CPI1 - ANALYSE 1.2

CORRECTION Exercices Chapitre 3 - Limites et fonctions continues.

Exercice 3.1 <u>*Correction*</u> :

1. Soit $E = \left\{ -x^3 + \frac{75}{4}x, x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leq 13x^2 \right\}$.

   On a $x^4 + 36 \leq 13x^2 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3$. On pose $f(x) = -x^3 + \frac{75}{4}x$. Comme f est impaire, il suffit de l'étudier sur $[2,3]$. On trouve $\sup E = \frac{125}{4}$.

2. Soient $E = \{ \sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}^\star \}$ et $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \in [1, +\infty[$. $\forall x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = (1 - \ln x)\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		e		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	1	↗		↘	1

   Comme $f(2) = \sqrt{2} \simeq 1,414$ et $f(3) = \sqrt[3]{3} \simeq 1,442$, on a $\sup E = \sqrt[3]{3}$.

3. On fixe y dans $[1,2]$ et on étudie $f_y(x) = \frac{1+x}{y} + \frac{1+y}{x}$, $x \in [1,2]$. On trouve $\sup_{x \in [1,2]} f_y(x) = \frac{2}{y} + 1 + y$ qui est atteint pour $x = 1$. On étudie ensuite $g(y) = \frac{2}{y} + 1 + y$, $y \in [1,2]$. On trouve finalement que $\max_{(x,y) \in [1,2]^2} \left(\frac{1+x}{y} + \frac{1+y}{x} \right) = 4$.

Exercice 3.2 <u>*Correction*</u> :
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $y = f(x)$. On a :

$$f(x+2) = f((x+1)+1) = \frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3} = \frac{\frac{y-5}{y-3} - 5}{\frac{y-5}{y-3} - 3} = \frac{-4y+10}{-2y+4} = \frac{2y-5}{y-2}.$$

On calcule ensuite $f(x+4)$:

$$f(x+4) = f((x+2)+2) = \frac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2} = \frac{2\frac{2y-5}{y-2} - 5}{\frac{2y-5}{y-2} - 2} = \frac{-y}{-1} = y = f(x).$$

On a bien prouvé que f est 4-périodique.

Exercice 3.3 <u>*Correction*</u> :
Soit $a \in]0, +\infty[$ fixé. Considérons l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = f(x+a) - f(x)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $[0,1]$, la restriction de f à $[0,1]$ est bornée et atteint ses bornes d'après le théorème 3.4.4. Il existe donc $x_1, x_2 \in [0,1]$ tels que :

$$f(x_1) = \inf_{x \in [0,1]} f(x), \ f(x_2) = \sup_{x \in [0;1]} f(x).$$

Comme f est 1-périodique, on a alors

$$f(x_1) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x), \ f(x_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

On a $g(x_1) = f(x_1 + a) - f(x_1) \geq 0$, par définition de x_1, et $g(x_2) = f(x_2 + a) - f(x_2) \leq 0$, par définition de x_2. Ainsi, g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $g(x_1) \geq 0$, $g(x_2) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire : $f(c+a) = f(c)$.

Exercice 3.4 *Correction* :

1. $f(x) = 4x + 11$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$.
$$|f(x) - 3| \leq 3 \Leftrightarrow |4x + 8| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - (-2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$
Donc,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ (\eta = \frac{\varepsilon}{4}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ (|x - (-2)| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| \leq \varepsilon).$$

2. $f(x) = x^2 + 2x$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.
$$|f(x) - 3| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1|.|x + 3| \leq \varepsilon.$$
On se borne aux nombres x tels que $|x - 1| \leq 1$ c'est-à-dire tels que $x \in [0, 2]$. On a alors $3 \leq x + 3 \leq 5$, et donc $|x + 3| \leq 5 \Rightarrow |x - 1|.|x + 3| \leq 5|x + 1|$. En résumé, pour tout réel x vérifiant à la fois $|x - 1| \leq 1$ et $|x - 1| \leq \frac{\varepsilon}{5}$, on a $|f(x) - 3| \leq \varepsilon$. Alors,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ (\eta = \inf(1, \frac{\varepsilon}{5})),\ (|x - 1| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| \leq \varepsilon).$$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Soit $A > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^\star$,
$$\frac{1}{x^2} \geq A \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$
Donc,
$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0\ (\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}),\ (|x| \leq \eta \text{ et } x \in \mathbb{R}^\star \Rightarrow |f(x)| \geq A).$$

4. $f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
Pour $x \neq 3$, $\frac{1}{(x - 3)^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Il suffit de choisir x tel que $x - 3 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ c'est-à-dire $x \geq 3 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Donc,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ (A = 3 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}),\ (x \in \mathcal{D}_f \text{ et } x \geq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon).$$
Remarque : Étudions la limite de f en $-\infty$. On a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$. Pour que $(x - 3)^2 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, il suffit que $x - 3 \leq -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ soit $x \leq 3 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Soit $A = -3 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Alors,
$$(x \neq 3 \text{ et } x \leq -A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon).$$

Exercice 3.5 *Correction* :

1. Quand $x \to 0$, $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$ donc $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
2. Quand $x \to +\infty$, $\left|\frac{x \cos e^x}{x^2 + 1}\right| \leq \frac{x}{x^2 + 1} \to 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} = 0$.
3. Quand $x \to +\infty$, $e^{x - \sin x} \geq e^{x-1} \to +\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} e^{x - \sin x} = +\infty$.
4. Quand $x \to +\infty$, $\left|\frac{x + \arctan x}{x} - 1\right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \to 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \arctan x}{x} = 0$.
5. Quand $x \to 0$, $\frac{1}{x} - 1 \leq E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ donc $\left|E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right| \leq 1$ puis $\left|xE\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right| \leq |x| \to 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
6. Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ puis $xE\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \to 0$. Alors, $\lim_{x\to +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Exercice 3.6 *Correction* :

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x \times x^2}{x \times x} = x$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} = 0$.
2. $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{-x \times x}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = -1$.
3. $\dfrac{\sin(2x)}{(1-2x)^3-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{3(-2x)} = -\dfrac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{(1-2x)^3-1} = -\dfrac{1}{3}$.
4. $\dfrac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+\frac{x}{4}}}{\sqrt{1+\frac{x}{9}}-1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{N(x)}{D(x)}$. On a
   - $N(x) = ((1+x)^{\frac{1}{3}}-1) - ((1+\dfrac{x}{4})^{\frac{1}{2}}-1) = \dfrac{1}{3}x(1+\varepsilon_1) - \dfrac{1}{8}x(1+\varepsilon_2) \underset{0}{\sim} \dfrac{5}{24}x$.
   - $D(x) = \left(1+\dfrac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{18}$.

   Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3} = \dfrac{5}{2}$.
5. $\dfrac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{a^2x^2}{2}}{x.2.bx} = \dfrac{a^2}{4b}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)} = \dfrac{a^2}{4b}$ $(b \neq 0)$.
6. Soit $f(x) = (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) = 2(x-1)(x-\dfrac{1}{2})\tan(\pi x)$. On pose $x = \dfrac{1}{2}+t$. Alors
$$f(\frac{1}{2}+t) = (-1+2t)t.\tan(\frac{\pi}{2}+\pi t) = (-1+2t)t\frac{\cos(\pi t)}{-\sin(\pi t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi}$$
   donc $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x) = \dfrac{1}{\pi}$.
7. Soit $f(x) = (\pi-2x)\tan x$. On pose $x = \dfrac{\pi}{2}+t$.
$$f(\frac{\pi}{2}+t) = -2t\tan(\frac{\pi}{2}+t) = -2t\frac{\cos t}{-\sin t} \underset{0}{\sim} 2$$
   donc $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x = 2$.
8. Soit $f(x) = \tan(2x)\operatorname{cotan}(x+\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\tan(2x)}{\tan(x+\frac{\pi}{4})}$. On pose $x = \dfrac{\pi}{4}+t$. On a
$$f(\frac{\pi}{4}+t) = \frac{\tan(2t+\frac{\pi}{2})}{\tan(t+\frac{\pi}{2})} = \frac{\tan t}{\tan(2t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$$
   donc $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan(2x)\operatorname{cotan}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.
9. $f(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} - \sqrt{\ln(x^2-1)} = \dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(x^2-1)}{\sqrt{\ln(1+x^2)}+\sqrt{\ln(x^2-1)}} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$. On a
   - $N(x) = \ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \underset{\infty}{\sim} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-1\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.
   - $D(x) = \sqrt{2\ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{2\ln x + \ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{2\ln x}$.

   D'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2\sqrt{2\ln x}}$ et on obtient : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\ln(1+x^2)} - \sqrt{\ln(x^2-1)}\right) = 0$.
10. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{1}{x}\ln(e^x-1) - \dfrac{1}{x}\ln x$. On a $e^x-1 \underset{+\infty}{\sim} e^x \Rightarrow \ln(e^x-1) \underset{+\infty}{\sim} x$. Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
11. On rappelle les résultats suivants : pour $\alpha, \beta > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha(\ln|x|)^\beta = 0$. Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$. Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}e^x + x^9 - \ln x}{x^3 + (\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})e^x} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$
   - $N(x) = \sqrt{x}e^x + x^9 - \ln x = \sqrt{x}e^x\left[1 + \dfrac{x^9}{\sqrt{x}e^x} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}e^x}\right] \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}e^x$.

- $g(x) = \sqrt{x^3+x^2} - \sqrt{x^3} = \sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^3}\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}.$

D'où, $D(x) = x^3 + g(x)e^x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{x}e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}e^x + x^9 - \ln x}{x^3 + (\sqrt{x^3+x^2} - \sqrt{x^3})e^x} = 2.$

12.
$$\begin{aligned} f(x) = ((x+1)(x+2)\dots(x+n))^{\frac{1}{n}} - x &= x\left[\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\dots\left(1+\frac{n}{x}\right)\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \\ &= x\left[\left(1 + \frac{1+2+\dots+n}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \underset{+\infty}{\sim} x\frac{n(n+1)}{2nx}, \end{aligned}$$
ce qui permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[((x+1)(x+2)\dots(x+n))^{\frac{1}{n}} - x\right] = \frac{n+1}{2}.$

13. Soit $f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \frac{N(x)}{D(x)}$.
   - $N(x) = (x^x)^x = (e^{x\ln x})^x = e^{x^2\ln x}$.
   - $D(x) = x^{(x^x)} = x^{e^{x\ln x}} = e^{(e^{x\ln x})\ln x}$.

   Ainsi, $f(x) = e^{x^2\ln x - \ln x e^{x\ln x}} = e^{\ln x e^{x\ln x}\left[\frac{x^2}{e^{x\ln x}} - 1\right]} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.$

Exercice 3.7 *Correction* :

1. Soit $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
   $\ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\frac{1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$
2. Soit $f(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$.
   $\ln f(x) = x\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \underset{+\infty}{\sim} x\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - 1\right) = x\frac{2x}{x^2-x+1} \underset{+\infty}{\sim} 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^2.$
3. Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.
   $\ln f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sin^2 x}(\cos x - 1) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$
4. Soit $f(x) = (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.
   $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(\cos x + \sin x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}(\cos x + \sin x - 1) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$
5. Soit $f(x) = [\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{x}}$.
   $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(\ln(1+e^{-x})) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\ln(e^{-x}) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^{-x})]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$
6. Soit $f(x) = \left[\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right]^x$.
   $\ln f(x) = x\ln\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a} \underset{+\infty}{\sim} x\left(\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a} - 1\right) = x\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right) - \cos a}{\cos a}.$
   Alors $\ln f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\frac{-2\sin\left(a+\frac{1}{2x}\right)\sin\frac{1}{2x}}{\cos a} \underset{+\infty}{\sim} x\frac{-2\sin a\times\frac{1}{2x}}{\cos a} = -\tan a$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)} = e^{-\tan a}.$
7. Soit $f(x) = (\tan x)^{\tan(2x)}$.
   $\ln f(x) = \tan(2x)\ln(\tan x)$. On pose $x = \frac{\pi}{4} - t$. On a alors $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$ et $\tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = \frac{1}{\tan(2t)}$. Ensuite, $\ln f\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1}{\tan(2t)}\ln\frac{1-\tan t}{1+\tan t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\tan(2t)}\left(\frac{1-\tan t}{1+\tan t} - 1\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2t}(-2t) = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = \frac{1}{e}.$
8. Soit $f(x) = (2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$.
   $\ln f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\ln(2^x+3^x-12) \underset{2}{\sim} \tan\frac{\pi x}{4}(2^x+3^x-13)$. On pose $x = 2+t$. On a alors $\tan\frac{\pi x}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}t\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{4}t}{-\sin\frac{\pi}{4}t} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\frac{\pi}{4}t}$. Ensuite, $2^x+3^x-13 = 2^{2+t}+3^{2+t}-13 = 4(2^t-1)+9(3^t-1) \underset{0}{\sim} 4t\ln 2 + 9t\ln 3$. Donc $\ln f(x) \underset{2}{\sim} -\frac{4\ln(2^4\times 3^9)}{\pi}$ et $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)} = (2^4\times 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}.$

9. Soit $f(x)=\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^x$.
$\ln f(x) = x\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right) = x\ln\left(2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon(x)\right) = x\ln 2\left(1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon(x)\right)$. Alors, $\ln f(x) = x\left[\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{x}\varepsilon(x)\right)\right] = x\ln 2+\dfrac{1}{4}+\varepsilon(x)$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{f(x)}{2^x}=\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^x}{2^x}=\sqrt[4]{x}$.

10. Soit $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.
$*$ $\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$.
   - Si $a=b$, $\ln y(x)=\dfrac{1}{x}\ln a^x=\ln a$ et $y(x)\to a$.
   - Si $b<a$, $\dfrac{a^x+b^x}{2}=\dfrac{a^x}{2}\left(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right)$ et $\ln y(x)=\dfrac{1}{x}\left[\ln\dfrac{a^x}{2}+\ln\left(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right)\right]$. On a $\ln y(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}(x\ln a-\ln 2)\underset{+\infty}{\sim}\ln a$ et $y(x)\to a$.
   - De même, si $a<b$, $y(x)\to b$

   Finalement, $\ell=\sup(a,b)$.

   $*$ $\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}-1\right)=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2}\right)$ puis $\ln f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x\ln a+x\ln b}{2}\right)=\ln(\sqrt{ab})$. Finalement, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$.

Exercice 3.8 *Correction* :

1. Soit $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
Soit $x_0=n\in\mathbb{Z}$, $f(n)=E(n)+[n-E(n)]^2=n$.
   - Si $x\in]n-1,n[$, $E(x)=n-1$ et $f(x)=(n-1)+(n-1-x)^2$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f(x)=n$.
   - Si $x\in]n,n+1[$, $E(x)=n-1$ et $f(x)=n+(x-n)^2$, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f(x)=n$.

   f est donc continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f(x)=x+\sqrt{x-E(x)}$. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
Soit $x_0=n\in\mathbb{Z}$. $f(n)=n$. Si $\begin{array}{c}x\to n\\x<n\end{array}$, $f(x)=x+\sqrt{x-(n-1)}\to n+1\neq f(n)$. f est discontinue sur $\mathbb{Z}$.
3. Soit $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$. On vérifie aisément que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $f(x)=[E(x)+E(-x)]\sin(kx)$, $k\in\mathbb{R}$. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Si $x\in\mathbb{Z}$, $E(-x)=-E(x)$ et donc, $E(x)+E(-x)=0$.
   - Si $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, on a $E(x)<x<E(x)+1$. Cela implique $-(E(x)+1)<-x<-E(x)=-(E(x)+1)+1$ et donc $E(-x)=-(E(x)+1)$. En résumé, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\\ -\sin(kx) & \text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$

   f est continue en 0, et f est continue sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Soit $x=n\in\mathbb{Z}^\star$, $f(n)=0$. f est continue en tout point $x=n\in\mathbb{Z}^\star \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{Z}^\star$, $\sin(kx)=0\Leftrightarrow\exists p\in\mathbb{Z}$, $k=p\pi$.
   Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}\Leftrightarrow k$ est un multiple de π.

Exercice 3.9 *Correction* :

1. Puisque $1+x^2>0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, le numérateur est défini sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$. Étudions maintenant la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$. Nous allons montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ tout entier.
   - Étude du numérateur : la fonction $\sqrt{1+x^2}-1$ sera continue là où $\sqrt{1+x^2}$ l'est. Or, celle-ci est la composée de
   . $u: x\mapsto 1+x^2$, continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathcal{D}_f$;
   . $v: t\mapsto\sqrt{t}$, continue sur $J=\mathbb{R}_+^\star$;
   . on a $u(\mathcal{D}_f)\subset J=\mathbb{R}_+^\star$.
   Donc, par continuité d'une composée, le numérateur est continu sur $\mathcal{D}_f$.
   - Étude du dénominateur : la fonction $x\mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathcal{D}_f$.

   Conclusion, puisque le numérateur et le dénominateur sont continus sur $\mathcal{D}_f$, et puisque le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$, le quotient est continu sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^\star$.

2. Puisque $g = f$ sur $\mathbb{R}^\star$, g est définie et continue sur cet ensemble. D'autre part, g est évidemment définie en 0 (puisque $g(0) = \dfrac{1}{2}$ existe), il ne reste donc plus qu'à vérifier que g est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = g(0) = \dfrac{1}{2}$. Cela se prouve à l'aide de la quantité conjuguée. On a, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \frac{(1+x^2)-1^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}
\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.10 *Correction* : On utilise dans cet exercice la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une partie A de B est dense dans B si entre deux éléments de B distincts, il existe au moins un élément de A). On peut alors affirmer que pour tout réel, il existe une suite de rationnels (ou d'irrationnels) qui tende vers lui.

1. Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

   Montrons que que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (excluant nécessairement les points $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$) et de $\mathbb{Q} - \{0, 1\}$:

   - Soit $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors $f(x_0) = x_0$. Donc $\exists (u_n)_n \subset \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Or, $f(u_n) = u_n^2$, et donc $(\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = x_0^2) \neq (f(x_0) = x_0)$. f est donc discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
   - Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$, alors $f(x_0) = x_0^2$. On remarque que $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow x_0^2 = x_0 \Leftrightarrow x_0(x_0 - 1) = 0$ donc f peut être continue en $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$. Partout ailleurs, c'est-à-dire si $x_0 \in \mathbb{Q} - \{0, 1\}$, $\exists (u_n)_n \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Or, $f(u_n) = u_n$, et donc $(\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = x_0) \neq (f(x_0) = x_0^2)$, ce qui prouve que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} - \{0, 1\}$.

   Qu'en est-il en $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$?

   - Soit $x_0 = 0$. Alors, $(\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} x^2) = (\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} x) = 0$.
   - Soit $x_0 = 1$. Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} x^2) = (\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} x) = 1$.

   On en déduit que l'ensemble des points de continuité de f est $\{0, 1\}$.

2. Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^\star \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

   - Soient $x_0 = 0$ et $u_n = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q}^\star$. On a $f(u_n) = n$ par définition de f. On note que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$ ce qui permet d'affirmer que f est discontinue en 0.
   - On montre comme précédemment que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q} - \{0, 1, -1\}$.
   - Si $x_0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} \dfrac{1}{x} = 1 = f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} x = 1 = f(1)$
   - On montre la même chose pour $x_0 = -1$.

   L'ensemble des points de continuité de f est $\{-1, 1\}$.

   En remarquant que $x \in \mathbb{Q}^\star \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}^\star$, on vérifie que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$. f est donc bijective.

3. Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pour montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) \neq f(x_0)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) \neq f(x_0)$.

   Soit $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$. En remarquant que $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + 1 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x - 1 \in \mathbb{Q}$, on établit que $g \circ f = f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$ d'où la bijectivité de f.

$\boxed{\textbf{Exercice 3.11}}$ *Correction* :

1. Soit f convenant, c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x)\ (*)$.
   On peut montrer par récurrence sur n que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ (propriété P_n) :
   - P_0 est vraie puisque $3^0 = 1$.
   - Supposons la propriété P_n vraie au rang n.
   - Montrons alors que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. On a
   $$f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{3}}{3^n}\right) \underset{P_n}{=} f\left(\frac{x}{3}\right) \underset{(*)}{=} f(x).$$

   Donc la propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Comme $\dfrac{x}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et f est continue en 0, on a $f\left(\dfrac{x}{3^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} f(0)$. Finalement,
   $$f(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{3^n}\right) = f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right) = \ldots = f(0) = \text{cste}.$$

   Réciproquement, soit f telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Alors, f est continue en 0 et vérifie $f(3x) = f(x)$.
   Conclusion, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont les fonctions qui conviennent.

2. Soit f convenant c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)\ (*)$.
   On note $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$.
   Considérons le cas $x \in \mathbb{R}_+$. On peut montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(x) = f(\varphi_n(x))$ (propriété P_n).
   - P_1 est vraie puisque $f(\varphi_1(x)) = f(\varphi(x)) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = f(x)$ d'après $(*)$.
   - Supposons la propriété P_n vraie au rang n.
   - Montrons alors que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. On a
   $$f(\varphi_{n+1}(x)) = f(\varphi_n \circ \varphi_1)(x) = f(\varphi_1(\varphi_n(x))) \underset{P_1}{=} f(\varphi_n(x)) \underset{P_n}{=} f(x).$$

     Donc, la propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
     D'autre part, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ ($\square$) donc par continuité de f en 0, $f(\varphi_n(x)) = f(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(0)$.

   On raisonnera de même pour $x \in \mathbb{R}_-$.
   Réciproquement, soit f définie $\forall x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Alors f est continue en 0 et vérifie $f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = f(x)$.
   Conclusion, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont les fonctions qui conviennent.
   Prouvons ($\square$) : on se ramène à l'étude de la suite $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1} \end{array} \right.$.
   . Si $x \geq 0$, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^3}{u_n^2+1} \leq 0$ donc $(u_n)_n$ décroît. Puisque $(u_n)_n$ décroît et est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2+1} \Leftrightarrow \ell^3 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$. Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   . Si $x \leq 0$, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0$. Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^3}{u_n^2+1} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ croît. Puisque $(u_n)_n$ croît et est majorée par 0, elle converge vers $\ell = 0$. Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3. Montrons tout d'abord que f est paire. On a $f(-x) = -f(x^2) = f(x)$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f(x) = -f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = -f(x^{\frac{1}{8}}) = \ldots = (-1)^n f(x^{\frac{1}{2^n}})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (résultat qu'on peut montrer par récurrence sur n). Comme $x^{\frac{1}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et f est continue en 1, on a $f(x^{\frac{1}{2^n}}) \underset{n\to+\infty}{\to} f(1)$ donc $(-1)^n f(x) = f(1)$ $(*)$. Si $f(x) \neq 0$, la suite $((-1)^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge d'où une contradiction avec $(*)$. Ainsi, $f(x) = 0$.
   - Si $x = 0$, $f(0) = -f(0^2) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

La réciproque est évidente : $f(x)=0$ est continue en 1 et vérifie $f(x)=-f(x^2)$.
Conclusion, $\{0\}$ est l'ensemble des fonctions qui conviennent.

Exercice 3.12 *Correction* : On a $x=0,a_1a_2a_3\dots$ avec $a_i\in[\![0,9]\!], \forall i\geq 1$. La fonction $\begin{array}{rccl} f: & [0,1[& \to & [0,1[\\ & x & \mapsto & 0,a_2a_3a_4\dots \end{array}$ peut se réécrire $\begin{array}{rccl} f: & [0,1[& \to & [0,1[\\ & x & \mapsto & 10x-a_1 \end{array}$. Si $x=0,a_1$ alors $f(x)=0=f(0,a_1)$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0,a_1 \\ x<0,a_1}} f(x)=1\neq f(0,a_1)$ donc f est discontinue aux points tels que $x=0,a_1$. Partout ailleurs, la fonction est continue.

Exercice 3.13 *Correction* :
On va utiliser le corollaire 3.4.2 du TVI, appliqué à g et l'intervalle $I=[a,\frac{a+b}{2}]$:

- g est continue sur I en tant que différence de fonctions continues sur I ;
- comme
  . $g(a)=f\left(a+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(a)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f(a)$
  et
  . $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\right)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(b)-f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=-g(a)$,
  $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et $g(a)$ sont de signe contraire.

Par conséquent, $\exists c\in]a,\frac{a+b}{2}[$ tel que $g(c)=0$.

Application : Soit t le temps (en heures) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Supposons que la fonction $t\mapsto d(t)$ est continue. Posons $f(t)=d(t)-4t$. On a donc par hypothèse $f(0)=0$ et $f(1)=0$. Utilisons maintenant le résultat précédent avec $a=0$ et $b=1$. Il existe donc $c\in]0,\frac{1}{2}[$ tel que

$$g(c)=0\Leftrightarrow f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)\Leftrightarrow d\left(c+\frac{1}{2}\right)-4\left(c+\frac{1}{2}\right)=d(c)-4c\Leftrightarrow d\left(c+\frac{1}{2}\right)-d(c)=2.$$

Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$ soit 1/2 heure, la personne court exactement 2 km.

Exercice 3.14 *Correction* :
On peut prouver le résultat de plusieurs façons :

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que la fonction cos admette une limite ℓ en $+\infty$. Alors, pour toute suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on aurait $\cos x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Mais $\forall n\in\mathbb{N}$, $\cos(2n\pi)=1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$, d'où $\ell=0$ et $\ell=1$, ce qui génère une contradiction. On conclut que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Supposons que $\lim\cos(n)=\ell$; il en est de même pour les suites $\cos(n-1)$, $\cos(n+1)$ et $\cos(2n)$. La formule $\cos(n+1)+\cos(n-1)=2\cos(n)\cos(1)$ implique que : $\ell+\ell=2\ell\cos(1)$, ce qui montre que $\ell=0$ (car $\cos(1)$ est différent de 1). La formule $\cos(2n)=2\cos^2(n)-1$ implique de son côté que $\ell=2\ell^2-1$ ce qui est en contradiction avec $\ell=0$.

Remarque : on montrera de la même manière que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3.15 *Correction* :

$$\left(f(x)-\frac{1}{f(x)}\right)^2=(f(x))^2-2+\frac{1}{(f(x))^2}=\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)^2-4\underset{x\to0}{\longrightarrow}2^2-4=0$$

donc $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. On a ensuite :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)+\left(f(x)-\frac{1}{f(x)}\right)\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\frac{1}{2}(2+0)=1.$$

Ceci montre $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$.

Exercice 3.16 *Correction* :
Soient (E) l'équation fonctionnelle donnée et f une fonction vérifiant (E). Soit $x\in\mathbb{R}^\star$. En appliquant f à x et à $\dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l|l} f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2 & (L_1) \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+3f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{x^2} & (L_2)\leftarrow 3(L_2)-(L_1) \end{array}\right.$$

En combinant (L_1) et (L_2) comme indiqué, on obtient $8f(x) = \dfrac{3}{x^2} - x^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$.

Réciproquement, on considère l'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-x^4}{8x^2} + 3\frac{3-\frac{1}{x^4}}{\frac{8}{x^2}} = \frac{3-x^4}{8x^2} + 3\frac{3x^4-1}{8x^2} = x^2$$

ce qui prouve que f convient.

Conclusion, une seule application convient et est définie par $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$.

Exercice 3.17 *Correction* :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique. Soit T une période de f, strictement positive. On a alors $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$, et on utilise pour conclure le fait que toute fonction continue sur un segment est bornée.

Exercice 3.18 *Correction* :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.

- Comme f est bornée, $f \circ g$ est bornée.
- $(g \circ f)(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R}))$ et $f(\mathbb{R})$ est une partie bornée, donc incluse dans un segment $[a,b]$. Comme g est continue, $g([a,b])$ est bornée.

Exercice 3.19 *Correction* :

1. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Cela implique que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Donc, $\forall y \in]-1,1[$, $\exists! x \in \mathbb{R}$, $f(x) = y$. On sait que $x = f^{-1}(y)$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \begin{pmatrix} 0 \le y < 1 \\ y = \dfrac{x}{1+|x|} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \ge 0 \\ x = \dfrac{y}{1-y} \end{pmatrix} \\ \bullet \begin{pmatrix} -1 \le y \le 0 \\ y = \dfrac{x}{1+|x|} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \le 0 \\ x = \dfrac{y}{1+y} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1} : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1-|y|} \end{array}.$$

   On peut aussi remarquer que f est impaire, et donc f^{-1} aussi, et se limiter à $y \in [0,1]$.

2. $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. $\forall x \in]-1,1[$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow yx^2 + x - y = 0$. Comme $x \in]-1,1[$, si $y \neq 0$, $y = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$. Si $y = 0$, $x = 0$.

   En résumé, f est bijective et $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$.

Exercice 3.20 *Correction* : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x + 1$. On vérifie que f est continue, strictement croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Alors,

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x \underset{(*)}{\Leftrightarrow} f(x) = x.$$

Donc $f(x) = x \Leftrightarrow x^{-5} = -1 \Leftrightarrow x = -1$.

Montrons $(*)$:

- L'implication de la droite vers la gauche est évidente puisque $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$.
- Prouvons l'implication de la gauche vers la droite : on suppose $\exists x_0 \in E$ tel que $f(x_0) > x_0$. Comme f est strictement croissante, on aurait $(f \circ f)(x_0) > f(x_0)$ soit $x_0 > f(x_0)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. On obtient le même résultat si l'on suppose $\exists x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < x_0$. Donc nécessairement, $\forall x \in E$, $f(x) = x$.