ÉCOLE D'INGÉNIEURS DU LITTORAL

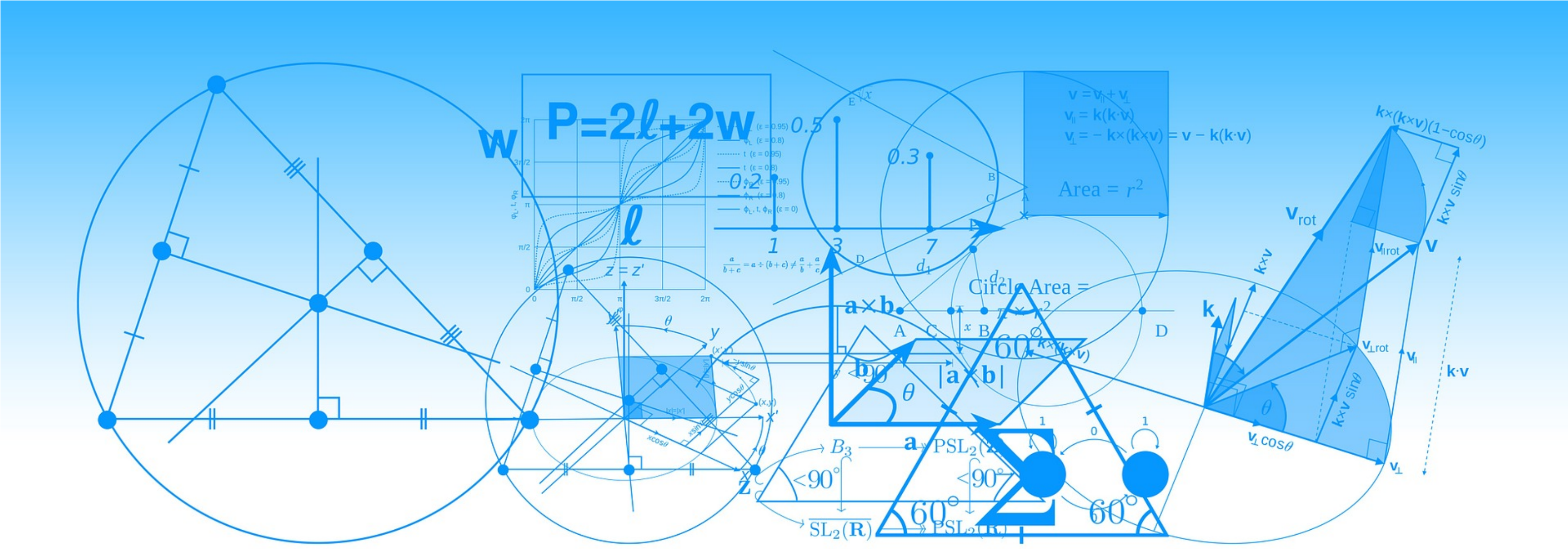
Côte d'Opale

Analyse

CPI1 - Année universitaire 2016/2017

Laurent Smoch

Table des matières



1. Les suites numériques

1.1 Notions génériques

1.1.1 Vocabulaire

Definition 1.1.1 Soit E un ensemble. On appelle suite à valeurs dans E une application de $\mathbb{N}$ dans E. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

Dans ce chapitre, nous nous préoccuperons des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous dirons aussi suites de réels). Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera typiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les entiers n sont les indices de la suite et leurs images u_n sont les termes de la suite. La suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet différent de l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. En particulier, une suite aura toujours une infinité de termes, même si ces termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la suite est $(u_n) = (1,-1,1,-1,1,\dots)$, et l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble $\{-1,1\}$.
Il existe deux manières de définir une suite de réels à partir d'une fonction :

- Définition explicite :
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = f(n)$$
où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

  ■ **Exemple 1.1**
  1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = n$
  2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$
  3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^{-n}$

  ■

- Définition par récurrence :
$$u_0\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n)$$
où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les mêmes exemples peuvent être définis par :

Exemple 1.2

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$

Definition 1.1.2

- Soit a un réel. On appelle suite arithmétique de raison a une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a$$

- Soit r un réel. On appelle suite géométrique de raison r une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r u_n$$

On vérifie aisément par récurrence qu'une suite arithmétique de raison a a pour terme général $u_n = u_0 + na$.
De même, une suite géométrique de raison r a pour terme général $u_n = u_0 r^n$.

Definition 1.1.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :

- constante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$;
- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$;
- monotone si elle est croissante ou décroissante ;
- majorée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré ;
- minorée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré ;
- bornée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné ;
- périodique si $\exists p \in \mathbb{N}^\star$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

R

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 : $(u_n)_{n\geq n_0}$. L'expression "à partir d'un certain rang" reviendra souvent dans les pages qui suivent. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété $(\mathscr{P})$ à partir d'un certain rang signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi que $(\mathscr{P})$ est vraie pour "n assez grand". Voici quelques exemples :

Definition 1.1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :

- constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$;
- croissante à partir d'un certain rang si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- périodique à partir d'un certain rang si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}^\star$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+p} = u_n$.

■ **Exemple 1.3**
- La suite $\left(E\left(\frac{4}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $n_0 = 4$.
- La suite des décimales de $\frac{1}{90}$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$.
- La suite $(|n-5|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 = 5$.
- La suite des décimales de $\frac{53}{2475}$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$.

■

R
- Quel que soit le nombre rationnel x, la suite des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est majorée tout court. En effet, si $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, M\}$$

- De même, une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

Proposition 1.1.1 Les opérations sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.
- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication : $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$
- Mulitplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Comparaison : $(u_n) \leq (v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq v_n$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : R^N muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux suites peut être nul sans que les deux suites le soient : R^N muni de l'addition et de la mutiplication est un anneau commutatif non intègre.

Definition 1.1.5 Etant donnée une suite (u_n), on appelle suite extraite ou sous-suite, une suite formée de certains termes de (u_n), c'est-à-dire une suite de la forme $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

■ **Exemple 1.4** Si (u_n) est la suite géométrique $((-2)^n)$, et $\varphi(k) = 2k$, alors $(v_k) = (4^k)$: on a extrait de la suite (u_n) la suite des termes d'indice pair. ■

1.1.2 Convergence

On dit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ (sa limite) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les u_n pour n assez grand.

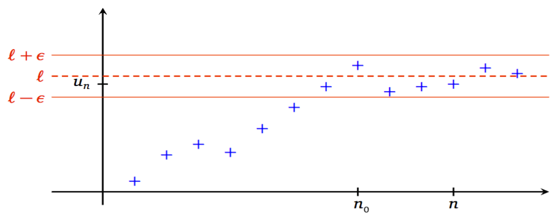
Definition 1.1.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ (ou tend vers ℓ, ou a pour limite ℓ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

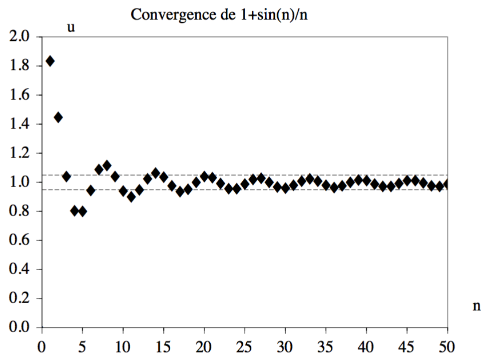
On notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ ou bien } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Notons cependant que le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ dépend de ε.



■ **Exemple 1.5** Représentons les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:



La limite est $\ell = 1$. On a :

$$|u_n - \ell| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ (sur la figure $\varepsilon = 0,05$). Posons $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ ($n_0 = 21$ pour $\varepsilon = 0,05$). Pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On constate sur la figure que $u_n \in [0,95;1,05]$ pour $n \geq 18$. ■

On étend la notion de convergence aux limites infinies de la façon suivante.

Definition 1.1.7 Soit (u_n) une suite de réels.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq -A$$

Voici quelques exemples classiques :

■ **Exemple 1.6**

- Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
  - . Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  - . Si $a = 0$, (u_n) est constante (tend vers u_0)
  - . Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suites géométriques : $(u_n) = (u_0 r^n)$
  - . Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante (tend vers 0).
  - . Si $r \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
  - . Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
  - . Si $r = 1$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  - . Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  - . Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.

- Suites de Riemann : $(u_n) = (n^\alpha)$
  . Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  . Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
  . Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

■

Proposition 1.1.2 Soit (u_n) une suite de réels.

1. Si (u_n) converge, alors sa limite est unique.
2. Si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est bornée.
3. Si pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$, et si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
5. Si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ (finie ou infinie) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration.
1. Supposons que (u_n) vérifie la définition 1.1.6 pour deux réels ℓ et ℓ' distincts. Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|\ell - \ell'|$. Alors les intervalles $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ et $[\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon]$ sont disjoints. À partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir aux deux intervalles à la fois ce qui est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que u_n reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $n \geq n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell+\varepsilon\},$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq \min\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell-\varepsilon\}.$$
3. Soit ℓ la limite. Si ℓ n'était pas un entier, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier donc aucun des u_n. Donc ℓ doit être un entier. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. L'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ ne contient qu'un seul entier, ℓ. Comme à partir d'un certain rang tous les u_n sont dans un intervalle, et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à ℓ.
4. Soit $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) \geq n_0$ pour tout $k \geq k_0$. Si tous les (u_n) sont dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.
5. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Soit k_0' tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Alors pour tout $n \geq \max\{2k_0, 2k_0'+1\}$, $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. La démonstration pour une limite infinie est analogue.

■

1.1.3 Opérations sur les limites

Lemme 1.1.3
1. La somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0.
2. Le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée converge vers 0.

Démonstration.
1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, soit n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,
$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où le résultat.

2. Si la suite (u_n) est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout entier n, $|u_n| \leq M$. Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M|v_n| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

d'où le résultat.

■

Théorème 1.1.4

1. La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.
2. Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.

Démonstration. Pour nous ramener au lemme 1.1.3, observons d'abord qu'une suite (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ admet pour limite 0.

1. Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' alors $(u_n - \ell)$ et $(v_n - \ell')$ convergent vers 0. Donc $(u_n - \ell + v_n - \ell')$ converge vers 0 d'après le point 1. du lemme 1.1.3 d'où le résultat.
2. Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', on veut montrer que $(u_n v_n - \ell\ell')$ converge vers 0. On écrit ensuite :

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'$$

Il suffit donc de montrer séparément que les deux suites $(u_n(v_n - \ell'))$ et $((u_n - \ell)\ell')$ tendent vers 0 d'après le point 1. du lemme 1.1.3. Mais chacune de ces deux suites est le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée ((u_n) est bornée car elle est convergente) d'où le résultat en utilisant le point 2. du lemme 1.1.3.

■

Le théorème 1.1.4 est l'outil de base pour étudier des convergences de suites à partir des exemples classiques de la section précédente. On utilise aussi la composition par une fonction continue. On peut donner deux définitions équivalentes de la continuité, dont l'une est parfaitement adaptée aux suites convergentes.

Definition 1.1.8 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est continue au point x si et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce cours sont continues, en tout point où elles sont définies.

■ **Exemple 1.7** Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, continue en tout point de $\mathbb{R}^\star$. Donc si une suite (u_n) converge vers $\ell \neq 0$, la suite des inverses $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. En utilisant le théorème 1.1.4, on en déduit que le quotient de deux suites convergentes converge vers le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit non nulle. ■

Si la limite de (u_n) ou celle de (v_n) est infinie, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. On les résume dans les tableaux qui suivent (les points d'interrogation désignent des indéterminations) :

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TABLE 1.1 – Limites possibles de (u_n+v_n) en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

■ Exemple 1.8

- $u_n = n$, $v_n = -\dfrac{n+1}{n}$: la suite (u_n+v_n) tend vers 0 ;
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: la suite (u_n+v_n) tend vers $-\infty$;
- $u_n = n$, $v_n = -n+(-1)^n$ la suite (u_n+v_n) ne converge pas.

■

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'=0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell=0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TABLE 1.2 – Limites possibles de (u_nv_n) en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

1.1.4 Convergence des suites monotones

La notion de limite est liée aux notions de borne supérieure (plus petit des majorants) et borne inférieure (plus grand des minorants). Étant donnée une suite (u_n), on appellera borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités respectives :

$$\sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\} \text{ et } \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$$

Théorème 1.1.5

1. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
4. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Rappelons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie. Si l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est majoré, il admet une borne supérieure finie qu'on note ℓ. Puisque ℓ est le plus petit des majorants, pour tout $\varepsilon>0$, $\ell-\varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc il existe n_0 tel que $\ell-\varepsilon\le u_{n_0}\le\ell$. Mais si (u_n) est croissante alors pour tout $n\ge n_0$,

$$\ell-\varepsilon\le u_{n_0}\le u_n\le\ell$$

donc (u_n) converge vers ℓ.
Si la suite n'est pas majorée, pour tout A, il existe n_0 tel que $u_{n_0}\ge A$. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n\ge n_0$,

$$A\le u_{n_0}\le u_n$$

donc la suite (u_n) tend vers l'infini.
Si la suite (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)$. ■

Definition 1.1.9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Elles sont dites adjacentes si
1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $(v_n - u_n)$ tend vers 0.

Proposition 1.1.6 Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration. Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante alors $(v_n - u_n)$ est décroissante. Si $(v_n - u_n)$ tend vers 0, alors pour tout n, $v_n - u_n \geq 0$. Donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge également. Comme la différence tend vers 0, les deux limites sont égales (cf. théorème 1.1.4). ■

■ **Exemple 1.9** Posons $u_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. La suite (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

La différence $v_n - u_n$ tend vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite à savoir le nombre $e \simeq 2,718$. Les deux suites fournissent un encadrement extrêmement précis de e, pour un nombre de termes calculés relativement faible. Pour $n = 10$, la différence $v_n - u_n$ vaut $2,76 \times 10^{-8}$, et pour $n = 100$, elle vaut $1,07 \times 10^{-160}$.
Ce même encadrement est aussi un moyen de montrer que e est irrationnel. Supposons en effet que e s'écrive $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers. On aurait $u_p < \frac{p}{q} < v_q$, soit :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{qq!}$$

Multiplions ces inégalités par $qq!$. Le nombre entier $pq!$ devrait être encadré strictement par deux entiers consécutifs, ce qui est impossible. ■

1.1.5 Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 1.1.7 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration. Supposons $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons ℓ cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in \left[\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right]$ donc $u_n - v_n > 0$ ce qui contredit l'hypothèse. ■

Le théorème précédent ne permet cependant pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Théorème 1.1.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telle ques (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$, alors u_n tend vers 0.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$,

$$|u_n| \leq |v_n| \leq \varepsilon$$

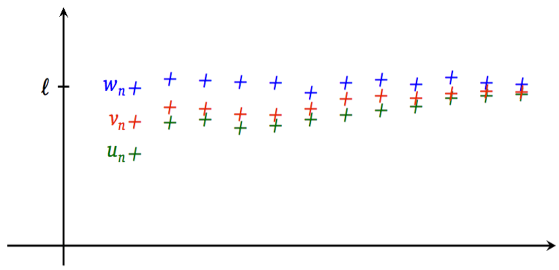
d'où le résultat. ■

On en déduit le corollaire suivant appelé "théorème des gendarmes"

Corollaire 1.1.9 — Théorème des gendarmes. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

alors (v_n) converge vers ℓ.



Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.1.8 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. ■

■ **Exemple 1.10** Soit $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+2}$. Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+2}$$

Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers 1 donc $\lim u_n = 1$. ■

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies :

Théorème 1.1.10 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
1. Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.
2. Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Démonstration. Pour tout A, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n \geq A$ donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. La démonstration de l'autre affirmation est analogue. ■

Definition 1.1.10 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels.
1. On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M|v_n|$$

On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit "u_n est un grand O de v_n".

2. On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$
On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit "u_n est un petit o de v_n".
3. On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$
On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit "u_n est équivalent à v_n"

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une suite (v_n) non nulle ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport $\frac{u_n}{v_n}$.

Proposition 1.1.11 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que les v_n sont tous non nuls. Alors :

1. (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$
2. (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0 :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$
3. (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1 :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon$$

■ **Exemple 1.11**
- $\sqrt{4n^2+1} = O(n)$, $\sqrt{4n^2+1} = o(n^2)$, $\sqrt{4n^2+1} \sim 2n$
- L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$
■

Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple :

■ **Exemple 1.12** Soit le terme général $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}$. Comme $1+n = o(n^2)$, $n^2+n+1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$ donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$. ■

Attention, il ne faut pas utiliser des équivalents pour des sommes.

■ **Exemple 1.13** On a $u_n = n + (-1)^n \sim n$ et $v_n = -n + (-1)^n \sim -n$. Pourtant, $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0. ■

Voici trois résultats de comparaison de suites tendant vers l'infini :

Théorème 1.1.12 Soit a un réel strictement positif et r un réel strictement supérieur à 1. Alors :
1. $r^n = o(n!)$
2. $n^\alpha = o(r^n)$
3. $\ln n = o(n^a)$

Démonstration. 1. Écrivons la rapport de r^n à $n!$ comme suit :

$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k}$$

La suite $\left(\frac{r}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\frac{r}{k} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, pour $n \geq k_0$,

$$\frac{r^n}{n!} \leq \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$$

La suite $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$ tend vers 0 d'où le résultat.

2. Posons $r = 1+h$ avec $h > 0$, et écrivons la formule du binôme de Newton :

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k$$

Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on peut minorer r^n par $\binom{n}{k} h^k$. Fixons $k = E(a)+1$. Pour $n > 2k$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être minoré comme suit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{k!}$$

Donc pour tout $n > 2k$, on a

$$\frac{n^a}{r^n} < \left(\frac{2^k k!}{h^k}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-a}$$

Le membre de droite tend vers 0 car, par définition, $k = E(a)+1 > a$.

3. Pour tout $n > 0$, on pose $k_n = E(\ln n)$ et $\alpha_n = \ln n - k_n$. La suite (k_n) est une suite d'entiers qui tend vers l'infini car $k_n > \ln n - 1$. Les α_n sont des réels compris entre 0 et 1. Écrivons

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{k_n + \alpha_n}{e^{a(k_n+\alpha_n)}} \leq \frac{k_n}{(e^a)^{k_n}} + \frac{1}{(e^a)^{k_n}}$$

Dans le membre de droite, le premier terme peut-être vu comme une suite extraite de la suite $\frac{n}{r^n}$, avec $r = e^a$. Nous avons vu que cette suite tend vers 0 au point 2. Donc toute suite extraite tend aussi vers 0. Le dénominateur du second terme tend vers l'infini. Donc $\frac{\ln n}{n^a}$ est majoré par la somme de deux suites qui convergent vers 0. D'où le résultat.

■

Il est bon d'avoir en tête une échelle des "infiniment petits" et des "infiniment grands", c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. Infiniment petits :

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln n} \ll \frac{1}{\ln(\ln n)} \ll 1$$

2. Infiniment grands :

$$1 \ll \ln(\ln n) \ll \ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

1.1.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

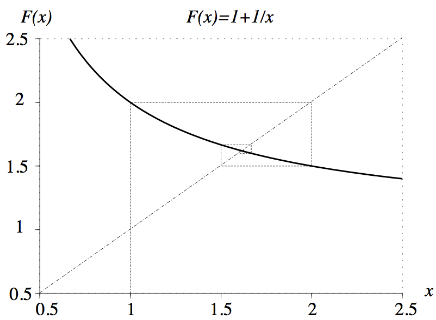
La suite est celle des itérés successifs de l'application F à partir de u_0 :

$$u_1 = F(u_0),\ u_2 = F(F(u_0)) = F \circ F(u_0),\ u_3 = F \circ F \circ F(u_0), \ldots$$

On notera F^n la composée de F avec elle même n fois :

$$u_n = F^n(u_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(u_0)$$

Il existe un moyen simple de visualiser les premiers termes de la suite $(F^n(u_0))$ à partir du graphe de la fonction F, représenté dans le plan. Portons u_0 en abscisse et traçons le segment vertical allant de $(u_0, 0)$ à $(u_0, F(u_0))$. Traçons ensuite le segment horizontal rejoignant la première bissectrice, de $(u_0, F(u_0))$ à $(F(u_0), F(u_0))$. L'abscisse du nouveau point est u_1. On itère alors le procédé en traçant alternativement des segments verticaux et horizontaux. On obtient ainsi une sorte de "toile d'araignée" :



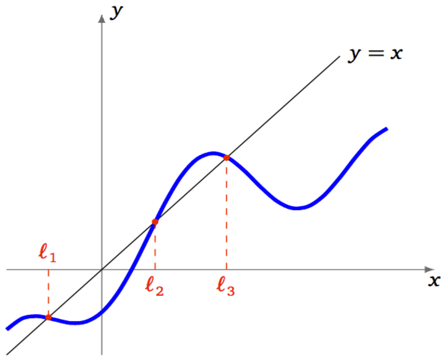
Cette représentation graphique suffit pour se faire une idée du comportement qualitatif d'une suite récurrente réelle. Elle permet de détecter les convergences ou divergences ainsi que les comportements oscillants.

Pour étudier la suite (u_n), le premier travail consiste à identifier les limites possibles. Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (u_{n+1}), qui est une suite extraite, converge vers la même limite ℓ.

Proposition 1.1.13 Si F est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :

$$F(\ell) = \ell$$

On dit que ℓ est un point fixe de F, car si $u_0 = \ell$, alors la suite est constante. Il peut se faire que f ait plusieurs points fixes. Le comportement de la suite u_n (monotonie, convergence ou non vers un point fixe), dépend de u_0.



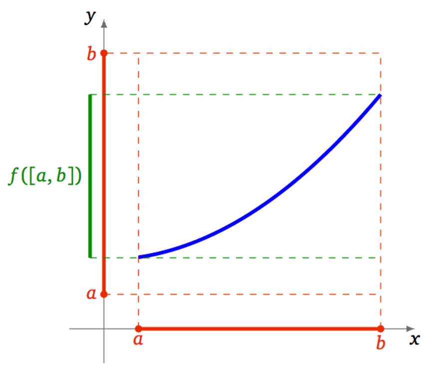
Démonstration. Lorsque $n \to +\infty$, $u_n \to \ell$ et donc $u_{n+1} \to \ell$. Comme $u_n \to \ell$ et que F est continue, la suite $(F(u_n)) \to F(\ell)$. La relation $u_{n+1} = F(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = F(\ell)$. ■

Nous allons étudier en détail deux cas particuliers, celui ou la fonction est croissante, puis celui ou la fonction est décroissante.

Cas d'une fonction croissante

Proposition 1.1.14 Si $F : [a,b] \to [a,b]$ est une fonction continue et croissante, alors quel que soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a,b]$ vérifiant $F(\ell) = \ell$.

R Il faut nécessairement vérifier que $F([a,b]) \subset [a,b]$



Démonstration. La preuve est une conséquence des résultats précédents. Par exemple si $u_1 \geq u_0$ alors la suite (u_n) est croissante, comme par ailleurs elle est majorée par b, elle converge vers un réel. Par la proposition 1.1.13, on a $F(\ell) = \ell$. Si $u_1 \leq u_0$, (u_n) est une suite décroissante et minorée par a, et la conclusion est la même. ■

Cas d'une fonction décroissante

Proposition 1.1.15 Soit $F : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $F \circ F(\ell) = \ell$.
- La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $F \circ F(\ell') = \ell'$.

R Il se peut que $\ell = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction F étant décroissante, la fonction $F \circ F$ est croissante. Et on applique la proposition 1.1.14 à la fonction $F \circ F$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = F \circ F(u_0)$, $u_4 = F \circ F(u_2)$,... ■

Traitons pour conclure cette section l'exemple historique sans doute le plus célèbre : les rapports des nombres de Fibonacci. Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Voici les 20 premiers :

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765

La suite (a_n) est une suite croissante d'entiers, elle ne s'annule pas. Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

C'est une récurrence du type $u_{n+1} = F(u_n)$, avec $F(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. La figure précédente représente les premières valeurs de u_n en toile d'araignée. Pour étudier (u_n), commençons par chercher les points fixes de l'application F, en résolvant l'équation

$$1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0$$

L'équation a deux solutions distinctes $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La première solution, $\phi \simeq 1{,}618$, est le célèbre nombre d'or ; on le retrouve (paraît-il) un peu partout, des pyramides d'Egypte aux coquilles de nautiles en passant par la Joconde. Comme u_n reste positif, la seule limite possible pour (u_n) est ϕ. Nous allons démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.16

1. La suite des termes pairs (u_{2k}) est croissante
2. La suite des termes impairs (u_{2k+1}) est décroissante
3. Chacune de ces deux suites converge vers ϕ (elles sont adjacentes). En d'autres termes, les termes u_n approchent ϕ, alternativement à gauche et à droite.

Démonstration. En soustrayant les deux équations $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, on obtient : $u_{n+1} - \phi = \dfrac{\phi - u_n}{u_n \phi}$. Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ sont de signe opposé. Puisque $u_0 < \phi$, on obtient par récurrence que pour tout $k \geq 1$: $u_{2k} < \phi < u_{2k+1}$. On peut aussi exprimer $u_{n+2} - \phi$ en fonction de $u_n - \phi$:

$$u_{n+2} - \phi = \frac{u_n - \phi}{\phi^2 (u_{n+1})}$$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$. On en déduit par récurrence que pour les termes pairs :

$$0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0)$$

Pour les termes impairs,

$$0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\varphi^2}(u_{2k+1} - \varphi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi)$$

Donc la suite des termes pairs est croissante et la suite des termes impairs décroissante. Mais de plus :

$$\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k}) \text{ et } u_{2k+1} - \varphi = O(\phi^{-2k})$$

Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers ϕ, car $\phi > 1$, donc ϕ^{-2k} tend vers 0. ■

1.1.7 Suites de Cauchy

Est-il possible de savoir si une suite converge (vers une limite finie), sans connaître sa limite ? La notion de suite de Cauchy répond à cette question. Elle traduit l'idée intuitive que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

Definition 1.1.11 Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ les distances entre les termes $|u_{n+k} - u_n|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, |u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon$$

Il n'est pas surprenant qu'une suite convergente soit une suite de Cauchy.

Théorème 1.1.17 Si une suite de réels converge vers une limite finie, alors c'est une suite de Cauchy.

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, écrivons :

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+k} - \ell| + |\ell - u_n|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

L'intérêt de cette notion est qu'elle caractérise les suites réelles convergentes : la réciproque du théorème précédent est vraie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.18 Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

1.2 Exercices

1.2.1 Exemples de calcul de limites de suites

Exercice 1.1 Calculer les limites (éventuelles) des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
2. $(-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$
3. $\dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$
4. $\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3-1}$
5. $n^2 \ln \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$
6. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
7. $n^2 \sin \dfrac{1}{n^\alpha}$
8. $\dfrac{\sum_{k=0}^n (3k+1)}{\sum_{k=0}^n (2k+3)}$
9. $\dfrac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$
10. $\sqrt[n]{n^2}$
11. $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$
12. $n(\sqrt[n]{5} - 1)$
13. $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$
14. $(\operatorname{th} n)^n$
15. $\dfrac{C_n^k}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N}$ fixé$)$

■

Exercice 1.2
1. Déterminer les constantes a, b, c telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 1.3 S'inspirer de l'exercice 1.2 pour calculer
1. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 1.4 Calculer les limites (éventuelles) des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\frac{\sin n}{n}$
2. $\left(\frac{1}{3}\sin n\right)^n$
3. $\sqrt[n]{3+\cos n}$
4. $\frac{n!}{n^n}$
5. $\frac{1}{n^\alpha}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ (α réel >1)
6. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
7. $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
8. $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
9. $\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$
10. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$
11. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx),\ x \in \mathbb{R}$
12. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} kE(kx),\ x \in \mathbb{R}$
13. $\prod_{k=0}^{n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right)$
14. $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Exercice 1.5 Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+1}| \leq k|u_n|)$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Application : Établir que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Exercice 1.6
1. Établir que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

2. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

■

Exercice 1.7

1. Établir que $\forall x\in[0,1],\ x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x$
2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}\ \text{et}\ \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.)

■

Exercice 1.8 Établir que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
(On rappelle que $\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). ■

1.2.2 Convergence, divergence

Exercice 1.9 Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+3}=\frac{3}{2}$.
■

Exercice 1.10 Montrer que si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors (u_n+v_n) diverge. ■

Exercice 1.11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{Z}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. ■

Exercice 1.12 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à éléments dans $[0,1]$, telles que $\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=1$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1. ■

Exercice 1.13 Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent . Montrer que (u_n) converge. ■

Exercice 1.14 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty}n(u_{n+1}-u_n)=1$. Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ (on rappelle que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$). ■

Exercice 1.15 Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^\star$ telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $\ell<1$ alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Reprendre les questions 1. et 2. en supposant que $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers ℓ.

■

Exercice 1.16 Montrer que les suites $(u_n = \cos n)$ et $(u_n = \sin)$ sont divergentes. On commencera par démontrer que l'existence de l'une des limites entraîne celle de l'autre. On pourra montrer ensuite, en considérant $u_{n+1} + u_{n-1}$ et $v_{n+1} + v_{n-1}$, que l'existence des deux limites entraîne une contradiction. ■

1.2.3 Suites extraites

Exercice 1.17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2},\ 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Exercice 1.18 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n \end{cases}$ ■

Exercice 1.19

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.
2. Reprendre la même question en supposant que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent.

■

1.2.4 Suites monotones. Suites adjacentes

Exercice 1.20 Étudier la nature des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$	4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$	5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$	6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

■

Exercice 1.21

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$
2. On pose : $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
3. En déduire que la suite de terme général $x_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ admet une limite C comprise entre 0 et 1 (C = constante d'Euler).

■

Exercice 1.22 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\forall \alpha \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2 \Rightarrow (1-\alpha)^n > 1-n\alpha)$.
2. En prenant $\alpha = \frac{1}{n^2}$, montrer que la suite (u_n) est croissante ;
3. En prenant $\alpha = \frac{1}{6n+1}$, montrer que la suite (u_n) est majorée.
4. Conclure.

■

Exercice 1.23 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (intégrale de Wallis).

1. Montrer que la suite (I_n) est convergente. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}\sin\lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. Déduire des questions précédentes que :

   a) $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ b) $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$ c) $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

■

Exercice 1.24 Soit (u_n) une suite réelle monotone. Montrer que si (u_n) admet une suite extraite convergente, alors (u_n) converge. ■

Exercice 1.25 (Limite inférieure, limite supérieure)
À toute suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les deux suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} v_n & = & \inf\{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\} \\ w_n & = & \sup\{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\} \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée. Donc :
      - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel appelé limite inférieure de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n$.
      - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel appelé limite supérieure de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.

   (b) Déterminer les limites inférieure et limite supérieure de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants :

   i) $u_n = \frac{1}{n+1}$ ii) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ iii) $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.
   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

■

Exercice 1.26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. ■

Exercice 1.27 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{v_n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est comprise entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{61}{36}$.

Exercice 1.28 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que e est irrationnel.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n \leq e - u_n \leq v_n - u_n)$, et en déduire $e - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nn!}$.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3})$, et en déduire $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 n!}$.
5. Calculer une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Exercice 1.29 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $v_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
2. Établir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est positive.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, et plus généralement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{np+k}}$ $(p \in \mathbb{N}^\star)$.

Exercice 1.30 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $\sigma_n = S_{2n}$ et $\sigma'_n = S_{2n+1}$. Montrer que les suites (σ_n) et (σ'_n) sont adjacentes. Conclure.

Exercice 1.31 Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^{\star 2}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$
2. $0 < q \leq p$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^{\star 2}$, $u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$, $v_{n+1} = \frac{pv_n + qu_n}{p+q}$
3. $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + v_n^2}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n^2 + v_n^2}$

1.2.5 Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 1.32 $(u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 fixé, f croissante) Étudier les suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 0,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
2. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$
3. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$
4. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}$
5. $u_0 = \frac{\pi}{4},\ u_{n+1} = 1 - \cos u_n$
6. $u_0 = 0,\ u_{n+1} = e^{au_n}$ $(a > 0)$

Exercice 1.33 ($u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 fixé, f décroissante) Étudier les suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$
2. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$
3. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{a}{u_n^2}$ $(a > 0)$
4. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = (1-u_n)^2$
5. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$
6. $u_0 = 2,\ u_{n+1} = \frac{1}{3+u_n}$

■

1.2.6 Suites de Cauchy

Exercice 1.34 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Montrer que (u_n) converge. ■

Exercice 1.35

1. Démontrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \int_{n}^{n+p} \frac{dx}{x}$.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln x$ est de Cauchy.

■

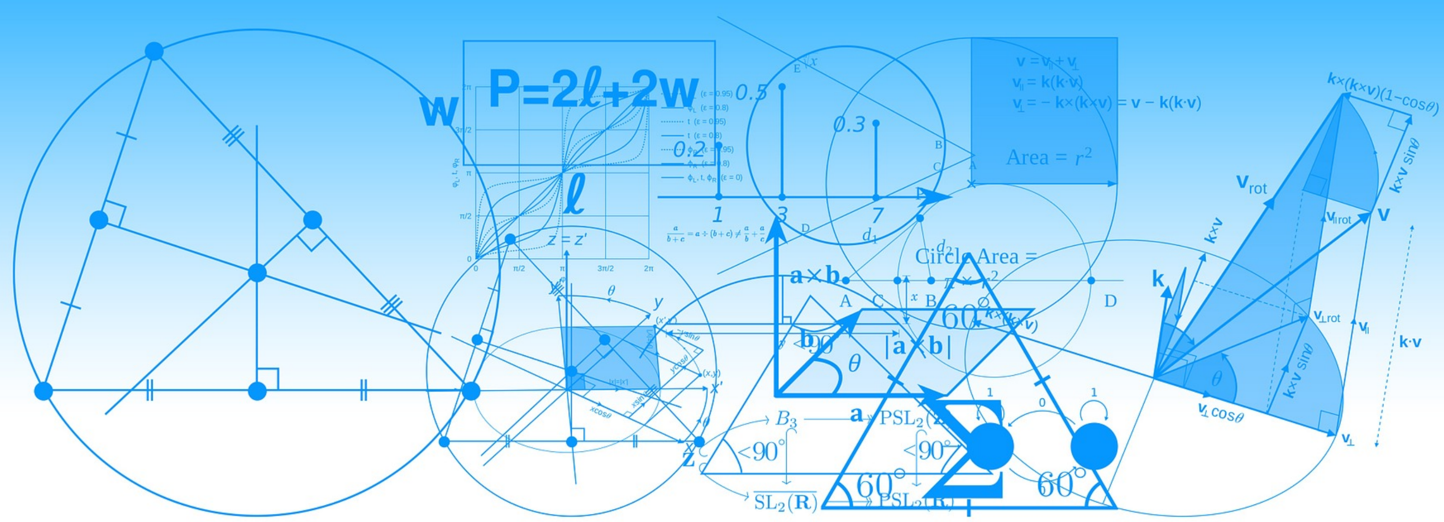
Exercice 1.36 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2}$, où l'application $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ est supposée injective. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (on pourra considérer $u_{2n} - u_n$). ■

Exercice 1.37 Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{-1,+1\}$. On lui associe la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{2^n}$$

1. Montrer que (a_n) converge vers un réel de l'intervalle $[-2,2]$.
2. (a) Vérifier que $\forall k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\sin(\frac{\pi}{4} + k) = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sin k}$.
   (b) On considère alors
   $$x_n = \varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n\sqrt{2}}}} \quad \text{et} \quad y_n = 2\sin(\frac{\pi}{4}a_n)$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$. En déduire que (x_n) converge.
   (c) Étudier le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1$. Retrouver directement ce résultat en remarquant que (x_n) peut être définie par une relation de récurrence simple.

■



2. Les fonctions usuelles

2.1 Théorèmes d'analyse admis

Théorème 2.1.1 — Fonctions constantes. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

Théorème 2.1.2 — Théorème de la bijection. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :
- continue sur I,
- strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection récirpoque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

Théorème 2.1.3 — Dérivation de la bijection réciproque. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :
- f est strictement monotone sur l'intervalle I,
- f est dérivable au point x_0,
- $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors, la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si
- $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I,
- f est dérivable sur l'intervalle I,
- $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$,

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

2.2 Fonctions logarithme, exponentielle, puissance

2.2.1 Fonction logarithme

Definition 2.2.1 On appelle fonction logarithme, toute fonction $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ dérivable, différente de la fontion nulle, qui vérifie la relation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

Théorème 2.2.1 Les fonctions logarithmes sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k \times \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

2.2.2 Fonction logarithme népérien

Definition 2.2.2 Si $k = 1$, on appelle logarithme népérien ou logarithme naturel la fonction logarithme obtenue. Il est caractérisé par $\ln e = 1$.

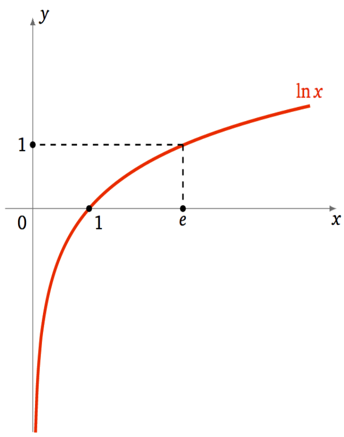
(R) Soit ℓ une fonction logarithme alors il existe $k \in \mathbb{R}^\star$ telle que $\ell(x) = k \times \ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Proposition 2.2.2 Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (pour tout } x > 0\text{) et } \ln 1 = 0.$$

Propriété 2.2.3 La fonction logarithme népérien vérifie (pour tous $x, y > 0$) les propriétés suivantes :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln x$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- la fonction ln est concave et $\ln x \leq x - 1$ (pour tout $x > 0$)



2.2.3 Fonction logarithme base a

Toute fonction logarithme ℓ est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$, on a

$$\ell(x) = 1 \Leftrightarrow k\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{k} \text{ car } k \neq 0$$

Donc $\frac{1}{k}$ admet un unique antécédent pour ln à savoir a.

Definition 2.2.3 Le nombre a est appelé base de la fonction logarithme ℓ. La fonction ℓ est alors notée $\log_a$.

Definition 2.2.4 Pour $x > 0$, on définit le logarithme en base $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

de sorte que $\log_a a = 1$.

Propriété 2.2.4 $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a les propriétés suivantes :

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$
- $\log_a(x^n) = n\log_a x$

R

- Pour $a = 10$, on obtient le logarithme décimal $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique, on utilise l'équivalence :
$$x = 10^y \Leftrightarrow y = \log_{10} x$$
- En informatique intervient le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.
- La base de ln est e : $\ln e = 1$.

Étudions les variations de la fonction $\log_a$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

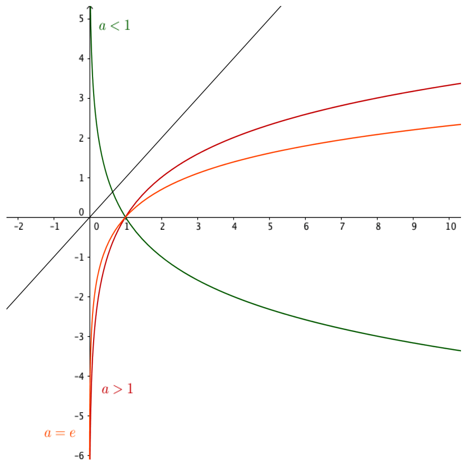
- $0 < a < 1$, $\ln a < 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\log_a' x$		$-$	
variations de $\log_a$	$+\infty$	0	$-\infty$

- $1 < a$, $\ln a > 0$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
signe de $\log_a' x$		$+$	
variations de $\log_a$	$-\infty$	0	$+\infty$

On en déduit les graphiques qui suivent :

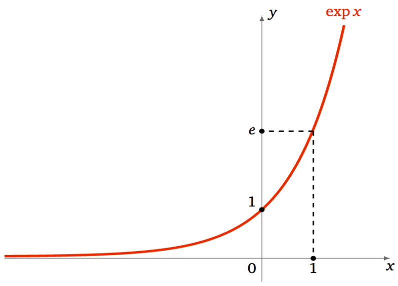


R Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$, (Ox) est une branche parabolique.

2.2.4 Fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $I =]0, +\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $J = f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Definition 2.2.5 La bijection réciproque de ln $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



Proposition 2.2.5 La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x + y) = \exp x \times \exp y$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$
- la fonction exponentielle est dérivable et $(\exp x)' = \exp x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (elle satisfait donc l'équation différentielle $f' = f$) (*)
- la fonction exponentielle est convexe et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp x \geq 1 + x$ (l'inégalité est stricte si $x \in \mathbb{R}^\star$)
- on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x \exp x = 0$.

R On retrouve (*) de la manière suivante : comme la fonction ln est dérivable sur $I =]0,\infty[$, et que $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) \neq 0$, sa bijection réciproque est dérivable sur $f(I) = J = \mathbb{R}$ avec $((\ln)^{-1})' = \dfrac{1}{(\ln)' \circ ((\ln)^{-1})}$.

2.2.5 Fonction exponentielle base a

Lorque $a > 0$ et $a \neq 1$, le logarithme en base a est une fonction f_a continue sur $I = \mathbb{R}_+^\star$, et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection, il réalise une bijection de I vers $J = f_a(I) = \mathbb{R}$. On note $\exp_a$ sa bijection réciproque (qui est donc continue sur $\mathbb{R}$, de même sens de variation que f_a).

Definition 2.2.6 On définit pour $a > 0$, l'exponentielle de base a :

$$\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x \ln a) \end{cases}$$

Proposition 2.2.6 L'exponentielle de base a vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp_a(x+y) = \exp_a x \times \exp_a y$$

Comme la fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f_a'(x) \neq 0$, la fonction $\exp_a$ est dérivable sur l'intervalle $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in J = \mathbb{R}, (\exp_a x)' = \ln a \exp_a x$$

Études les variations de la fonction $\exp_a$:

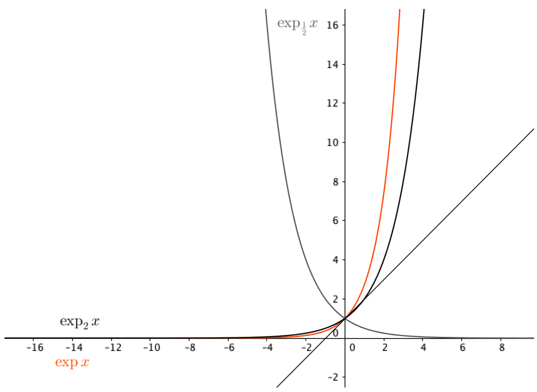
- $0 < a < 1$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp_a' x$		$-$	
variations de $\exp_a$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

- $a > 1$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $\exp_a' x$		$+$	
variations de $\exp_a$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

On en déduit les graphiques qui suivent :



R

- La droite d'équation $y = x+1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle.
- On a $\exp_e = \exp$.
- On note aussi $\exp x$ par e^x (puissance x-ième de $e = \exp 1 \simeq 2,718$, le nombre qui vérifie $\ln e = 1$) ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$.

Notation 2.1. *Pour tout reél x et tout nombre $a \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $a^x = \exp_a x$.*

Propriété 2.2.7 $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $\forall b \in \mathbb{R}_+^\star \backslash \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, l'exponentielle base a vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp_a(x+y) = \exp_a x \times \exp_a y \Leftrightarrow a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^x \times b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

2.2.6 Fonction puissance

Definition 2.2.7 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance par :

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction composée, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

En notant $I =]0,+\infty[$,

- si $\alpha = 0$, f_α est constante et vaut 1,
- si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur I,
- si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur I.

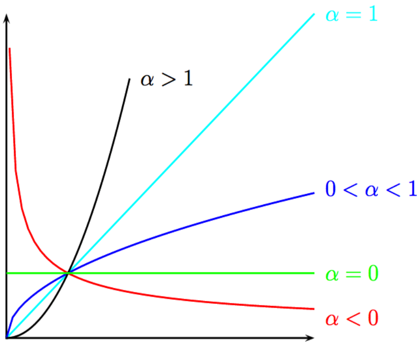
Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger f_α par continuité en en posant $f_\alpha(0) = 0$. Étudions la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée (encore notée f_α) :

- si $\alpha > 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$,
- si $\alpha = 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 1$,
- si $0 < \alpha < 1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star$, f_α est continue sur $I =]0,+\infty[$ et strictement monotone sur I, elle est bijective de I vers $J =]0,+\infty[$. On montre alors que

$$f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$$

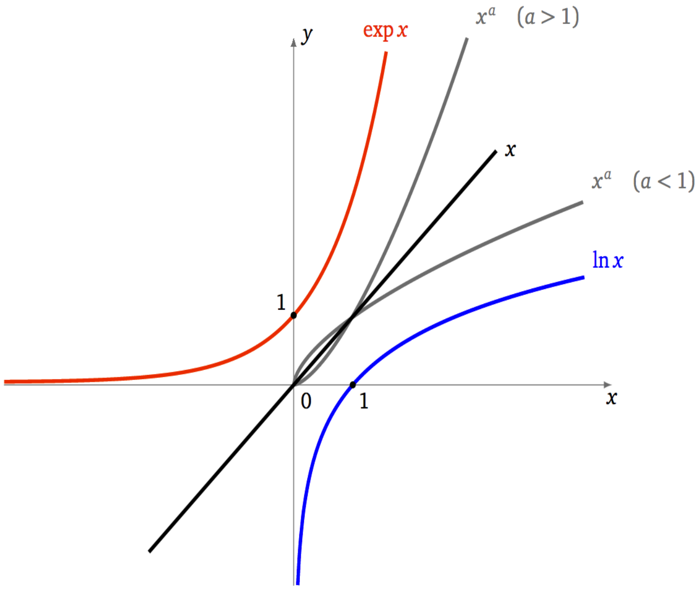
On a les graphiques suivants en fonction des valeurs de α :



Propriété 2.2.8 Soient $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction puissance vérifie les propriétés suivantes :

- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a \ln x$

Pour terminer cette section, on peut rassembler sur un même graphe les courbes représentatives des fonctions logarithme, exponentielle et puissance :



2.3 Fonctions circulaires (ou trigonométriques) inverses (ou réciproques)

2.3.1 Fonction arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

On a par définition de la bijection réciproque les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.1

- $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$, $\forall x \in [-1,1]$
- $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$, $\forall x \in [0,\pi]$
- $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$
- $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\forall x \in [-1,1]$, $x \neq 0$

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.2 si $x \in [0,\pi]$, $\cos x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Arccos} y$

Propriété 2.3.3

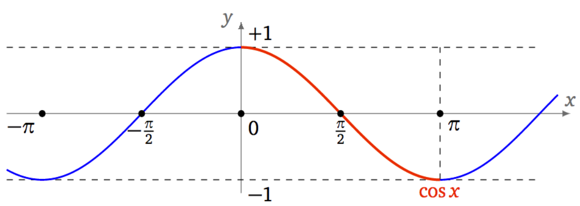
- Arccos est continue sur $[-1,1]$,
- Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$,
- $\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$ (le point de coordonnées $(0,\frac{\pi}{2})$ est centre de symétrie de la courbe représentative de Arccos,
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $(\operatorname{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

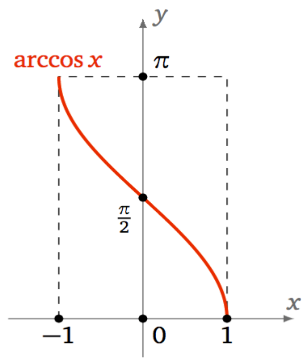
  (Donc, $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{Arccos} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arccos :

x	-1		1
signe de $(\operatorname{Arccos})'(x)$	$\Vert\ -\infty$	$-$	$-\infty\ \Vert$
variations de Arccos	π	$\searrow$	0

et en déduire le graphe associé :





2.3.2 Fonction arcsinus

La restriction

$$\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

est une bijection (elle est continue et strictement croissante).

Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\text{Arcsin} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

On a par définition de la bijection réciproque les propriétés suivantes :

Propriété 2.3.4

- $\sin(\text{Arcsin}\,x) = x$, $\forall x \in [-1,1]$,
- $\text{Arcsin}(\sin x) = x$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- $\cos(\text{Arcsin}\,x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$,
- $\tan(\text{Arcsin}\,x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in [-1,1[$.

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.5 si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = y \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}\,y$

Propriété 2.3.6

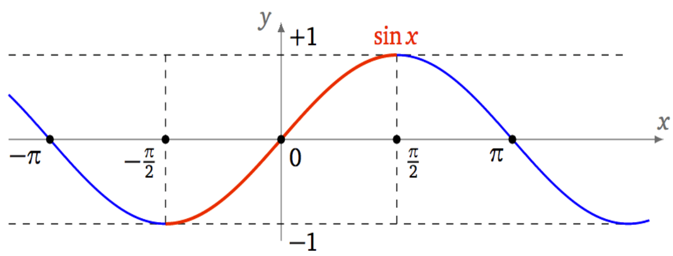
- Arcsin est continue sur $[-1,1]$,
- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$,
- $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}\,x$ (l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de Arcsin),
- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

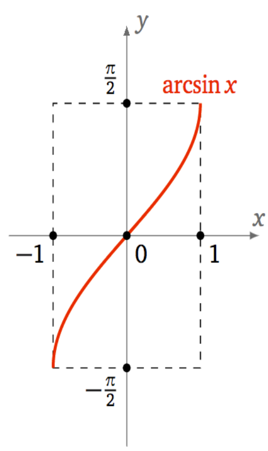
  (Donc, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{Arcsin}\,x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arcsin :

x	-1		0		1
signe de $(\text{Arcsin})'(x)$	$\|$	$+\infty$	$+$	$+\infty$	$\|$
variations de Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

et en déduire le graphe associé :





Proposition 2.3.7 $\forall x \in [-1,1]$,

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

2.3.3 Fonction arctangente

La restriction

$$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

est une bijection (elle est continue et strictement croissante). Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

On a par définition de la bijection réciproque :

Propriété 2.3.8

- $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
- $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Les deux premières propriétés permettent d'écrire l'équivalence fondamentale suivante :

Théorème 2.3.9 si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Arctan} y$

Propriété 2.3.10

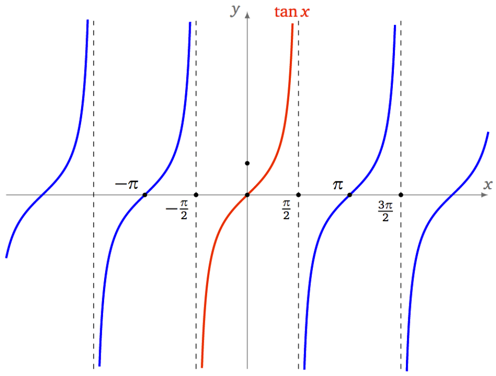
- Arctan est continue sur $\mathbb{R}$,
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan} x$ (l'origine est centre de symétrie de la courbe représentative de Arctan),
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

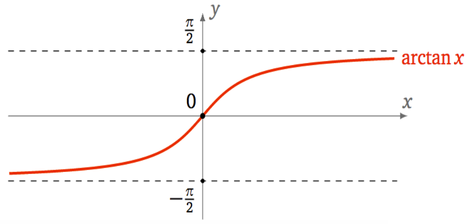
  (Donc $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Arctan} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.)

À l'aide de sa dérivée, on peut dresser le tableau de variations de Arctan :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $(\operatorname{Arctan})'(x)$		+		+	
variations de Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

et en déduire le graphe associé :





On peut conclure cette section avec le résultat suivant :

Proposition 2.3.11 $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \varepsilon \dfrac{\pi}{2}$, $(\varepsilon = \operatorname{sgn}(x))$

2.4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

2.4.1 Fonctions hyperboliques

Definition 2.4.1 Pour $x \in \mathbb{R}$,

- le cosinus hyperbolique est défini par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- le sinus hyperbolique est défini par :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Le sinus et le cosinus hyperboliques vérifient les propriétés suivantes :

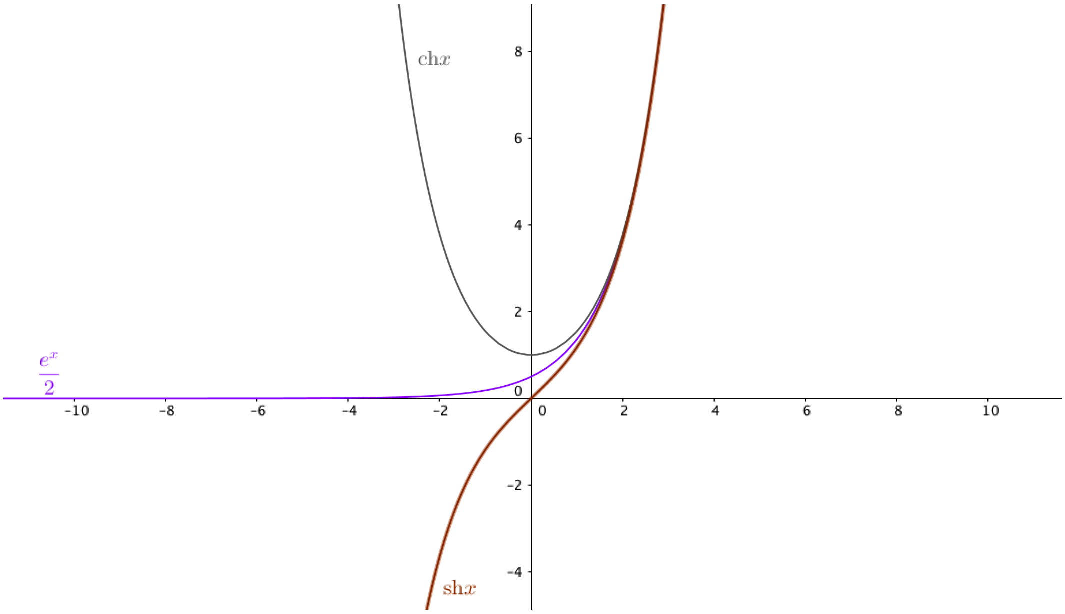
Propriété 2.4.1

- $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$
- $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$
- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- sh et ch sont continues sur $\mathbb{R}$,
- ch est une fonction paire, sh est une fonction impaire.
- ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$ et $(\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x$,

On en déduit aisément les variations des deux fonctions :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $(\operatorname{sh})'(x)$		$+$	
variations de sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
signe de $\operatorname{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
variations de ch	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

ainsi que les graphes associés :



R

- $\mathrm{sh}\,0 = 0$ et $\mathrm{ch}\,0 = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}\,x \leq \frac{e^x}{2} \leq \mathrm{ch}\,x \text{ et } \mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, la courbe $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes $y = \mathrm{sh}\,x$ et $y = \mathrm{ch}\,x$ et on a de fait la position des courbes par rapport à la courbe asymptote.

Definition 2.4.2 La fonction tangente hyperbolique est définie par :

$$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

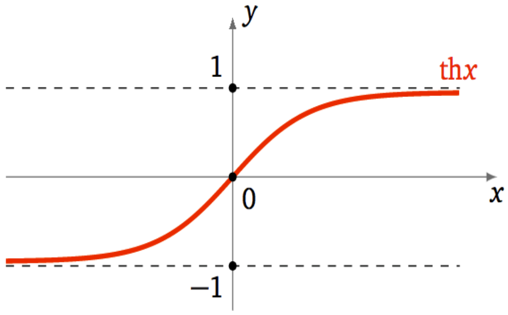
Propriété 2.4.2 La tangente hyperbolique a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{th}\,x = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$,
- th est continue sur $\mathbb{R}$,
- th est impaire,
- th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{th})'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$.

On déduit du dernier résultat le tableau de variations de th :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
signe de $(\mathrm{th})'(x)$	$+$
variations de th	$-1 \nearrow 0 \nearrow 1$

ainsi que le graphe associé :



On peut citer enfin quelques résultats de trigonométrie hyperbolique :

Propriété 2.4.3 Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a alors :

- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$
- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

2.4.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante, vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$. Elle réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ ves $J = \mathbb{R}$. On appelle $\operatorname{Argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$ sa bijection réciproque.

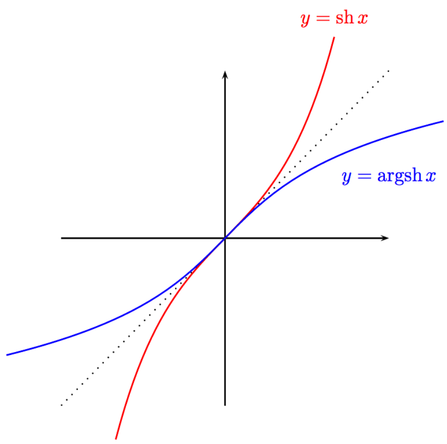
Propriété 2.4.4 La fonction Argsh vérifie les propriétés suivantes :

- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue,
- Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{Argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- on a l'expression logarithmique $\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,
- on en déduit que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{Argsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argsh le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $(\operatorname{Argsh})'(x)$	$+$	
variations de Argsh	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ainsi que le graphe associé :



Fonction argument cosinus hyperbolique

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante, vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$. Elle réalise donc une bijection strictement croissante de I vers $J = [1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est Argch : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$.

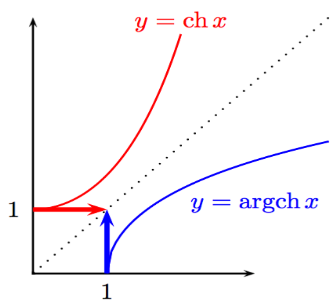
Propriété 2.4.5 La fonction Argch vérifie les propriétés suivantes :

- Argch : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante et continue,
- Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, et $\forall x \in]1, +\infty[$, $(\operatorname{Argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
- on a l'expression logarithmique $\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$,
- on en déduit la primitive : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{Argch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argch le tableau de variations suivant :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
signe de $(\operatorname{Argch})'(x)$	$+$
variations de Argch	$0 \nearrow +\infty$

ainsi que le graphe associé :



Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction th réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $J =]-1, 1[$. On note Argth $:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

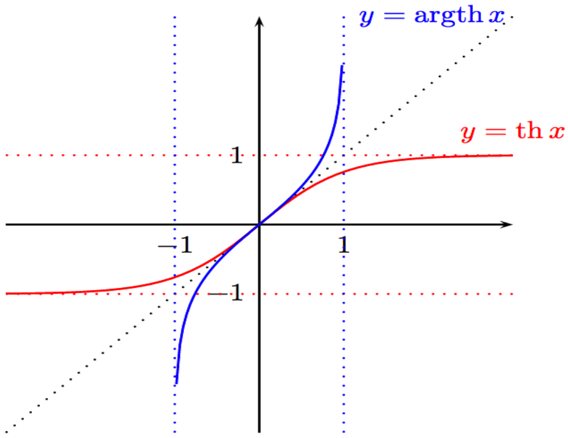
Propriété 2.4.6 La fonction Argth vérifie les propriétés suivantes :

- Argth est strictement croissante et continue,
- Argth est dérivable sur $]-1,1[$, et $\forall x \in]-1,1[$, $(\text{Argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,
- on a l'expression logarithmique $\text{Argth}\, x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

On déduit à l'aide de la dérivée de Argth le tableau de variations suivant :

x	-1 ... 1
signe de $(\text{Argth})'(x)$	$+$
variations de Argth	$-\infty \nearrow +\infty$

ainsi que le graphe associé :



On précise enfin que la fonction cotangente hyperbolique, notée coth, est définie sur $R^\star$ par :

$$\coth x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$

2.5 Exercices

2.5.1 Fonctions logarithmes

Exercice 2.1 Résoudre dans $]0;+\infty[$, $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \dfrac{11}{2}$. ■

Exercice 2.2

1. Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$, que :

$$\frac{y-x}{\ln y - \ln x} < \frac{x+y}{2}$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

■

Exercice 2.3 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad \text{avec } x > y > 1.$$

■

Exercice 2.4 Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$. ■

Exercice 2.5 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que $x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$.
2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y$$

   De l'étude de f, déduire que pour tout α de $]0,1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y)$$

3. Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

■

2.5.2 Fonctions exponentielles

Exercice 2.6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$,

$$(S)\begin{cases} x + e^x &= y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 &= 27 \end{cases}$$

■

Exercice 2.7 Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \to & \left]-\frac{1}{e};+\infty\right[\\ x & \mapsto & x\exp x \end{array}$. Montrer que f bijective, et que f et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs ensembles de définition. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$. ■

Exercice 2.8 Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 2.9 Résoudre les équations définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln 18$
2. $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$
3. $9^x + 3^x - 12 = 0$

4. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

2.5.3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 2.10 Établir les formules suivantes :

1. $2\,\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} = \text{Arctan}\,\dfrac{4}{3}$
2. $2\,\text{Arccos}\,\dfrac{3}{4} = \text{Arccos}\,\dfrac{1}{8}$
3. $\text{Arccos}\,\dfrac{5}{13} = 2\,\text{Arctan}\,\dfrac{2}{3}$
4. $\text{Arcsin}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$
5. $\text{Arcsin}\,\dfrac{5}{13} + \text{Arcsin}\,\dfrac{3}{5} = \text{Arcsin}\,\dfrac{56}{65}$
6. $\text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{5} + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 2.11 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(4\,\text{Arctan}\,x)$ 2. $\sin(3\,\text{Arctan}\,x)$ 3. $\sin(\dfrac{1}{2}\,\text{Arcsin}\,x)$

Exercice 2.12 Établir les relations suivantes :

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}$
2. $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$
3. $\text{Arctan}\,x + \text{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$
4. $\text{Arctan}(2x+1) - \text{Arctan}\,\dfrac{x}{x+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } x \in]-\infty,-1[\end{cases}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}(1+x) - \text{Arctan}\,x = \text{Arccotan}(1+x+x^2)$. En déduire la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{Arccotan}(1+k+k^2)$$

Exercice 2.13 Étudier et représenter les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ 2. $x \mapsto \text{Arccos}(\cos x)$ 3. $x \mapsto \text{Arctan}(\tan x)$

Exercice 2.14 Soit $f(x) = \text{Arccos}(1-2x^2)$.

1. Préciser l'ensemble de définition et la parité de f.
2. On pose $x = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $f(\sin\varphi)$, et en déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in [0,1]$.
3. Construire le graphe de f.

Exercice 2.15 Soit $f(x) = \text{Arccos}\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition et la parité de f.
2. (a) Calculer $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$, et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $]-\infty,0]$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. On pose $x = \tan\dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi \in [0,\pi[$. Calculer $f(\tan\frac{\varphi}{2})$ et retrouver les résultats du 2. (a).
4. Construire le graphe de f.

■

Exercice 2.16 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p.

1. À quelle distance x_0 doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal α_0 ?
2. Vérifier que $\alpha_0 = \arctan\dfrac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.
3. Application à la statue de la liberté : haute de 46 mètres avec un piédestal de 47 mètres.

■

Exercice 2.17

1. Montrer, pour tout $(a,b) \in [0,1[^2$, que :
$$\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$$
2. En déduire la valeur de $S = 5\arctan\dfrac{1}{8} + 2\arctan\dfrac{1}{18} + 3\arctan\dfrac{1}{57}$.

■

2.5.4 Fonctions hyperboliques directes et réciproques

Exercice 2.18

1. Exprimer $\text{ch}(3x)$ en fonction de $\text{ch}\,x$, et $\text{sh}(3x)$ en fonction de $\text{sh}\,x$.
2. Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{ch}(3x) - 3\,\text{ch}(x)$.

■

Exercice 2.19

1. Exprimer $\text{sh}^4 x$ en fonction de $\text{ch}(2x)$ et $\text{ch}(4x)$.
2. Calculer $\displaystyle\int \text{sh}^4 x\,dx$.

■

Exercice 2.20 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $a\,\text{ch}\,x + b\,\text{sh}\,x = 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. $(\text{ch}\,x + \text{sh}\,x)^{\text{Argsh}(x-a)} = (\text{ch}\,x - \text{sh}\,x)^{\text{Argsh}(x-b)}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
3. $2\,\text{Argsh}\,x = \text{Argth}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{Argch}\,\sqrt{2}$.

■

Exercice 2.21 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$,

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y & = & 4 \\ \operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y & = & 1 \end{array}\right.$$

■

Exercice 2.22 Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y & = & a\operatorname{ch}b \\ \operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y & = & a\operatorname{sh}b \end{array}\right.$$

■

Exercice 2.23

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^\star$, $\operatorname{th}x=\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}-\dfrac{1}{\operatorname{th}x}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\operatorname{th}(2^kx)$, pour $n\in\mathbb{N}$.

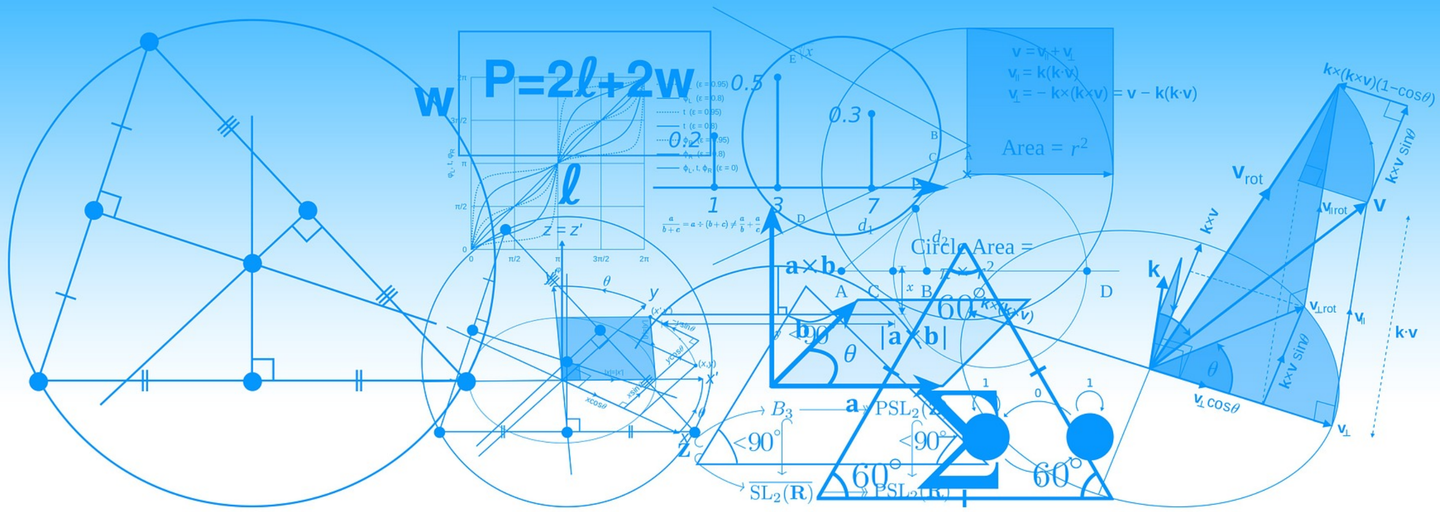
■

Exercice 2.24 Montrer que $\forall x\in[0;+\infty[$, $\arctan(\operatorname{sh}x)=\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$. ■

Exercice 2.25

1. Démontrer l'expression logarithmique de $\operatorname{Argsh}x$.
2. Démontrer l'expression logarithmique de $\operatorname{Argch}x$. Retrouver son développement limité au voisinage de 1.

■



3. Limites et fonctions continues

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Definitions

Definition 3.1.1 Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

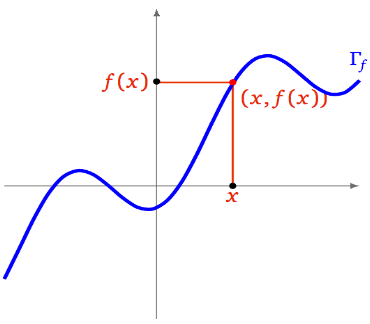
■ **Exemple 3.1** La fonction "inverse" :

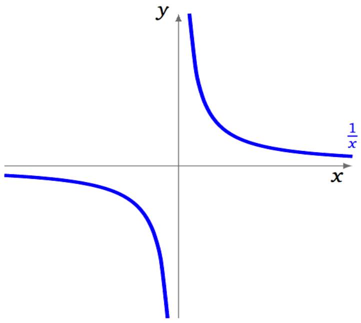
$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

■

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in U\}$.

■ **Exemple 3.2** Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (à droite).





■

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de f et g est la fonction $f+g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in U$.

3.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

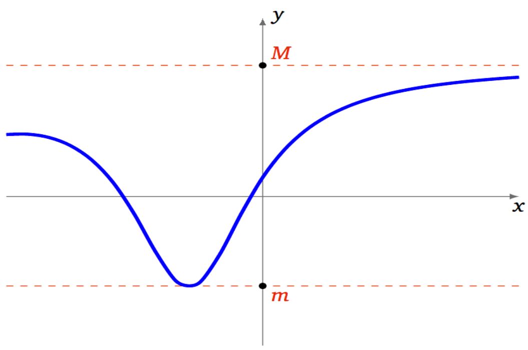
Definition 3.1.2 Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq 0$;
- $f > g$ si $\forall x \in U,\ f(x) > g(x)$;
- f est dite constante sur U si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) = \alpha$;
- f est dite nulle si $\forall x \in U,\ f(x) = 0$.

Definition 3.1.3 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

- f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U,\ f(x) \leq M$;
- f est minorée sur U si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U,\ f(x) \geq m$;
- f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U,\ |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



3.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Definition 3.1.4 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est croissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est strictement croissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est décroissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f est strictement décroissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.

Exemple 3.3

- La fonction "racine carrée" $\left\{ \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est strictement croissante.

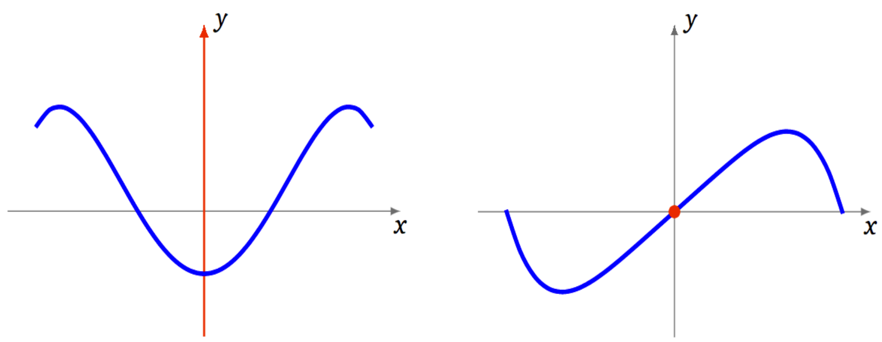
- Les fonctions "exponentielle" $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et "logarithme" $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
- La fonction "valeur absolue" $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ est strictement croissante.

■

3.1.4 Parité et périodicité

Definition 3.1.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :
- f est paire si $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$,
- f est impaire si $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

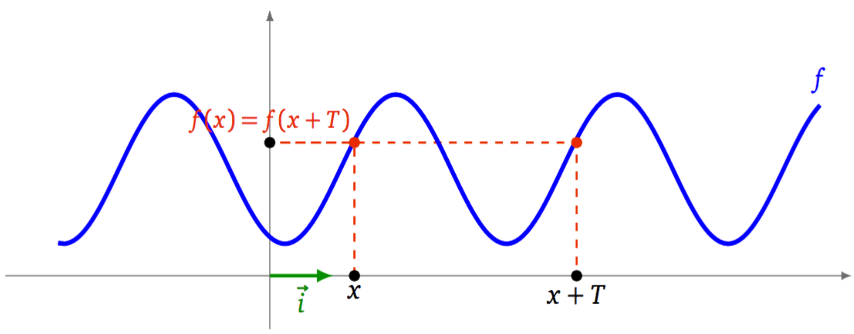
Interprétation graphique :
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche ci-dessous).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite ci-dessous).



■ **Exemple 3.4**
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

■

Definition 3.1.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.



■ **Exemple 3.5** Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique. ■

3.2 Limites

3.2.1 Définitions

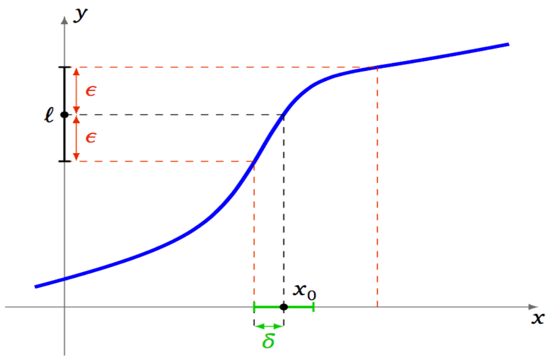
Limite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Definition 3.2.1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



R L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est important et on ne peut pas les échanger, le δ dépendant en général du ε.

■ **Exemple 3.6**

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$.
- La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

■

Definition 3.2.2 Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si
$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si
$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Definition 3.2.3

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

■ **Exemple 3.7** On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$

■

Limites à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Definition 3.2.4

- On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$.
- On appelle limite à gauche en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^-} f$.
- On note aussi $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

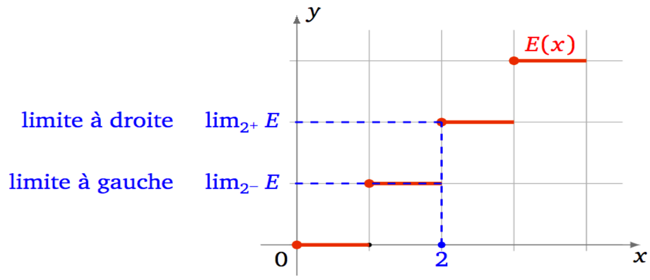
De même, $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell' \in \mathbb{R}$ à gauche en x_0 si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, x_0 - \delta' < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$$

R

- Si la fonction f admet une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite coïncident et valent $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
- Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (f étant bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

■ **Exemple 3.8** Considérons la partie entière au point $x = 2$:

- comme pour tout $x \in]2, 3[$, $E(x) = 2$, on a $\lim_{x \to 2^+} E(x) = 2$,
- comme pour tout $x \in [1, 2[$, $E(x) = 1$, on a $\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1$,



Les deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en $x_0 = 2$. ∎

3.2.2 Propriétés des limites

Proposition 3.2.1 Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 3.2.2 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Proposition 3.2.3 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to \ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f(x) = \ell'$.

R Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites, qu'on appelle formes indéterminées. En voici une liste :

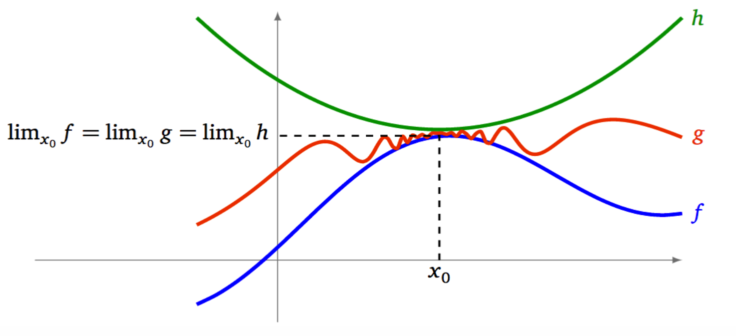
$$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Enfin, voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Proposition 3.2.4

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- Théorème des gendarmes :

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.



3.3 Continuité en un point

3.3.1 Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Definition 3.3.1
- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

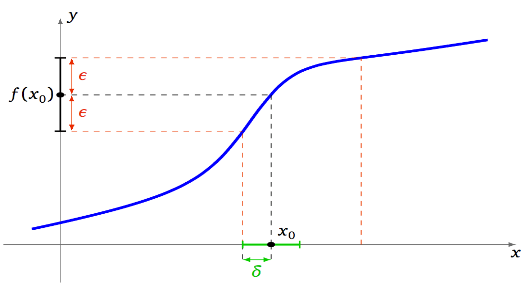
  c'est-à-dire si f admet une limite en x_0, cette limite valant nécessairement $f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

■ **Exemple 3.9** Les fonctions suivantes sont continues :

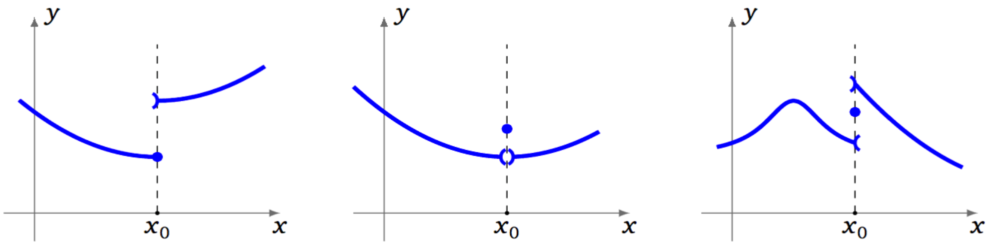
- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$,
- la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
- la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$.

■

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe sans lever le crayon de la feuille, c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.



Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0.



3.3.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (ce qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale).

Lemme 3.3.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \neq 0.$$

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 3.3.2 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors :

- λf est continue en x_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $f + g$ est continue en x_0,
- $f \times g$ est continue en x_0,
- $f - g$ est continue en x_0,
- si $f(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

La composition conserve la continuité mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent.

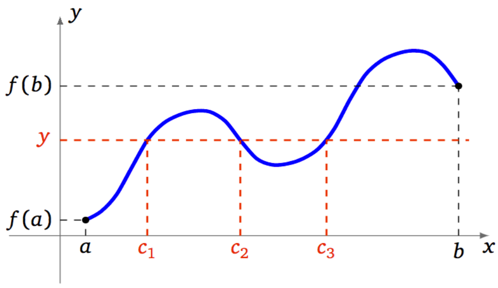
Proposition 3.3.3 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles ques $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$,alors $g \circ f$ est continue en x_0.

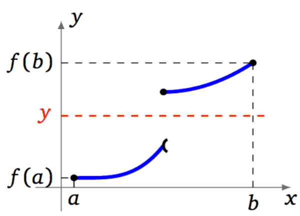
3.4 Continuité sur un intervalle

3.4.1 Le théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de Bolzano) et applications

Théorème 3.4.1 — Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

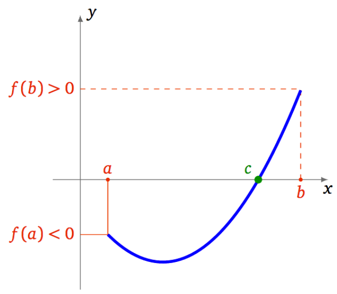
Illustrons le TVI à l'aide de la figure de gauche. Attention, le réel c n'est pas nécessairement unique.





La figure de droite montre que si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est pas vrai.

> **Corollaire 3.4.2** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
>
> $$\text{Si } f(a).f(b) < 0 \text{ alors il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0.$$

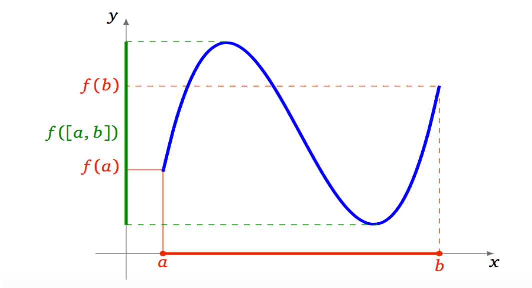


■ **Exemple 3.10** Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. ■

Voici enfin une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires :

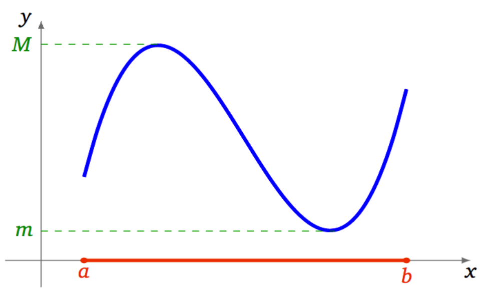
> **Corollaire 3.4.3** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention, il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a,b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Il suffit pour s'en convaincre de visualiser la figure suivante :



3.4.2 Fonctions continues sur un segment

> **Théorème 3.4.4** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a,b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

3.5 Fonctions monotones et bijections

3.5.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Definition 3.5.1 Soit $f : E \to F$ une fonction où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.
- f est injective si $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$,
- f est surjective si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$,
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $y = f(x)$.

Proposition 3.5.1 Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

R

- On rappelle que l'identité $id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f = id_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E$, $g(f(x)) = x$.
- $f \circ g = id_F$ s'écrit : $\forall y \in F$, $f(g(y)) = y$.
- Dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3.5.2 Fonctions monotones et bijections

Théorème 3.5.2 — Théorème de la bijection. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I alors :
1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

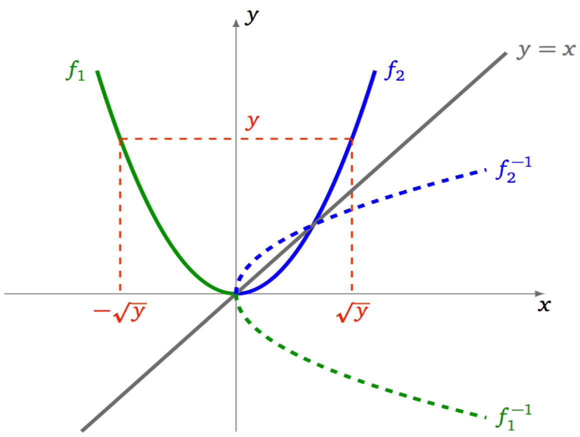
■ **Exemple 3.11** Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Elle n'est même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part, et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \quad \text{et } f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leur fonctions réciproques respectives $f_1^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Soient deux réels x et $y \geq 0$. Alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{y},$$

c'est-à-dire que y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty, 0]$. Donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



On remarque que la courbe en pointillés (les parties bleue et verte) qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut être le graphe d'une fonction (une abscisse est associée à deux ordonnées !) : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.

■

3.6 Exercices

Exercice 3.1 Calculer

1. $\sup\left\{-x^3+\frac{75}{4}x, x\in\mathbb{R} \text{ et } x^4+36\leq 13x^2\right\}$.
2. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$.
3. $\max\limits_{(x,y)\in[1,2]}\left(\frac{1+x}{y}+\frac{1+y}{x}\right)$.

■

Exercice 3.2 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 3, \text{ et } f(x+1)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}$$

Montrer que f est 4-périodique. ■

Exercice 3.3 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

$$\forall a\in]0;+\infty[,\ \exists c\in\mathbb{R},\ f(c+a)=f(c).$$

■

Exercice 3.4 Étudier (à l'aide des quantificateurs) la limite des fonctions :

1. $f(x)=4x+11$ en $x=-2$,
2. $f(x)=x^2+2x$ en $x=1$,
3. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ en $x=0$,
4. $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ en $+\infty$.

■

Exercice 3.5 Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

■

Exercice 3.6 (Formes indéterminées $\frac{0}{0}, 0\times\infty, \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}$.)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x\tan x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{(1-2x)^3-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)}$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan(2x)\,\mathrm{cotan}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\sqrt{\ln(1+x^2)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right]$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}e^x+x^9-\ln x}{x^3+(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})e^x}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[((x+1)(x+2)\dots(x+n))^{\frac{1}{n}}-x\right]$, $n\in\mathbb{N}^\star$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

■

Exercice 3.7 (Formes indéterminées $1^\infty, 0^0, \infty^0$.)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} [\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right]^x$, $a\in\mathbb{R}, \cos a\neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$
8. $\lim\limits_{x\to 2} (2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^x}{2^x}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^{\star 2}$

■

Exercice 3.8 Étudier, en tout point, la continuité des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

1. $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$
2. $f(x)=x+\sqrt{x-E(x)}$
3. $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$
4. $f(x)=[E(x)+E(-x)]\sin(kx)$, $k\in\mathbb{R}$

■

Exercice 3.9

1. Déterminer les domaines de définition et de continuité de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.
2. On pose
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Montrer que g est continue sur $[-1,+\infty[$.

Exercice 3.10 Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est continue en 2 points.)
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^\star \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est continue en 2 points, et qu'elle est bijective.)
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est discontinue en tout point, et qu'elle est bijective.)

Exercice 3.11 Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = f(x)$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x^2)$.

Exercice 3.12 Les nombres de $[0,1]$ sont donnés par leur représentation décimale :
$$x = 0,a_1a_2a_3\ldots$$
En quels points la fonction
$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & 0,a_2a_3a_4\ldots \end{array}$$
est-elle continue, discontinue ?

Exercice 3.13 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 3.14 Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3.15 Soit $f :]0,1] \to]0;+\infty[$ une application telle que

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2.$$

Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. ■

Exercice 3.16 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

■

Exercice 3.17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique. Montrer que f est bornée. ■

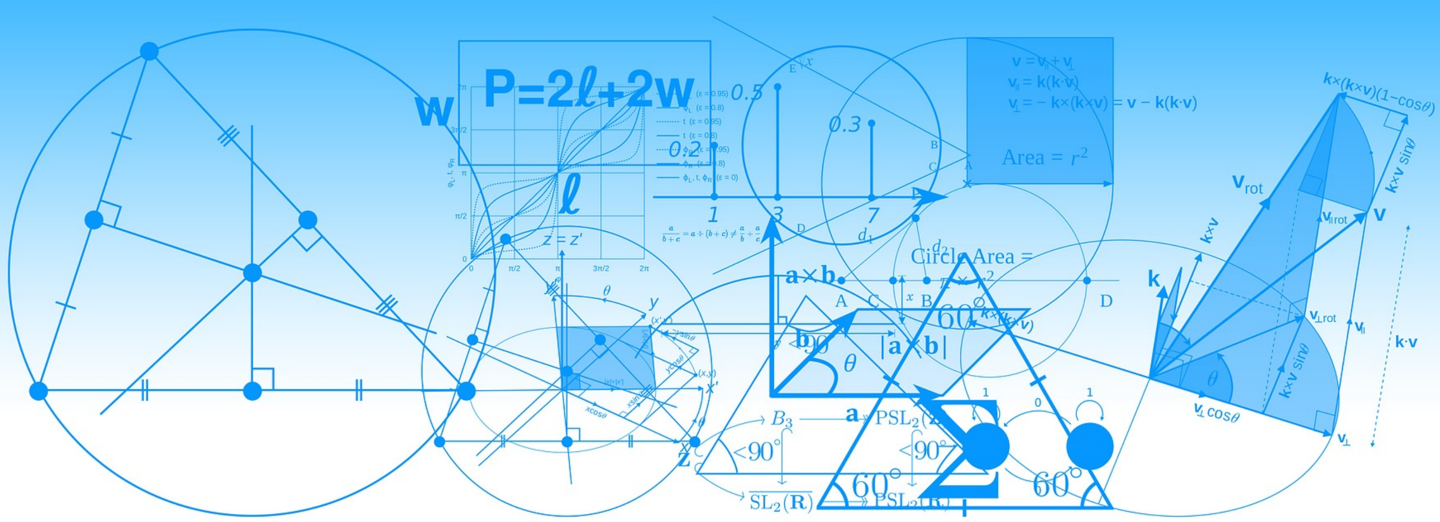
Exercice 3.18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées. ■

Exercice 3.19 Montrer que les applications suivantes f sont bijectives, et préciser f^{-1}.

1. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$

■

Exercice 3.20 Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5+x+1 \end{array}$ est bijective, puis résoudre l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. ■



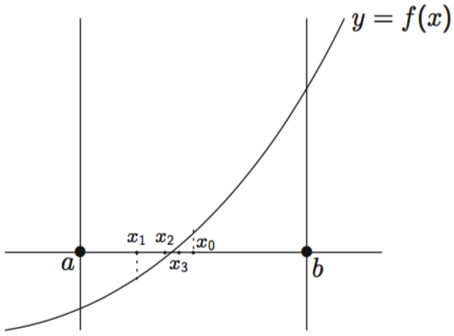
4. Résolution d'équations non linéaires

On considère une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, et continue sur cet intervalle et on suppose que f admet une unique racine sur $I =]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4.1 Méthode de dichotomie

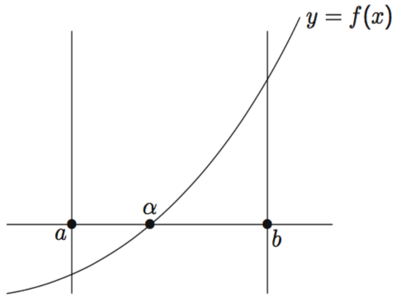
On considère un intervalle $[a,b]$ et une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a,b]$. La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante :

1. Initialisation : soit x_0 le milieu de $[a,b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a,x_0[$ ou $]x_0,b[$ ou bien elle est égale à x_0.
   - Si $f(a)f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a,x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$.
   - Si $f(a)f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
   - Si $f(a)f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0,b[$. On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$.
2. Algorithme : soit x_1 le milieu de $[a_1,b_1]$. On construit ainsi une suite $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, \ldots, x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ telle que $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

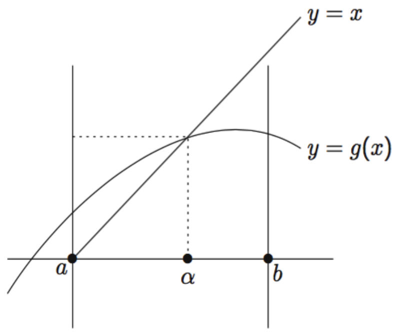


Etant donnée une précision ε, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations.

Les principes de construction suivants consistent à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente $g(x) = x$. On peut poser par exemple $g(x) = x + f(x)$, mais on prendra plus généralement $g(x) = x + u(x)f(x)$ où u est une fonction non nulle sur l'intervalle I. Il reste à choisir u pour que la suite définie par $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + u(x_n)f(x_n)$ soit bien définie et converge vers la racine α de f. Géométriquement, on a remplacé la recherche de l'intersection du graphe de la fonction f avec l'axe Ox, par la recherche de l'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la courbe d'équation $y = g(x)$.



Racine de f



Point fixe de g

Le choix d'une méthode est conditionné par les réponses aux questions suivantes :

1. La suite (x_n) converge-t-elle ?
2. Si la suite converge, sa limite est-elle α ?
3. Si on veut la solution à ε près, comment arrêter les itérations dès que cette condition est remplie ?
4. Comme dans tout calcul, on désire obtenir rapidement le résultat approché. Comment estimer la manière dont évolue l'erreur $e_n = x_n - \alpha$ au cours des itérations ?

Les deux premières questions sont purement mathématiques. Les deux dernières sont numériques car on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'itérations pour le calcul. La continuité des fonctions considérées permet de répondre à la question 2 : si la suite converge, elle converge vers une racine de l'équation ; si, de plus, $x_n \in I$ pour tout n, alors par unicité de la racine dans I, la suite converge vers α.

4.2 Théorème du point fixe

Definition 4.2.1 On dit que l'application $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est strictement contractante si

$$\exists L \in]0,1[, \forall x \in [a,b], \forall y \in [a,b], |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Proposition 4.2.1 Soit g une application de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g' vérifie

$$\max\{|g'(x)|; x \in [a,b]\} \leq L < 1,$$

alors l'application g est strictement contractante dans l'intervalle $[a,b]$.

Théorème 4.2.2 Si g est une application définie sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$, strictement contractante, alors la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution α de l'équation $x = g(x)$ avec $\alpha \in [a,b]$.

Démonstration. La suite (x_n) est bien définie car $g([a,b]) \subset [a,b]$.
Montrons par l'absurde que l'équation $g(x) = x$ a au plus une solution. Supposons qu'il y ait deux

solutions α_1 et α_2, alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

or $L < 1$ donc on a nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
Montrons que la suite (x_n) est convergente. On a

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence, $|x_{n+1} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|$. On en déduit que

$$|x_{n+p} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|.\frac{1-L^p}{1-L} \leq |x_1 - x_0|\frac{L^n}{1-L}.$$

Cette suite vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente vers $\alpha \in [a,b]$. Or, l'application g est continue donc, la limite α vérifie $g(\alpha) = \alpha$. ■

On a aussi une évaluation de l'erreur en faisant tendre p vers l'infini car on obtient :

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - x_0|\frac{L^n}{1-L}.$$

On constate que, pour n fixé, l'erreur est d'autant plus petite que L est proche de 0.

4.3 Méthode de la sécante

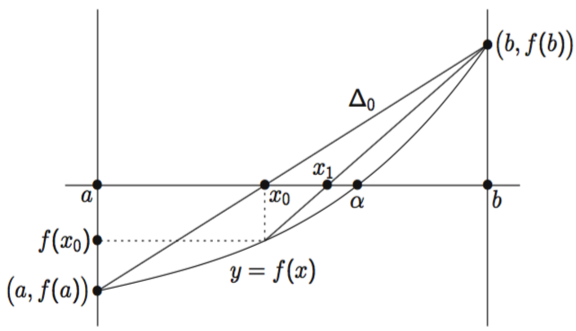
4.3.1 Description de la méthode

Cette méthode est également appelée méthode de Lagrange, méthode des parties proportionnelles ou encore regula falsi.

On considère un intervalle $[a,b]$ et une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que f' ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a,b]$.

R L'hypothèse "f dérivable" suffirait, mais demanderait une rédaction un peu plus fine des démonstrations.

La méthode de la sécante consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante : soit Δ_0 la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, elle coupe l'axe Ox en un point d'abscisse $x_0 \in]a,b[$. On approche donc la fonction f par un polynôme P de degré 1 et on résout $P(x) = 0$.



Méthode de la sécante

Ensuite, suivant la position de α par rapport à x_0, on considère la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x_0, f(x_0))$ si $f(x_0)f(a) < 0$ ou celle passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(b, f(b))$ si $f(x_0)f(b) < 0$. On appelle x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox. On réitère ensuite le procédé.

Plaçons-nous dans le cas où $f' > 0$ est dérivable et f est convexe (i.e. $f'' \geq 0$), c'est-à-dire que sa représentation graphique est au dessus des tangentes et en dessous des cordes. Alors la suite (x_n) est définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & \dfrac{bf(x_n) - x_n f(b)}{f(x_n) - f(b)} \end{array}\right.$$

En effet, si f est convexe, on remplace l'intervalle $[x_n, b]$ par l'intervalle $[x_{n+1}, b]$. L'équation d'une droit passant par $(c, f(c))$ et $(b, f(b))$ avec $c \neq b$ est

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - b).$$

On cherche son intersection avec l'axe Ox donc on prend $y = 0$ et on obtient la formule donnée plus haut. On pose

$$g(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)} = x - \frac{b - x}{f(b) - f(x)} f(x)$$

d'où $x_{n+1} = g(x_n)$. Montrons que cette suite (x_n) est définie. Pour cela, il suffit de montrer que $g([a,b]) \subset [a,b]$. Vérifions d'abord que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Elle l'est de manière évidente sur $[a,b[$. L'application g est continue en b et $g(b) = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. On a, pour tout $x \in [a,b[$,

$$g'(x) = 1 - f'(x)\frac{b-x}{f(b)-f(x)} + f(x)\frac{f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)}{(f(b)-f(x))^2} = f(b)\frac{f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)}{(f(b)-f(x))^2}.$$

On en déduit que g' est continue en b car

$$\lim_{x \to b} g'(x) = f(b) \lim_{x \to b} \frac{(b-x)\left(\frac{f(b)-f(x)}{b-x} - f'(x)\right)}{(b-x)^2\left(\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right)^2} = f(b) \lim_{x \to b} \frac{\frac{\frac{f(b)-f(x)}{b-x} - f'(x)}{b-x}}{\left(\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right)^2} = f(b)\frac{f''(b)}{2f'(b)^2} = g'(b).$$

De plus, l'application f est convexe, donc $f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) \geq 0$. On a également $f(b) > 0$ car f est croissante et $f(a)f(b) < 0$. La fonction g est donc croissante sur $[a,b]$. On a alors $g([a,b]) \subset [g(a), g(b)]$. De plus, $g(a) = a - f(a)\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$, or $f(a) < 0$ et $\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} > 0$ par croissance de f ; donc $g(a) \geq a$. De même, $g(b) = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$, or $f'(b) > 0$ et $f(b) > 0$ donc $g(b) \leq b$. La croissance de g montre que la suite (x_n) est croissante car $x_1 = g(a) \geq a = x_0$, or elle est dans l'intervalle $[a,b]$, donc elle converge vers $\ell \in [a,b]$ tel que, par continuité de g, $g(\ell) = \ell$. De plus, $x_0 \leq \alpha$ donc une récurrence immédiate et la croissance de g montrent que pour tout entier n, $x_n \leq \alpha$. On en déduit que $\ell \leq \alpha$, c'est-à-dire que $\ell \in]a,b[$. Soit $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$, alors il est immédiat que $g(x) = x$. Réciproquement, soit $x \in]a,b[$ tel que $g(x) = x$, alors $\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)} f(x) = 0$, or $x \neq b$ et $f(x) \neq f(b)$ car f est strictement croissante et $x \in]a,b[$. On en déduit que $f(x) = 0$. Il y a unicité de la racine de f, donc $\ell = \alpha$ et la suite (x_n) converge vers α.

4.3.2 Rapidité de convergence de la méthode de la sécante

On a $x_n - \alpha = g'(\xi)(x_{n-1} - \alpha)$. On en déduit, par continuité de g' en α, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

4.4 Méthode de Newton

On cherche les points fixes de la fonction $g(x) = x + u(x)f(x)$, et on a vu que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

Pour obtenir une convergence plus rapide, on peut chercher u tel que $g'(\alpha) = 0$. On a, si les fonctions ont les régularités nécessaires, $g'(x) = 1 + u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$ et on en déduit que $g'(\alpha) = 0$ si $u(\alpha) = -\dfrac{1}{f'(\alpha)}$. Si la fonction f' ne s'annule pas, on peut choisir $u(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$. On obtient alors la méthode de Newton.

4.4.1 Description de la méthode

On considère une fonction réelle définie sur un intervalle $I = [a,b]$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a)f(b) < 0$; on suppose que les fonctions f' et f'' ne s'annulent pas et gardent chacune un signe constant sur I. On pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

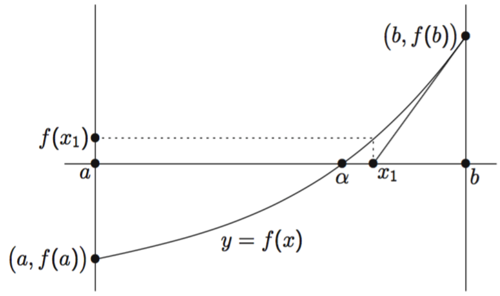
Si $f'f''$ est positive (respectivement négative) sur $[a,b]$, on pose $x_0 = b$ (respectivement a). On définit alors la suite (x_n) par la donnée de x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.

Théorème 4.4.1 La suite (x_n) converge vers α l'unique racine de f sur $[a,b]$.

Démonstration. Pour simplifier la rédaction, on va supposer que f' est strictement positive et f'' est strictement négative sur I. Les autres cas se traitent de manière similaire. Ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$. On va montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée par α. On a $x_0 = a$, donc $x_0 \leq \alpha$. Supposons que $x_n \leq \alpha$, alors, comme $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et que la fonction f' est positive, f est donc croissante et on en déduit immédiatement que $x_{n+1} \geq x_n$ et la suite (x_n) est croissante. De plus, $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi)(x_n - \alpha)$ avec $\xi \in]x_n, \alpha[$. Or, $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ donc $g'(\xi) > 0$ et $x_{n+1} \leq \alpha$. La suite (x_n) est croissante et majorée ; elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La continuité de g permet d'écrire que $\ell = g(\ell)$ et donc $f(\ell) = 0$ d'où $\ell = \alpha$. ■

4.4.2 Interprétation graphique

La méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente en une de ses deux extrémités. Le point x_1 est l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox. Pour faire le dessin, on va se placer dans le cas étudié pour la méthode de la sécante, i.e. $f' > 0$ et $f'' < 0$. On prend alors $x_0 = b$.



Méthode de Newton

Traçons la tangente à la courbe représentative de f passant par $(b, f(b))$. L'équation de cette tangente est $y = f'(b)(x-b) + f(b)$. Son intersection avec l'axe Ox a une ordonnée nulle et son abscisse vaut $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. On trace ensuite la tangente à la courbe au point $(x_1, f(x_1))$. Le réel x_2 est l'abscisse de l'intersection de cette deuxième tangente avec l'axe Ox et on réitère ce procédé.

R Si on prenait la tangente à la courbe en $(a, f(a))$, son intersection avec l'axe Ox ne serait pas, sur ce dessin, dans l'intervalle $[a, b]$.

4.4.3 Rapidité de convergence de la méthode de Newton

On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $I = [a, b]$, que l'on a $f(a)f(b) < 0$ et que les fonctions f' et f'' sont toutes deux strictement positives sur $[a, b]$. Ceci nous garantit l'existence et l'unicité d'une racine simple α de f sur $[a, b]$. On a donc $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et on définit la suite (x_n) par $x_0 = b$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.

Théorème 4.4.2 On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Démonstration. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$, g est de classe $\mathscr{C}^2$; on a $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$ car α est racine simple de f. La formule de Taylor à l'ordre 1 s'écrit $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\xi)$ or g' est continue sur $[a, b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - \alpha| = g'(\alpha) = 0$.
La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_n-\alpha)^2 g''(\xi) = \frac{1}{2}(x_n-\alpha)^2 g''(\xi)$$

or g'' est continue sur $[a, b]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} = g''(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

■

R Le résultat est encore vrai si on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. La démonstration est cependant plus difficile.

R On peut utiliser la méthode de Newton avec un point de départ dans $]a,b[$, mais la convergence de la suite n'est pas garantie. En pratique, on utilise souvent la méthode de dichotomie pour trouver un x_0 assez proche de la racine.

4.5 Ordre de convergence

La convergence de la suite ne suffit pas numériquement, on aimerait avoir une estimation de la rapidité de convergence. On pose $e_n = x_n - \alpha$. e_n est l'erreur absolue au pas n. L'erreur relative vaut $\dfrac{e_n}{\alpha}$.

Definition 4.5.1 La méthode définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est dite d'ordre p si $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$ a une limite non nulle en $+\infty$.

La méthode de la sécante est donc d'ordre 1 si $g'(\alpha) \neq 0$, tandis que la méthode de Newton est d'ordre 2 si $g''(\alpha) \neq 0$.

Definition 4.5.2 Lorsque la méthode est d'ordre 1 (respectivement 2), on dit que la convergence est linéaire (respectivement quadratique).

4.6 Exercices

Exercice 4.1 Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} (a > 0 \text{ fixé})$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g.
2. Comparer g à l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$x_{n+1} = g(x_n),\ x_0 > 0.$$

   À l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^\star$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observer graphiquement la convergence.
4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ à une précision de 10^{-6}.
7. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque t-on ?

■

Exercice 4.2
1. Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f
   (a) Situer les 4 racines de f (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun

une et une seule racince).

(b) Montrer qu'il y a une racine comprise entre 0 et 1

(c) Soit la méthode du point fixe

$$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k) \\ x_0 \in]0,1[\end{cases}, \tag{4.1}$$

avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

(d) Écrire la méthode de Newton et la méthode du point fixe (4.1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

3. Combien de pas de dichotomie doit-on effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

■

Exercice 4.3 L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $-2 < f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la récurrence suivante :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n),$$

où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. En déduire qu'il existe un unique élément l de $\mathbb{R}$ tel que $f(l) = 0$.
3. Montrer que si $0 < \alpha < 1$, la fonction g définie par $g(x) = x + \alpha f(x)$ vérifie
$$-1 < 1 - 2\alpha < g'(x) < 1 - \alpha \text{ sur } \mathbb{R}.$$
4. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $0 < \alpha < 1$.
5. La suite converge t-elle pour $\alpha = -\dfrac{1}{f'(l)}$?
6. Donner l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $0 < \alpha < 1$ en distinguant le cas $\alpha = -\dfrac{1}{f'(l)}$.
7. Peut-on choisir $\alpha = -\dfrac{1}{f'(l)}$ d'un point de vue pratique ?
8. On choisit alors d'approcher $\alpha = -\dfrac{1}{f'(l)}$ par $\alpha_n = -\dfrac{1}{f'(x_n)}$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha_n f(x_n)$$
Quel est le nom de cette méthode itérative ? Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

■

Exercice 4.4 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g. (On admettra que $x^3+4x^2-10=0$ solution admet comme unique $m \simeq 1,36$ et que $g(m)=m$).
2. Comparer g à l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = g(x_n);\ x_0 > 0.$$

À l'aide des graphes de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^\star$, dessiner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence. En particulier, montrer que cette suite est décroissante à partir du rang 1.
4. Expliciter (sans la vérifier) la condition nécessaire pour la convergence observée graphiquement.
5. Écrire l'algorithme défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permet de déterminer le point fixe à une précision de ε.
6. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3+4x^2-10$. Que remarque t-on ?
7. Donner l'ordre de convergence de la suite.