+\infty$ .

La méthode de la sécante est donc d'ordre 1 si  $g'(\alpha) \neq 0$ , tandis que la méthode de Newton est d'ordre 2 si  $g''(\alpha) \neq 0$ .

**Definition 4.5.2** Lorsque la méthode est d'ordre 1 (respectivement 2), on dit que la convergence est linéaire (respectivement quadratique).

## 4.6 Exercices

**Exercice 4.1** Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif  $a$ . Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \quad (a > 0 \text{ fixé})$$

1. Faire l'étude complète de la fonction  $g$ .
2. Comparer  $g$  à l'identité.
3. Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0.$$

À l'aide des graphes de  $g$  et de l'identité sur  $\mathbb{R}_+^*$ , dessiner la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Observer graphiquement la convergence.

4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui permet de déterminer  $\sqrt[3]{a}$  à une précision de  $10^{-6}$ .
7. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - a$ . Que remarque-t-on ?

**Exercice 4.2** 1. Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle  $[1, 3]$  et de Newton avec  $x_0 = 2$  pour l'approximation du zéro de la fonction  $f(x) = x^2 - 2$ .

2. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$ . On se propose de trouver les racines réelles de  $f$ 
  - (a) Situer les 4 racines de  $f$  (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun

une et une seule racine).

(b) Montrer qu'il y a une racine comprise entre 0 et 1

(c) Soit la méthode du point fixe

$$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k) \\ x_0 \in ]0, 1[ \end{cases}, \quad (4.1)$$

avec  $\phi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\phi(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$ . Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

(d) Écrire la méthode de Newton et la méthode du point fixe (4.1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

3. Combien de pas de dichotomie doit-on effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

**Exercice 4.3** L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant  $-2 < f'(x) < -1$  sur  $\mathbb{R}$ . On définit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}$  par la récurrence suivante :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n),$$

où  $\alpha > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  sont donnés.

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2. En déduire qu'il existe un unique élément  $l$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $f(l) = 0$ .

3. Montrer que si  $0 < \alpha < 1$ , la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x + \alpha f(x)$  vérifie

$$-1 < 1 - 2\alpha < g'(x) < 1 - \alpha \text{ sur } \mathbb{R}.$$

4. En déduire la convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $0 < \alpha < 1$ .

5. La suite converge t-elle pour  $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$  ?

6. Donner l'ordre de convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $0 < \alpha < 1$  en distinguant le cas  $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$ .

7. Peut-on choisir  $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$  d'un point de vue pratique ?

8. On choisit alors d'approcher  $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$  par  $\alpha_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$  et la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha_n f(x_n)$$

Quel est le nom de cette méthode itérative ? Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge quel que soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.4** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction  $g$ . (On admettra que  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  solution admet comme unique  $m \simeq 1,36$  et que  $g(m) = m$ ).
2. Comparer  $g$  à l'identité.
3. Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$x_{n+1} = g(x_n); x_0 > 0.$$

- À l'aide des graphes de  $g$  et de l'identité sur  $\mathbb{R}_+^*$ , dessiner la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
4. Expliciter (sans la vérifier) la condition nécessaire pour la convergence observée graphiquement.
  5. Écrire l'algorithme défini par la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui permet de déterminer le point fixe à une précision de  $\varepsilon$ .
  6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ . Que remarque-t-on ?
  7. Donner l'ordre de convergence de la suite.

