CPI1 - ANALYSE 1.2

CORRECTION Exercices Chapitre 2 - Fonctions usuelles.

Exercice 2.1 *Correction* :
On a pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 4} + \frac{\ln x}{\ln 8} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2^2} + \frac{\ln x}{\ln 2^3} = \frac{11}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{2\ln 2} + \frac{\ln x}{3\ln 2} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{6\ln x + 3\ln x + 2\ln x}{6\ln 2} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \ln x = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8 \Leftrightarrow x = 8.$$

L'équation proposée admet une unique solution $x = 8$.

Exercice 2.2 *Correction* :

1. On a, avec les notations de l'énoncé, et en notant (1) l'inégalité voulue :
$$(1) \Leftrightarrow 2(y-x) < (x+y)(\ln y - \ln x) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x} - 1\right) < \left(1 + \frac{y}{x}\right)\ln\frac{y}{x}.$$
En notant $t = \dfrac{y}{x} \in]1, +\infty[$, on a :
$$(1) \Leftrightarrow 2(t-1) < (t+1)\ln t \Leftrightarrow \ln t > 2\frac{t-1}{t+1}$$
Considérons
$$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \ln t - 2\frac{t-1}{t+1}$$
L'application f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $t \in [1, +\infty[$:
$$f'(t) = \frac{1}{t} - 2\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 - 4t}{t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0 \ (> 0 \text{ si } t \neq 1).$$
Il en résulte que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $f(1) = 0$ d'où : $\forall t \in]1, +\infty[$, $f(t) > 0$, ce qui prouve l'inégalité voulue.
2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, en utilisant 1. appliqué à $(k, k+1)$ à la place de (x, y) :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{(k+1)-k}{\ln(k+1) - \ln k} < \sum_{k=1}^{n} k\frac{k + (k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{12} \times (2(2n+1)+3) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

Exercice 2.3 *Correction* :
Soit $(S) \left\{ \begin{array}{ll} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 & (L_1) \\ xy = 243 & (L_2) \end{array} \right.$ avec $x > y > 1$. On sait que $\log_x y \times \log_y x = 1$ donc $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$. On pose $X = \log_y x$ ce qui implique que $\log_x y = \dfrac{1}{X}$. Par conséquent, $(L_1) \Leftrightarrow 4\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = 17 \Leftrightarrow 4X^2 - 17X + 4 = 0$. Comme $\Delta = 15^2$, le trinôme admet deux racines distinctes $\left\{ \begin{array}{l} X_1 = 4 \\ X_2 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$. Considérons $X_2 = \frac{1}{4}$. On a donc $X_2 = \log_y x = \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow (4\ln x = \ln x^4) = \ln y \Leftrightarrow y = x^4$. Comme $x > 1$, $y > 1$ et $x > y$, on a nécessairement $x^4 > y$ et donc l'égalité entre x^4 et y est improbable, ce qui implique le rejet de X_2. On retient donc X_1 ce qui permet d'écrire $X_1 = \log_x y = \dfrac{\ln x}{\ln y} = 4 \Leftrightarrow \ln x = (4\ln y = \ln y^4) \Leftrightarrow x = y^4$. Finalement, (S) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y^4 \\ xy = 243 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y^4 \\ y^5 = 243 = 3^5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3^4 = 81 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 2.4 *Correction* :

- 1ère méthode : utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On rappelle la

  Proposition 0.1 *Soient $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors :* $\displaystyle\int_0^1 |fg| \le \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g|^2\right)^{1/2}$.

  On a donc pour tout $y \in [0,+\infty[$,

  $$(\ln(1+y))^2 = \left(\int_1^{1+y} \frac{1}{t}dt\right)^2 \le \left(\int_1^{1+y} 1^2 dt\right)\left(\int_1^{1+y} \frac{1}{t^2}dt\right) = ((1+y)-1)\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{1+y} = y\left(1-\frac{1}{1+y}\right) = \frac{y^2}{1+y}.$$

  D'où, pour tout $x \in]0,+\infty[$, en remplaçant y par $\frac{1}{x}$, $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2 \le \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x(x+1)}$, et donc, puisque $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ge 0$, on obtient $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

- 2nde méthode : utilisation des variations d'une fonction. Par le changement de variable $t = 1+\frac{1}{x} > 1$, $x = \frac{1}{t-1}$, on a, en notant (1) l'inégalité demandée :

  $$(1) \Leftrightarrow \ln t \le \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t-1}\times\frac{t}{t-1}}} \Leftrightarrow \ln t \le \frac{t-1}{\sqrt{t}}.$$

  Puis, en posant $u = \sqrt{t} > 1$, $t = u^2$, on obtient

  $$(1) \Leftrightarrow \ln(u^2) \le \frac{u^2-1}{u} \Leftrightarrow 2\ln u \le u - \frac{1}{u}.$$

  L'application $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, u \mapsto f(u) = u - \frac{1}{u} - 2\ln u$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et, pour tout $u \in [1,+\infty[$,

  $$f'(u) = 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} = \frac{u^2+1-2u}{u^2} = \frac{(u-1)^2}{u^2} \ge 0.$$

  Il en résulte que f est croissante sur $[1,+\infty[$. De plus, $f(1) = 0$. On a donc $f \ge 0$ d'où le résultat demandé.

Exercice 2.5 *Correction* :

- Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe par conséquent $c \in]x,y[$, $g(y)-g(x) = g'(c)(y-x) \Leftrightarrow \ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$ donc $\frac{y-x}{\ln y - \ln x} = c$. Comme $x < c < y$, on a les inégalités recherchées.
- $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$ et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ et $f'(1) < 0$ d'après la première question. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x,y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) > 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.
- Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exercice 2.6 *Correction* :
L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 1 + e^t > 0$, donc f est strictement croissante, et de fait injective. D'où $x + e^x = y + e^y \Leftrightarrow x = y$. Puis,

$$x^2 + xy + y^2 = 27 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

On conclut que l'ensemble des solutions du système proposé est $\{(-3,-3),(3,3)\}$.

Exercice 2.7 *Correction* :
Notons $I =]-1,+\infty[$, $J = \left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$ et $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\exp(x) \end{array}$.

- $\tilde{f}$ est dérivable sur I comme produit de fonctions qui le sont, et on a : $\forall x \in I$, $\tilde{f}'(x) = (1+x)\exp(x) > 0$ donc $\tilde{f}$ est strictement croissante sur I.
- $\tilde{f}$ est continue et strictement monotone entre intervalles de $\mathbb{R}$, donc induit une bijection de I sur $\tilde{f}(I) = J$. Cette bijection est $\begin{array}{ccc} I & \mapsto & J \\ x & \to & x\exp(x) \end{array}$, c'est-à-dire f (qui est donc bien définie).
- f est de classe C^∞ sur I, bijective et $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ donc $f^{-1} \equiv g$ est de classe C^∞ sur J.
- g est de classe C^3 sur J et $0 \in J$ donc g possède un DL en 0 d'après la formule de Taylor-Young. On a $f(0) = 0$ donc aussi $g(0) = 0$ de sorte qu'on peut écrire le DL de g sous la forme indéterminée suivante :
$$g(u) \underset{0}{=} au + bu^2 + cu^3 + \circ(u^3).$$
On a aussi le DL en 0 de f :
$$f(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \circ(x^3) = x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)).$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on a donc :
$$x = g(f(x)) = af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) + \circ((f(x)^3).$$
On a : $\circ((f(x)^3) \underset{0}{=} \circ(x^3)$ car : $f(x) \underset{0}{\sim} x$. Donc :
$$\begin{array}{rcl} x & = & ax(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)) + bx^2(1 + 2x + \circ(x)) + cx^3(1 + \circ(1)) + \circ(x^3) \\ & = & ax + (a+b)x^2 + (\dfrac{a}{2} + 2b + c)x^3 + \circ(x^3). \end{array}$$
Par unicité du DL de la fonction identité au voisinage de 0, on obtient : $a = 1$, $b = -1$ et $c = \dfrac{3}{2}$ et ainsi :
$$g(x) \underset{0}{=} x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \circ(x^3).$$
- On a : $\forall x \in J$, $x = f(g(x)) = g(x)\exp(g(x))$ et g reste strictement positive sur $\mathbb{R}^{\star+}$ (car g est strictement croissante et $g(0) = 0$) donc : $\forall x > 0$, $\ln x = \ln(g(x)) + g(x)$ ou encore $\dfrac{\ln x}{g(x)} = 1 + \dfrac{\ln(g(x))}{g(x)}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ comme f, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(g(x))}{g(x)} = 0$ par composition des limites, d'où : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Exercice 2.8 *Correction* :

La fonction exponentielle est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? On suppose ne pas savoir que la fonction exponentielle est infiniment dérivable.

Définition 0.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tout x et tout y de I, tout couple (α, β) de réels positifs vérifiant $\alpha + \beta = 1$, on a l'inégalité $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$*

On doit établir, sous les conditions de l'énoncé, que : $e^{\alpha x + \beta y} \leq \alpha e^x + \beta e^y$. Considérons la fonction de la variable x définie par $f(x) = e^{\alpha x + \beta y} - \alpha e^x - \beta e^y$. Sa dérivée est
$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x + \beta y} - \alpha e^x = \alpha e^{\alpha x + \beta y} - \alpha e^x = \alpha e^{\alpha x + \beta y}(1 - e^{x - \alpha x - \beta y}) = \alpha e^{\alpha x + \beta y}(1 - e^{\beta(x-y)}).$$
Elle s'annule si $\alpha\beta = 0$, pour tout x et tout y, ou si $x = y$.
- Traitons le premier cas, par exemple $\beta = 0$. Il faut vérifier que, pour tout x, si $\alpha = 1$: $e^{\alpha x} \leq \alpha e^x$, ce qui est évident.
- Supposons dorénavant $\beta \neq 0$. La dérivée s'annule donc si $x = y$, elle est positive si $x < y$, et négative si $x > y$. La fonction f admet donc un maximum pour $x = y$ et ce maximum est :
$$f(y) = e^{\alpha x + \beta y} - \alpha e^y - \beta e^y = e^y - \alpha e^y - \beta e^y = 0.$$
Il en résulte bien que $f(x)$ est inférieur à 0 pour tout x et tout y.

Exercice 2.9 *Correction* :

1. (E_1) : $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln 18$.
   Le domaine de définition de (E_1) est $\mathcal{D}_{E_1} = \left\{ \begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ x + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > -1 \\ x > 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in]2, +\infty[$. Ensuite,
$$(E_1) \Leftrightarrow \ln((x+1)(x-2)) = \ln 18 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 18 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 < 0 \end{array} \right.$$
2. (E_2) : $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$.
   Le domaine de définition de (E_2) est $\mathcal{D}_{E_2} = \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. Ensuite,
$$(E_2) \Leftrightarrow \ln(|x(x+1)|) = \ln 1 \Leftrightarrow |x(x+1)| = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x+1) = 1 \\ -x(x+1) = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

3. $(E_3) : 9^x + 3^x - 12 = 0$.
Le domaine de définition de (E_3) est $\mathcal{D}_{E_3} = \mathbb{R}$. Ensuite,

$$(E_3) \Leftrightarrow 3^{2x}+3^x-12 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2+3^x-12 = 0 \overset{X=3^x}{\Leftrightarrow} X^2+X-12 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 3 \\ X_2 = -4 < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

4. $(E_4) : x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
Le domaine de définition de (E_4) est $\mathcal{D}_{E_4} = \mathbb{R}_+$. Ensuite,

$$(E_4) \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = \frac{x}{2}\ln x$$

car la fonction exponentielle est croissante continue donc injective. Ainsi,

$$(E_4) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)\ln x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{x}{2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{x^2}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

Exercice 2.10 *Correction* :

1. Montrons que $2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2} = \text{Arctan}\,\frac{4}{3}$.
On pose $\left\{ \begin{array}{l} a = \text{Arctan}\,\frac{1}{2} \\ b = \text{Arctan}\,\frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan a = \frac{1}{2} \\ \tan b = \frac{4}{3} \end{array} \right.$. En effet, $\tan(\text{Arctan}\,x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (cf. Propriété 2.3.8 du cours). On remarque ensuite que $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3} = \tan b$. Donc

$$\tan(2a) = \tan b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2a = b + k\pi.$$

D'autre part, on a $0 < a = \text{Arctan}\,\dfrac{1}{2} < \text{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2a < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < b = \text{Arctan}\,\dfrac{4}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(2a) = \tan b \\ 2a, b \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right. \Rightarrow 2a = b.$$

2. Montrons que $2\,\text{Arccos}\,\frac{3}{4} = \text{Arccos}\,\frac{1}{8}$.
On pose $\left\{ \begin{array}{l} a = \text{Arccos}\,\frac{3}{4} \\ b = \text{Arccos}\,\frac{1}{8} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \frac{3}{4} \\ \cos b = \frac{1}{8} \end{array} \right.$. En effet, $\tan(\text{Arctan}\,x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (cf. Propriété 2.3.1 du cours). On remarque que $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \dfrac{1}{8} = \cos b$. Ensuite,

$$\cos(2a) = \cos b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2a = \pm b + 2k\pi.$$

D'autre part, on a $0 < a = \text{Arccos}\,\dfrac{3}{4} < \text{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2a < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < b = \text{Arccos}\,\dfrac{1}{8} < \dfrac{\pi}{2}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(2a) = \cos b \\ 2a, b \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right. \Rightarrow 2a = b.$$

3. Montrons que $\text{Arccos}\,\frac{5}{13} = 2\,\text{Arctan}\,\frac{2}{3}$.
On pose $\left\{ \begin{array}{l} a = \text{Arccos}\,\frac{5}{13} \\ b = \text{Arctan}\,\frac{2}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \frac{5}{13} \\ \tan b = \frac{2}{3} \end{array} \right.$ (cf. Propriétés 2.3.1 et 2.3.8 du cours). On remarque que $\cos(2b) = \dfrac{1-\tan^2 b}{1+\tan^2 b} = \dfrac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}} = \dfrac{5}{13} = \cos a$. Ensuite,

$$\cos(2b) = \cos a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2b = \pm a + 2k\pi.$$

D'autre part, on a $0 < b = \text{Arctan}\,\dfrac{2}{3} < \text{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2b < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < a = \text{Arccos}\,\dfrac{5}{13} < \dfrac{\pi}{4}$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos(2b) \\ a, 2b \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right. \Rightarrow a = 2b.$$

4. Montrons que $\operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}$.
On pose $\begin{cases} a = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}} \\ b = \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \tan b = \frac{1}{3} \end{cases}$ (cf. Propriétés 2.3.4 et 2.3.8 du cours). On remarque que $\tan a = \dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{2} = \cos a$ et que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - b\right) = \dfrac{1-\tan b}{1+\tan b} = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$. Ensuite,
$$\tan a = \tan\left(\frac{\pi}{4} - b\right) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a = \frac{\pi}{4} - b + k\pi.$$
D'autre part, on a $0 < a = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{\sqrt{5}} < \operatorname{Arcsin} 1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \dfrac{\pi}{4} - b = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ donc
$$\begin{cases} \tan a = \tan\left(\frac{\pi}{4} - b\right) \\ a, \frac{\pi}{4} - b \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} - b.$$

5. Montrons que $\operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13} + \operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{56}{65}$.
On pose $\begin{cases} a = \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13} \\ b = \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} \\ c = \operatorname{Arcsin}\frac{56}{65} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{5}{13} \\ \sin b = \frac{3}{5} \\ \sin c = \frac{56}{65} \end{cases}$ (cf. Propriété 2.3.4 du cours). On remarque que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \dfrac{5}{13}\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} + \dfrac{3}{5}\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \dfrac{56}{65} = \sin c$. Ensuite,
$$\sin(a+b) = \sin c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a+b = c + 2k\pi \text{ ou } a+b = \pi - c + 2k\pi.$$
D'autre part, on a $0 < a = \operatorname{Arcsin}\dfrac{5}{13} < \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ et $0 < b = \operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} < \operatorname{Arcsin}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ donc
$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin c \\ a+b, c \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Rightarrow a+b = c.$$

6. Montrons que $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{8}$.
On pose $\begin{cases} a = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} \\ b = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \\ c = \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan a = \frac{1}{2} \\ \tan b = \frac{1}{5} \\ \tan c = \frac{1}{8} \end{cases}$ (cf. Propriété 2.3.8 du cours). On remarque que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \dfrac{7}{9}$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - c\right) = \dfrac{1-\tan c}{1+\tan c} = \dfrac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \dfrac{7}{9}$. Ensuite,
$$\tan(a+b) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a+b = \frac{\pi}{4} - c + k\pi.$$
D'autre part, on a $0 < a+b = \operatorname{Arctan}\dfrac{7}{9} < \operatorname{Arctan} 1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < \dfrac{\pi}{4} - c = \operatorname{Arctan}\dfrac{7}{9} < \dfrac{\pi}{2}$ donc
$$\begin{cases} \tan(a+b) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - c\right) \\ a+b, \frac{\pi}{4} - c \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{\pi}{4} - c.$$

Exercice 2.11 *Correction* :

1. Simplifions $y = \cos(4 \operatorname{Arctan} x)$. On pose
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Arctan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = x \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$
Alors
$$y = \cos(4\alpha) = 1 - 2\sin(2\alpha) = 1 - 2\left(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right) = 1 - \frac{8x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2. Simplifions $y = \sin(3 \operatorname{Arctan} x)$. On pose
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{Arctan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = x \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

On rappelle la

Proposition 0.2 (Formule de Moivre) *Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif n :*

$$(\cos +i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

On peut exprimer $\sin(3\alpha)$ comme combinaison linéaire de puissances de $\sin\alpha$ grâce à la formule précédente :

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \mathrm{Im}(\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)) = \mathrm{Im}((\cos\alpha+i\sin\alpha)^3) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Comme $\sin(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (cf. Propriété 2.3.8 du cours),

$$y = 3\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 4\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Simplifions $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\, x\right)$. On pose

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = \mathrm{Arcsin}\, x \\ x\in[-1,1]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin\alpha = x \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\end{array}\right. .$$

Alors

$$y = \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} \;(+ \text{ si } x\in[0,1],\; - \text{ si } x\in[-1,0]).$$

Exercice 2.12 *Correction* :

1. Montrons que $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.
   - Par dérivation : soit $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$, $x\in[-1,1]$. f est dérivable sur $]-1,1[$, et $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Par conséquent, $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=c$. Comme $c = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on a la formule demandée sur $]-1,1[$. Pour conclure, on vérifie l'égalité pour $x=\pm1$, ou on utilise la continuité de f sur $[-1,1]$.
   - Par inversion : on pose $a = \mathrm{Arcsin}\, x$, $b = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arccos}\, x$. Ces deux égalités impliquent respectivement $\sin a = x$ et $\sin b = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arccos}\, x\right) = \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$. Donc $\sin a = \sin b$ ce qui implique d'après la propriété 2.3.4 du cours que $\exists k\in\mathbb{Z}$, $a = b+2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$. Comme $a,b\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$, on en déduit que $a=b$.
2. Montrons que $\mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arccos}(-x) = \pi$.
   - Par dérivation : soit $f(x) = \mathrm{Arccos}\, x + \mathrm{Arccos}(-x)$, $x\in[-1,1]$. f est dérivable sur $]-1,1[$, et $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Par conséquent, $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=c$. Comme $c=f(0)=\pi$, on a la formule demandée sur $]-1,1[$. Pour conclure, on vérifie l'égalité pour $x=\pm1$, ou on utilise la continuité de f sur $[-1,1]$.
   - Par inversion : on pose $a = \mathrm{Arccos}(-x)$, $b = \pi - \mathrm{Arccos}\, x$. Ces deux égalités impliquent respectivement $\cos a = -x$ et $\cos b = \cos(\pi - \mathrm{Arccos}\, x) = -\cos(\mathrm{Arccos}\, x) = -x$. Donc $\cos a = \cos b$ ce qui implique d'après la propriété 2.3.1 du cours que $\exists k\in\mathbb{Z}$, $a = \pm b + 2k\pi$. Comme $a,b\in[0,\pi]$, on en déduit que $a=b$.
3. Montrons que $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} \text{ si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x<0\end{array}\right.$.
   - Par dérivation : soit $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$. f est impaire. Pour $x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. Par conséquent, $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)=c$. Comme $c = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, on a la formule demandée sur $]0,+\infty[$ soit $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. En utilisant la parité de f, on peut affirmer que $\forall x\in]-\infty,0[$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.
   - Par inversion : pour $x>0$, on pose $a = \mathrm{Arctan}\, x$, $b = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}$. Ces deux égalités impliquent respectivement $\tan a = x$ et $\tan b = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}\right)} = x$. Donc $\tan a = \tan b$ ce qui implique d'après la propriété 2.3.8 du cours que $\exists k\in\mathbb{Z}$, $a = b+2k\pi$. Comme $a,b\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$, on en déduit que $a=b$.

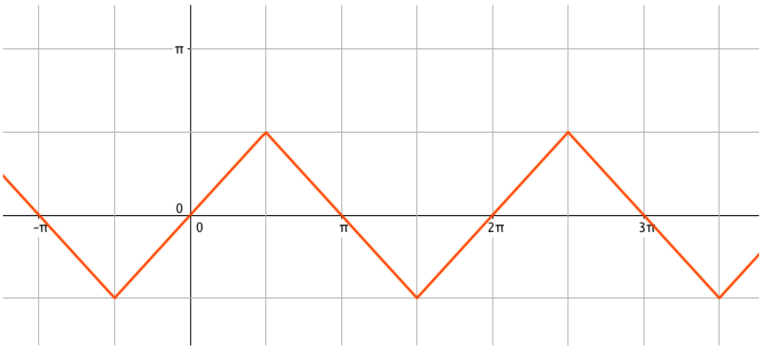
4. Montrons que $\operatorname{Arctan}(2x+1) - \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ si } x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4} \text{ si } x < -1 \end{cases}$.

   On pose $f(x) = \operatorname{Arctan}(2x+1) - \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x+1}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On trouve $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = 0$. D'où :
   - $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = c_1$, $c_1 = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$.
   - $\forall x \in]-\infty, -1[$, $f(x) = c_2$, $c_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3\pi}{4}$.

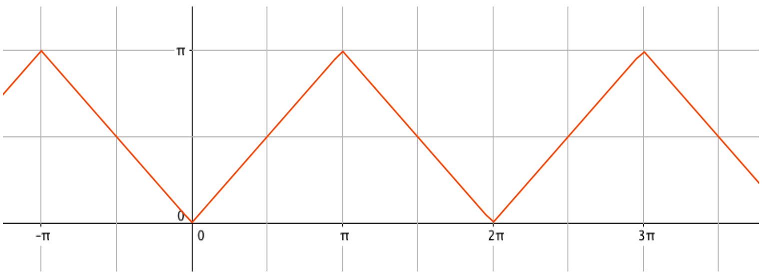
5. - Montrons que $\operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arccotan}(1+x+x^2)$.
     On pose $f(x) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan} x$ et $g(x) = \operatorname{Arccotan}(1+x+x^2)$. $\forall x \in \mathbb{R}$,
     $$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1+2x}{(1+x^2)(2+2x+x^2)} = g'(x).$$
     Donc $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + c$, $c = f(0) - g(0) = 0$.
   - On a
     $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}(1+k) - \sum_{k=1}^{n} n \operatorname{Arctan} k = \sum_{k=2}^{n+1} \operatorname{Arctan} k - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan} k$$
     donc $S_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(1) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2.13 *Correction* :

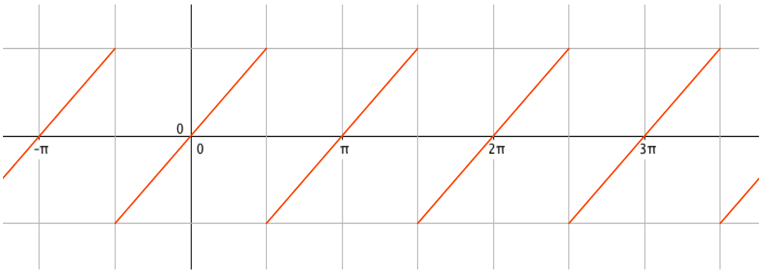
1. Soit $y = f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$. On a $\mathcal{D}_f$, f est de période $T = 2\pi$, impaire et vérifie $f(\pi - x) = f(x)$. On peut se limiter à $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a
   $$\begin{array}{c} y = \operatorname{Arcsin}(\sin x) \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \sin y = \sin x \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{array} \Leftrightarrow y = x.$$
   Comme f est impaire, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = x$. Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc, $f(x) = (\pi - x) = \pi - x$ sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



2. Soit $y = f(x) = \operatorname{Arccos}(\cos x)$. On a $\mathcal{D}_f$, f est de période $T = 2\pi$, paire. On peut se limiter à l'intervalle $[0, \pi]$. On a
   $$\begin{array}{c} y = \operatorname{Arccos}(\cos x) \\ 0 \le x \le \pi \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \cos y = \cos x \\ x, y \in [0, \pi] \end{array} \Leftrightarrow y = x.$$
   Donc,$\forall x \in [0, \pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$.



3. Soit $y = f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$. On a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, f est de période $T = \pi$, impaire. On peut se limiter à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a
   $$\begin{array}{c} y = \operatorname{Arctan}(\tan x) \\ 0 \le x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \tan y = \tan x \\ x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array} \Leftrightarrow y = x.$$
   Donc,$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$.



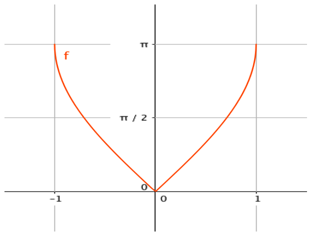
Exercice 2.14 *Correction* :On pose $y = f(x) = \operatorname{Arccos}(1 - 2x^2)$.

1. f est définie si : $-1 \leq u(x) = 1 - 2x^2 \leq 1$. Donc, $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.
2. On pose $\begin{matrix} x = \sin\varphi \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi = \operatorname{Arcsin} x \\ x \in [0, 1] \end{matrix}$. Alors

$$f(\sin\varphi) = \operatorname{Arccos}(1 - 2\sin\varphi) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\varphi)) = 2\varphi \text{ car } 2\varphi \in [0, \pi]$$

Donc : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2\operatorname{Arcsin} x$. Comme f est paire, $\forall x \in [-1, 0]$, $f(x) = -2\operatorname{Arcsin} x$.

3.



On peut bien-sûr retrouver ces résultats par dérivation.

Exercice 2.15 *Correction* : Soit $f(x) = \operatorname{Arccos} \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|1 - x^2| \leq 1 + x^2 \Rightarrow |u(x)| = \left|\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right| \leq 1$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, f est paire.
2. (a) On trouve $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$. Donc, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan} x + c$. Comme $x = 1 \Rightarrow c = 0$ et que l'égalité reste valable pour $x = 0$ par continuité, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan} x$. Comme f est paire, $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = f(-x) = -2\operatorname{Arctan} x$.

   (b) $f'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$ si $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{2}{1 + x^2}$ si $x < 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0, 1] \\ f \text{ dérivable sur }]0, 1[\\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ est dérivable à droite en } x = 0 \text{ et } f'_d(0) = 2.$$

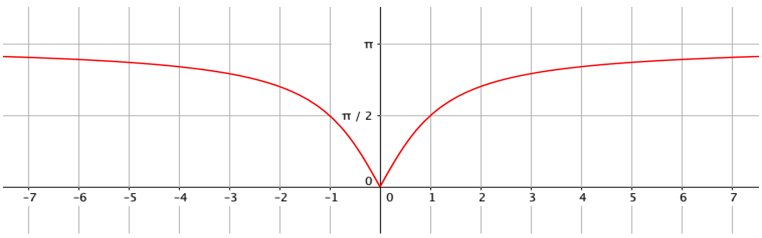
   On trouve de même que f est dérivable à gauche en $x = 0$ et $f'_g(0) = -2$. On en déduit que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

3. On sait que $\begin{matrix} x = \tan\frac{\varphi}{2} \\ \varphi \in [0, \pi[\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi = 2\arctan x \\ x \geq 0 \end{matrix}$. Donc

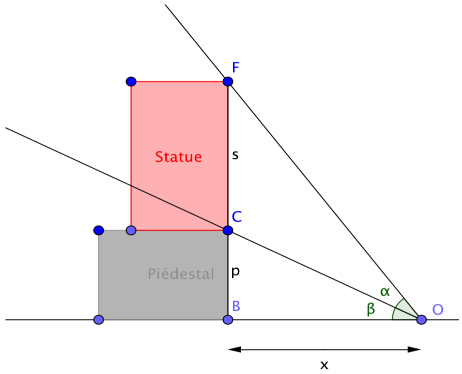
$$f\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{Arccos}\frac{1 - \tan^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{Arccos}(\cos\varphi) = \varphi \text{ car } \varphi \in [0, \pi[.$$

Donc on retrouve : $f(x) = 2\operatorname{Arctan} x$ si $x \geq 0$.

4.



Exercice 2.16 *Correction* : On a la configuration suivante :



On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue, et β l'angle d'observation du piédestal seul.

1. On a
   - dans le triangle rectangle (OCB), $\tan\beta = \dfrac{CB}{BO} = \dfrac{p}{x} \Leftrightarrow \beta = \arctan\left(\dfrac{p}{x}\right)$
   - dans le triangle rectangle (OFB), $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{FB}{BO} = \dfrac{p+s}{x} \Leftrightarrow \alpha+\beta = \arctan\left(\dfrac{p+s}{x}\right)$

   On en déduit que $\alpha = \alpha(x) = \arctan\left(\dfrac{p+s}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{p}{x}\right)$. Étudions cette fonction α sur $]0,+\infty[$. α est dérivable de dérivée :

   $$\alpha'(x) = \frac{-\frac{s+p}{x^2}}{1+\left(\frac{s+p}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{p}{x^2}}{1+\left(\frac{p}{x}\right)^2} = \frac{s}{(x^2+p^2)(x^2+(s+p)^2)}(p(p+s)-x^2)$$

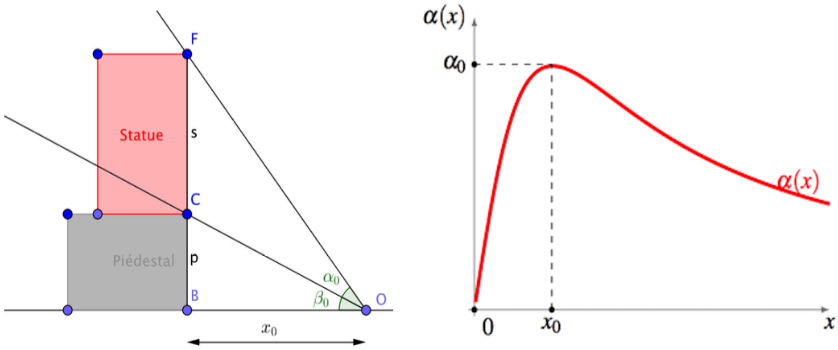
   On remarque que α' ne s'annule sur $]0,+\infty[$ qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$. Par des considérations physiques, à la limite en 0 et en $+\infty$, l'angle α est nul. On en déduit que l'angle α obtenu en x_0 est maximum, et la distance optimale de vision est alors $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.
2. Pour calculer l'angle maximum α_0 correspondant, on pourrait calculer $\alpha_0 = \alpha(x_0)$ à partir de la défintion de $\alpha(d)$. Pour obtenir une formule plus simple, nous utilisons la formule trigonométrique suivante : si a, b et $a-b$ sont dans l'intervalle de définition de la fonction tangente, on a : $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan\tan b}$. On a ici :

   $$\tan\alpha_0 = \tan((\alpha_0+\beta_0)-\beta_0) = \frac{\frac{p+s}{x_0} - \frac{p}{x_0}}{1+\frac{p+s}{x_0}\times\frac{p}{x_0}} = \frac{s}{2x_0} = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$$

   Comme $\alpha_0 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on en déduit $\alpha_0 = \arctan\dfrac{s}{2x_0} = \arctan\dfrac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$
3. Pour la Statue de la Liberté, on a la hauteur de la statue $s = 46$ met la hauteur du piédestal $p = 47$ m. On trouve donc

   $$x_0 = \sqrt{p(p+s)} \simeq 65,40 \text{ m et } \alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}} \simeq 19^{\text{o}}.$$

   Voici les représentations de la statue et de la fonction $\alpha(x)$ pour ces valeurs de s et p.



Exercice 2.17 *Correction* :

1. Soit $(a,b) \in [0,1[^2$. On note $u \arctan a$ et $v = \arctan b$. On a alors, en utilisant une formule de trigonométrie sur tan,
$$\tan(u+v) = \frac{\tan u \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{a+b}{1-ab}$$
Comme $(u,v) \in [0, \frac{\pi}{4}[^2$, on a $u+v \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on déduit l'égalité voulue soit $\arctan a + \arctan b = \arctan \dfrac{a+b}{1-ab}$.
2. On applique 1. de façon répétée :
$$\begin{aligned} S &= 2\left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{18}\right) + 3\left(\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{57}\right) = 2 \arctan \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{18}}{1-\frac{1}{8}\times\frac{1}{18}} + 3 \arctan \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{57}}{1-\frac{1}{8}\times\frac{1}{57}} \\ &= 2\arctan \frac{2}{11} + 3 \arctan \frac{1}{7} = 2\left(\arctan \frac{2}{11} + \arctan \frac{1}{7}\right) + \arctan \frac{1}{7} = 2 \arctan \frac{\frac{2}{11}+\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{1}{7}} + \arctan \frac{1}{7} \\ &= 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \left(\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}\right) + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} + \arctan \frac{1}{3} \\ &= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2.18 *Correction* :

1. $\operatorname{ch}(3x) = \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} = 4\left[\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right))^3 - \dfrac{3}{8}e^{2x}e^{-x} - \dfrac{3}{8}e^{x}e^{-2x}\right] = 4\left[\operatorname{ch}^3 x - \dfrac{3}{8}(e^x+e^{-x})\right]$
$\Leftrightarrow \operatorname{ch}(3x) = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x$.
$\operatorname{sh}(3x) = \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{2} = \dfrac{1}{2}[(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^3 - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^3] = 4\operatorname{ch}^3 x + 3 \operatorname{sh} x$.
2. Soit $f(x) = \operatorname{ch}(3x) - 3\operatorname{sh} x$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et f paire. Pour $x \geq 0$, $f'(x) = 3\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh} x = 3(\operatorname{sh}(3x) - \operatorname{sh} x) = 3(4\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x) = 6(2\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x) = 6\operatorname{sh} x(2\operatorname{sh}^2 x + 1) \geq 0$ pour $x \geq 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe $f'(x)$			$+$		
Variations f	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Pour $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} - \dfrac{3}{2}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}e^{3x}[1 + e^{-6x} - 3e^{-2x} - 3e^{-4x}]$. D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si l'on pose $g(x) = \dfrac{e^{3x}}{2} - \dfrac{3}{2}e^x$, on vérifie que $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. La courbe d'équation $y = \dfrac{e^{3x}}{2} - \dfrac{3}{2}e^x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f.
- $\exists! \alpha > c$, $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch}(3\alpha) - 3\operatorname{ch}\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\operatorname{ch}^3\alpha - 3\operatorname{ch}\alpha - 3\operatorname{ch}\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{ch}\alpha[2\operatorname{ch}^2\alpha - 3] = 0 \overset{\alpha \geq 0}{\Leftrightarrow}$ $\alpha = \operatorname{Argch}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Exercice 2.19 *Correction* :

1. $\operatorname{sh}^4 x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4 = \dfrac{e^{4x} - 4e^{3x}e^{-x} + 6e^{2x}e^{-2x} - 4e^{x}e^{-3x} + e^{-4x}}{2^4} = \dfrac{1}{8}\operatorname{ch}(4x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(2x) + \dfrac{3}{8}$.
2. $\displaystyle\int \operatorname{sh}^4 x dx = \int \left(\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4x) - \frac{1}{2}\operatorname{ch}(2x) + \frac{3}{8}\right) dx = \frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x) + \frac{3}{8}x$.

Exercice 2.20 *Correction* :

1. $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0 \Leftrightarrow a\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + b\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow (a+b)e^{2x} + (a-b) = 0$.
   - Si $a + b \neq 0$ et $\dfrac{b-a}{a+b} \leq 0$, pas de solution.
   - Si $a + b \neq 0$ et $\dfrac{b-a}{a+b} > 0$, une solution unique $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right)$.
   - Si $a + b = 0$ et $a \neq b$, pas de solution.
   - Si $a = b = 0$, tout réel x convient.

2. $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^{\operatorname{Argsh}(x-a)} = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^{\operatorname{Argsh}(x-b)} \Leftrightarrow (e^x)^{\operatorname{Argsh}(x-a)} = (e^{-x})^{\operatorname{Argsh}(x-b)}$
$\Leftrightarrow e^{x \operatorname{Argsh}(x-a)} = e^{-x \operatorname{Argsh}(x-b)} \Leftrightarrow x \operatorname{Argsh}(x-a) = -x \operatorname{Argsh}(x-b)$ par injectivité de l'exponentielle.
   - Si $x = 0$, l'égalité est vérifiée et 0 est donc une solution de l'équation.
   - Si $x = 0$, on a $\operatorname{Argsh}(x-a) = -\operatorname{Argsh}(x-b) = \operatorname{Argsh}(b-x)$ car la fonction Argsh est impaire. Ensuite, par injectivité de Argsh on obtient : $x - a = b - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a+b}{2}$.

   Finalement, $(S) = \left\{0, \dfrac{a+b}{2}\right\}$.
3. On a d'une part $\operatorname{Argth} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \dfrac{1}{2}\ln((\sqrt{2}+1)^2) = \ln(\sqrt{2}+1)$. D'autre part, on a la propriété $\operatorname{Argch}\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}\right) = \ln(\sqrt{2}+1)$. Donc l'équation se réécrit :
$$2\operatorname{Argsh} x = \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow \operatorname{Argsh} x = \ln(\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow x = 1$$
par définition de la fonction Argsh et de sa bijectivité (unicité de la solution).

Exercice 2.21 *Correction* : En utilisant les définitions, on a
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + \dfrac{e^y+e^{-y}}{2} & = & 4 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} + \dfrac{e^y-e^{-y}}{2} & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y} & = & 8 & (L_1) \leftarrow (L_1)+(L_2) \\ e^x-e^{-x}+e^y-e^{-y} & = & 2 & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^x+e^y & = & 5 \\ e^{-x}-e^{-y} & = & 3 \end{array}\right.$$
Si on pose $X = e^x$ et $Y = e^y$, le système (S) s'écrit :
$$\left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & 5 \\ \dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y} & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & 5 \\ X+Y & = & 3XY \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & 5 \\ XY & = & \dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X & = & 5-Y \\ Y^2-5Y+\dfrac{5}{3} & = & 0 \end{array}\right.$$
Le trinôme admet pour discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-\frac{5}{3}) = \frac{55}{3}$. L'équation a donc deux solutions distinctes
$$Y_1 = \frac{5-\sqrt{\frac{55}{3}}}{2} = \frac{15-\sqrt{165}}{6} > 0 \text{ et } Y_2 = \frac{5+\sqrt{\frac{55}{3}}}{2} = \frac{15+\sqrt{165}}{6} > 0.$$
On obtient alors
$$X_1 = 5 - Y_1 = 5 - \frac{15-\sqrt{165}}{6} = \frac{15+\sqrt{165}}{6} > 0 \text{ et } X_2 = 5 - Y_2 = \frac{5-\sqrt{165}}{6} > 0.$$
Comme $x = \ln X$ et $y = \ln Y$, le système proposé admet deux couples solutions qui sont
$$\left(\ln\frac{15-\sqrt{165}}{6}, \ln\frac{15+\sqrt{165}}{6}\right) \text{ et } \left(\ln\frac{15+\sqrt{165}}{6}, \ln\frac{15-\sqrt{165}}{6}\right).$$

Exercice 2.22 *Correction* : On remarque tout d'abord que le système n'admet pas de solution pour $a < 2$ puisque $\operatorname{ch} x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
1ère méthode : On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y & = & a\operatorname{ch} b \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y & = & a\operatorname{sh} b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} 2\operatorname{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) & = & a\operatorname{ch} b & (L_1) \\ 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) & = & a\operatorname{sh} b & (L_2) \end{array}\right.$$
En divisant (L_2) par (L_1) ($\operatorname{ch} x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$), on obtient grâce à l'injectivité de la tangente hyperbolique, $\operatorname{th}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \operatorname{th} b \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2} = b \Leftrightarrow x = 2b - y$. Si on injecte cette expression dans (L_1), on obtient :
$$2\operatorname{ch} b \operatorname{ch}(b-y) = a\operatorname{ch} b \Leftrightarrow 2\operatorname{ch}(b-y) = a \Leftrightarrow \operatorname{ch}(b-y) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow b - y = \pm\operatorname{Argch}\frac{a}{2} \Leftrightarrow y = b - \pm\operatorname{Argch}\frac{a}{2}$$
On en déduit les couples solutions

$$\left(b+\operatorname{Argch}\frac{a}{2}, b-\operatorname{Argch}\frac{a}{2}\right) \text{ et } \left(b-\operatorname{Argch}\frac{a}{2}, b+\operatorname{Argch}\frac{a}{2}\right).$$

2ème méthode : On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y &=& a\operatorname{ch}b \\ \operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y &=& a\operatorname{sh}b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^x+e^{-x}+e^y+e^{-y} &=& a(e^b+e^{-b}) \\ e^x-e^{-x}+e^y-e^{-y} &=& a(e^b-e^{-b}) \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} (L_1)\leftarrow(L_1)+(L_2) \\ (L_2)\leftarrow(L_1)-(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2e^x+2e^y &=& 2ae^b \\ 2e^{-x}+2e^{-y} &=& 2ae^{-b} \end{array}\right.$$

Si on pose $X=e^x$ et $Y=e^y$, le système précédent s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X+Y &=& ae^b \\ \dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{Y} &=& ae^{-b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X+Y &=& ae^b \\ X+Y &=& ae^{-b}XY \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X &=& ae^b-Y \\ ae^b-Y+Y &=& ae^{-b}(ae^b-Y)Y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X &=& ae^b-Y \\ ae^{-b}Y^2-a^2Y+ae^b &=& 0 \end{array}\right.$$

Comme $a\neq 0$, le système peut se réécrire :

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X &=& ae^b-Y \\ e^{-b}Y^2-aY+e^b &=& 0 \end{array}\right.$$

Le trinôme admet pour discriminant $\Delta=a^2-4(e^{-b}\times e^b)=a^2-4=(a-2)(a+2)$. Comme $a\geq 2$, le discriminant ne peut pas être négatif.

- Si $\Delta=0\Leftrightarrow a=2$, le trinôme admet une racine double $X=\dfrac{a}{2e^{-b}}=e^b$ ce qui implique que $Y=e^b$. Le système admet alors une unique solution de la forme $(x,y)=(b,b)$.
- Si $\Delta>0\Leftrightarrow a\in]2,+\infty[$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$X_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2e^{-b}}=e^b\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right)=e^b\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right)^{-1}$$

et

$$X_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2e^{-b}}=e^b\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right).$$

On obtient alors

$$Y_1=ae^b-X_1=e^b\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right) \text{ et } Y_2=ae^b-X_2=e^b\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right)=e^b\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}\right)^{-1}.$$

On remarquera que $\ln X_1=\ln Y_2=b-\operatorname{Argch}\dfrac{a}{2}$ et $\ln X_2=\ln Y_1=b+2\operatorname{Argch}\dfrac{a}{2}$. Le système admet donc finalement 2 couples solutions qui sont

$$\left(b+\operatorname{Argch}\frac{a}{2}, b-\operatorname{Argch}\frac{a}{2}\right) \text{ et } \left(b-\operatorname{Argch}\frac{a}{2}, b+\operatorname{Argch}\frac{a}{2}\right).$$

Exercice 2.23 *Correction* : Pour $x\neq 0$, $\dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}-\dfrac{1}{\operatorname{th}x}=\dfrac{2}{\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}}-\dfrac{1}{\operatorname{th}x}=\dfrac{\operatorname{th}^2x}{\operatorname{th}x}=\operatorname{th}x$ ou encore, en utilisant $\operatorname{th}(2x)=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$, $2^p\operatorname{th}(2^px)=\dfrac{2^{p+1}}{\operatorname{th}(2^{p+1}x)}-\dfrac{2^p}{\operatorname{th}(2^px)}$. Alors

$$S_n(x)=\sum_{p=0} n+12^p\operatorname{th}(2^px)=\frac{2^{n+2}}{\operatorname{th}(2^{n+2}x)}-\frac{1}{\operatorname{th}x}.$$

Exercice 2.24 *Correction* : Notons $f,g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x\in[0,+\infty[$, par :

$$f(x)=\arctan(\operatorname{sh}x) \text{ et } g(x)=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$$

Par composition, f et g sont continues sur $[0,+\infty[$, dérivables sur $]0,+\infty[$, et, pour tout $x\in]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}x} \text{ et } g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}}\times\frac{-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}\times\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$$

Donc $f' = g'$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = g(x) + C$. En remplaçant x par 0, et puisque $f(0) = 0$ et $g(0) = \arccos 1 = 0$, on déduit que $C = 0$ et on conclut que $f = g$.

Exercice 2.25 *Correction* :

1. Ici, il n'y a pas de restriction d'intervalle. On peut donc utiliser sans précaution les égalités $\operatorname{Argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x$, et $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(t)) = t$. Cherchons une expression de $\operatorname{Argsh}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. Il faut résoudre l'équation $\operatorname{sh}(y) = x$: $\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = x$. Posons $Y = e^y$. Alors, $\dfrac{Y - \frac{1}{Y}}{2} = x$ ce qui implique $Y^2 - 2xY - 1 = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $4x^2 + 4$ et donc deux racines distinctes soit :

$$Y_1 = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} = x + \sqrt{x^2+1} \text{ et } Y_2 = \frac{2x - \sqrt{4x^2+4}}{2} = x - \sqrt{x^2+1}.$$

La seconde racine est négative, donc ne peut être la valeur d'une exponentielle. Seule la première racine convient : ainsi, $e^x = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

2. • Il faut résoudre l'équation : $\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = x$. On fait le même changement d'inconnue que précédemment. On a $\dfrac{Y + \frac{1}{Y}}{2} = x$ ce qui implique $Y^2 - 2xY + 1 = 0$. Le trinôme admet deux racines distinctes :

$$Y_1 = x + \sqrt{x^2-1} \text{ et } Y_2 = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Comme y est positif, Y est supérieur à 1. Or les racines ont pour produit 1, dont l'une est supérieure à 1 et l'autre inférieure. La racine supérieure à 1 est la plus grande des deux, soit Y_1. Il en résulte :

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

• Si $x = 1 + h$, h étant positif et tendant vers 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{x^2-1}) &= \ln(1+h+\sqrt{2h+h^2}) = \ln\left(1+\sqrt{2h}\sqrt{1+\frac{h}{2}}+h\right)\\
&= \ln\left(1+\sqrt{2h}\left(1+\frac{h}{4}+h\varepsilon(h)\right)+h\right) = \ln\left(1+\sqrt{2h}+h+\frac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{2}}+h\sqrt{h}\varepsilon(h)\right)\\
&= \sqrt{2h}+h+\frac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2h}+h+\frac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{2h}+h+\frac{h\sqrt{h}}{2\sqrt{2}}\right)+h\sqrt{h}\varepsilon(h)\\
&= \sqrt{2h} - \frac{h\sqrt{h}}{6\sqrt{2}} + h\sqrt{h}\varepsilon(h).
\end{aligned}$$