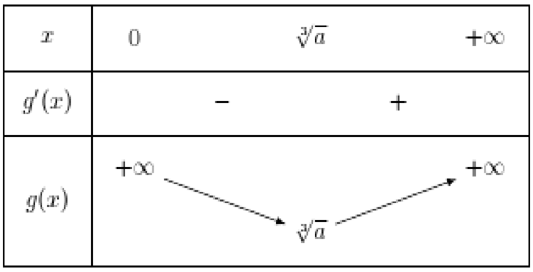
CORRECTION Exercices Chapitre 4 - Résolution d'équations non linéaires

Exercice 4.1 *Correction* :

1. Étude de la fonction $g : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$:
   - $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$,
   - $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,
     $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = 0$ donc $y = \frac{2}{3}x$ est une asymptote,
   - $g'(x) = \frac{2}{3x^3}(x^3 - a)$,
   - g est croissante sur $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, décroissante sur $[0, \sqrt[3]{a}]$,
   - $x = \sqrt[3]{a}$ est un minimum absolu et $g(\sqrt[3]{a}) = \sqrt[3]{a}$.



2. Le graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$ est le suivant :

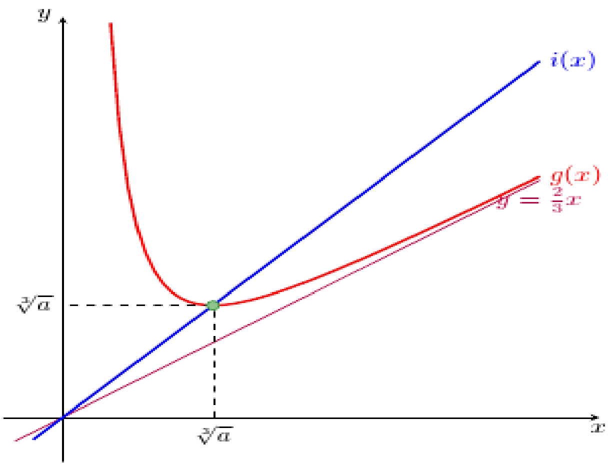


FIGURE 1 – Graphe de g

On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} = x \Leftrightarrow x^3 = a.$$

3. Étude graphique de la convergence de la méthode du point fixe (voir FIG. 2 page suivante).
4. Pour étudier la convergence de la méthode, on rappelle le théorème du point fixe :

Théorème 0.1 *Si g est une application strictement contractante définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$ (Condition suffisante CS),* **alors** *la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution α de l'équation $g(x) = x$ avec $\alpha \in [a, b]$ (Condition nécessaire CN).*

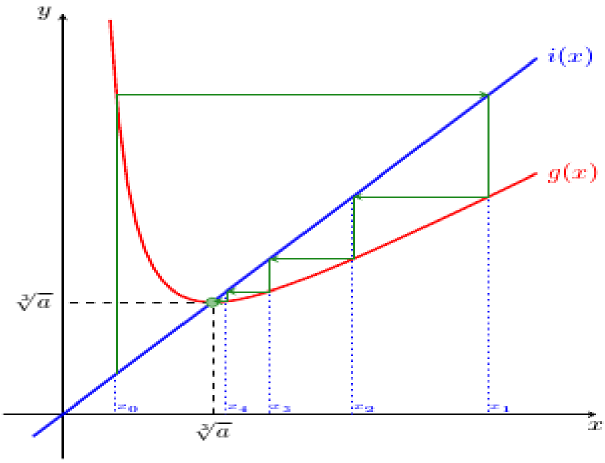


FIGURE 2 – Étude graphique de la convergence

On procède alors en deux étapes :

- On vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$:

$$\alpha = g(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^3 = a \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{a}.$$

- Vérifions maintenant les CS :

  . pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, on a $g(x) > \sqrt[3]{a}$ donc $g : [\sqrt[3]{a}, +\infty[\to [\sqrt[3]{a}, +\infty[$,

  . $g \in \mathcal{C}^1([\sqrt[3]{a}, +\infty[)$, donc pour tout x dans $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$, on a $|g'(x)| = \left|\frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)\right| < 1$. En effet, $x > \sqrt[3]{a} \Rightarrow \frac{a}{x^3} > 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{a}{x^3}\right) < 1$ et $\left|\frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)\right| < \frac{2}{3}$. On rappelle ensuite le résultat :

  Proposition 0.1 *Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g' vérifie*

$$\max\{|g'(x)|, x \in [a, b]\} \leq L < 1$$

  alors l'application g est strictement contractante dans l'intervalle $[a, b]$.

  Comme $\max\{|g'(x)|, x \in [\sqrt[3]{a}, +\infty]\} < 1$, on en déduit que g est contractante

Finalement, la méthode converge vers α point fixe de g (et racine cubique de a).

Montrons que la suite est décroissante à partir du rang 1. On sait d'après la question 1. que pour tout $x > 0$, $g(x) \geq \sqrt[3]{a}$ et donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geq \sqrt[3]{a}$. Comme $x \geq g(x)$ pour tout $x \geq \sqrt[3]{a}$, on a pour tout $k > 0$ l'inégalité $x_k \geq g(x_k) = x_{k+1}$ ce qui permet de conclure.

5. On rappelle que la méthode définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est dite d'ordre p si $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$ a une limite non nulle en $+\infty$. On a alors le résultat essentiel :

   Théorème 0.2 *Si $g \in \mathcal{C}^k([a, b])$ est telle que*

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } g^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

   la méthode du point fixe est d'ordre k.

   Étant donné que $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) = \frac{2a}{\alpha^4} \neq 0$, la méthode de point fixe converge à l'ordre 2.

6. Algorithme du point fixe :

Algorithm 1 Calcul de $x = g(x)$

Require : $x_0 > 0$
  while $|x_{k+1} - x_k| > 10^{-6}$ **do**
    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  end while

(Quelques remarques à propos du critère d'arrêt basé sur le contrôle de l'incrément. Les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. On se demande si cela garantit que l'erreur absolue e_{k+1} est elle aussi inférieure à ε. L'erreur absolue à l'itération $k+1$ peut être évaluée par un développement de Taylor au premier ordre $e_{k+1} = |\alpha - x_{k+1}| = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(z_k)e_k| = |g'(z_k)|e_k$ avec z_k compris entre α et x_k. Donc

$$|x_{k+1} - x_k| = |(\alpha - e_{k-1}) - (\alpha - e_k)| = |e_{k+1} - e_k| = ||g'(z_k)| - 1|e_k \simeq ||g'(\alpha)| - 1|e_k.$$

Puisque $g'(\alpha) = 0$, on a bien $|x_{k+1} - x_k| \simeq e_k$.)

7. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Ici donc, elle s'écrit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{3}\frac{a}{x_k^2} = g(x_k)$$

autrement dit la méthode de point fixe assignée est la méthode de Newton (qu'on sait être d'ordre de convergence égale à 2 lorsque la racine est simple).

Exercice 4.2 *Correction* :

1. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

• **Méthode de dichotomie** : en partant de $I_0 = [a, b]$, la méthode de dichotomie produit une suite de sous-intervalles $I_k = [a_k, b_k]$ avec $I_{k+1} \subset I_k$ et tels que $f(a_k)f(b_k) < 0$. Plus précisément

— on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$,

— pour $k \geq 0$,

. si $f(a_k)f(b_k) < 0$, on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ sinon on pose $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$

. et on pose $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

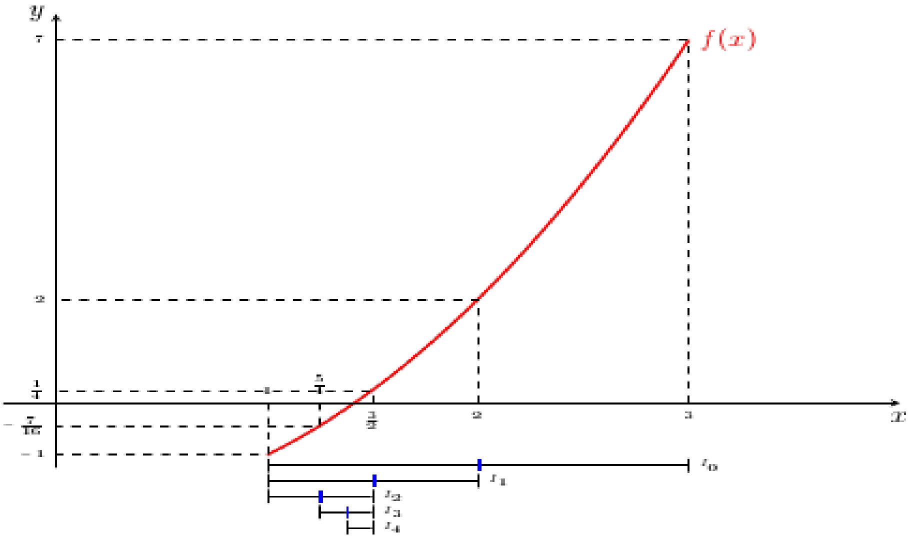


Figure 3 – Étude graphique de la convergence (méthode de dichotomie)

• **Méthode de Newton**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k}.$$

En posant comme dans la méthode précédente $x_0 = 2$, on obtient le tableau de comparaison :

	Dichotomie	**Newton**
x_0	2	2
x_1	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{3}{2} = 1,5$
x_2	$\frac{5}{4} = 1,25$	$\frac{17}{12} = 1,416$
x_3	$\frac{11}{8} = 1,375$	$\frac{17}{24} + \frac{12}{17} \sim 1,4142156$

On obtient alors, pour la méthode de Newton, le graphique

2. On cherche les zéros de la fonction $f(x) = \exp(x^2) - 4x^2$.

(a) On remarque que $f(-x) = f(x)$: la fonction est paire. on étudie donc f sur $[0, +\infty[$:

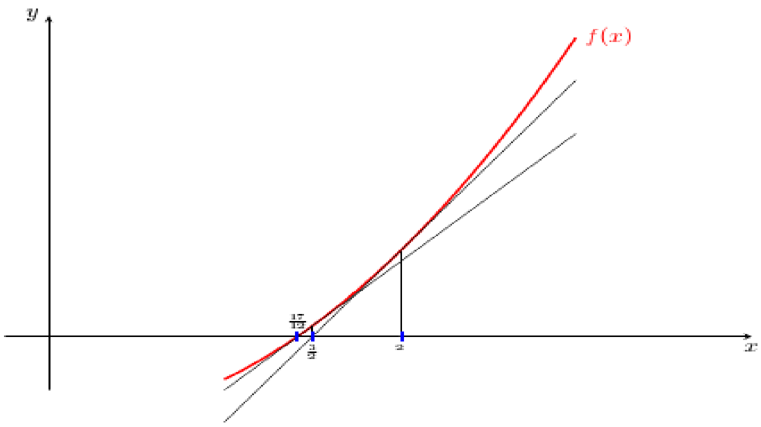


FIGURE 4 – Étude graphique de la convergence (méthode de Newton)

. $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x(\exp(x^2) - 4)$ donc $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{\ln(4)}$. On en déduit que f est décroissante pour $0 < x < \sqrt{\ln(4)}$.

Le graphe de f sur $\mathbb{R}$ est par conséquent le suivant :

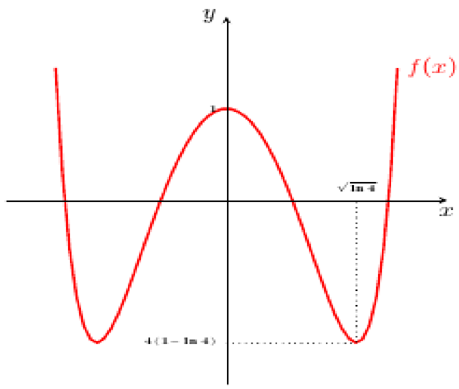


FIGURE 5 – Variations de la fonction f

On a donc une racine dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{\ln(4)}[$, une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{\ln(4)}, 0[$, une racine dans l'intervalle $]0, \sqrt{\ln(4)}[$ et une racine dans l'intervalle $]\sqrt{\ln(4)}, +\infty[$.

(b) Puisque $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \exp(1) - 4 = e - 4 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Puisque $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x = 2x(\exp(x^2) - 2^2) < 2x(e - 4) < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ (car pour $x \in]0, 1[$, $\exp(x^2) < \exp(1^2) = e$) et ce α est unique.

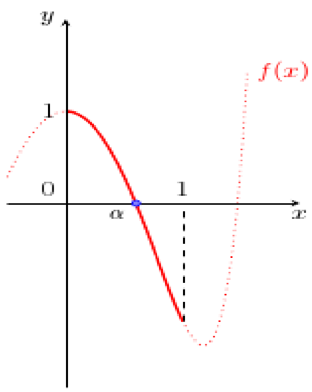


FIGURE 6 – Position de $\alpha \in]0, 1[$ vérifiant $f(\alpha) = 0$

(c) Étude de la convergence de la méthode (1) :

- On vérifie tout d'abord la CN pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$\alpha = \phi(\alpha) \Leftrightarrow 2\alpha = \sqrt{\exp(\alpha^2)} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = \exp(\alpha^2) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0.$$

- Vérifions maintenant les CS :
  - . pour tout x dans $]0,1[$ on a $0 < \sqrt{\dfrac{\exp(x^2)}{4}} < \sqrt{\dfrac{e}{4}} < 1$ donc $\phi :]0,1[\to]0,1[$,
  - . $\phi \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$ donc, pour tout $x \in]0,1[$, $\phi'(x) = \dfrac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2}$ et $|\phi'(x)| = |x\phi(x)| < |x| < 1$ (en effet, $\phi(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2} < 1$ pour tout x dans $]0,1[$ par composition successive). Donc, d'après la proposition 0.1, ϕ est contractante.

Alors la méthode (1) converge vers α, point fixe de ϕ et zéro de f (cf. Théorème 0.1). De plus, étant donné que $\phi'(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \alpha^2 \neq 0$, la méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 (cf. Théorème 0.2). La méthode de Newton est une méthode du point fixe avec $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Elle s'écrit

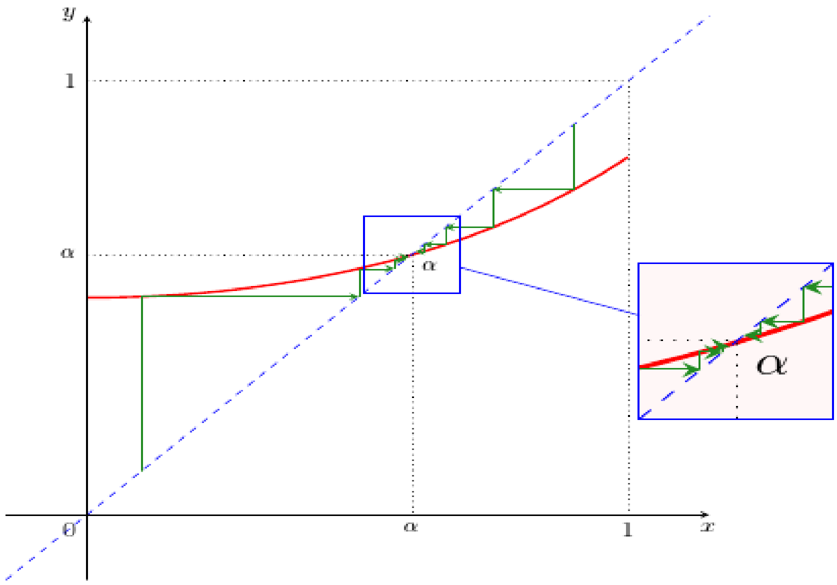


FIGURE 7 – Étude graphique de la convergence

donc ici :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k\exp(x_k^2) - 8x_k} = x_k - \frac{\exp(x_k^2) - 4x_k^2}{2x_k(\exp(x_k^2) - 4)}.$$

(d) Puisque α est une racine simple de f, la méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode du point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.

Remarque 0.1 *La convergence vers r de la méthode de Newton est linéaire si r est une racine multiple de f. Dans certains cas particuliers, la convergence peut être d'ordre supérieur à 2.*

Remarque 0.2 *En général, la méthode de Newton est d'ordre 2 et on a, si $e_n = x - x_n$, $e_{n+1} \simeq \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}e_n^2$ si r est une racine de f.*

3. On rappelle qu'avec la méthode de dichotomie, les itérations s'arrêtent à la m-ième étape quand $|x_m - \alpha| \leq |I_m| < \varepsilon$ où ε est une tolérance fixée et $|I_m|$ désigne la longueur de l'intervalle $I_m = [a_m, b_m]$ (on rappelle qu'α est indisponible et qu'on ne peut donc statuer que sur I_m). Clairement, $I_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ donc pour avoir $|x_m - \alpha| < \varepsilon$, on doit prendre $m \geq \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right) + 1$ (en effet, $\dfrac{b-a}{2^k} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^k > \dfrac{b-a}{\varepsilon} \Leftrightarrow k > \ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)\dfrac{1}{\ln(2)}$). Améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine signifie avoir $|x_k - \alpha| = \dfrac{|x_j - \alpha|}{10}$. On doit donc effectuer $k - j = \log_2(10) \simeq 3$ itérations de dichotomie.

$\boxed{\textbf{Exercice 4.3}}$ *Correction* :

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha f(x_n),$$

où $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ alors f est monotone décroissante. De plus, $f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la règle de l'hôpital,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Remarque 0.3 *Seule la condition $f'(x) < -1$ permet de conclure car une fonction peut être monotone décroissante mais avoir une limite finie. En effet, la condition $f'(x) < -1$ garantit que la fontion décroît plus vite qu'une droite.*

2. Puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(l) = 0$. Puisque $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce l est unique.
3. Considérons la fonction g définie par $g(x) = x + \alpha f(x)$, alors g est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g'(x) = 1 + \alpha f'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $f'(x) < -1$ et $0 < \alpha < 1$, on a $g'(x) < 1 - \alpha < 1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(x) > -2$ et $0 < \alpha < 1$ alors $g'(x) > 1 - 2\alpha > -1$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, $|g'(x)| < 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $0 < \alpha < 1$. On étudie la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ et on va vérifier qu'il s'agit d'une méthode du point fixe pour le calcul du zéro l de f.
   - On vérifie dans un premier temps que, si la suite converge vers un point fixe de g, ce point est bien un zéro de f (ici la réciproque est vraie) : soit $l \in \mathbb{R}$, alors :
   $$l = g(l) \Leftrightarrow l = l + \alpha f(l) \Leftrightarrow 0 = \alpha f(l) \Leftrightarrow f(l) = 0.$$
   - Vérifions maintenant que la suite converge vers un point fixe de g (c'est-à-dire l'unique zéro de f) :
     . on a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
     . $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a prouvé que $|g'(x)| < 1$ (cf. question 3.) donc g est contractante.

   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l, point fixe de g et zéro de f.
5. On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $0 < \alpha < 1$. Comme $-2 < f'(l) < -1$, on a $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et donc $0 < \alpha < 1$. Par conséquent, la suite converge pour $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$.
6. On donne le résultat important ci-dessous :

   Proposition 0.2 *Un point fixe r de g est*
   — *attractif si $|g'(r)| < 1$,*
   — *répulsif si $|g'(r)| > 1$.*
   Si r est attractif alors la méthode du point fixe converge vers r (avec un point de départ x_0 approprié). Si r est répulsif alors la méthode du point fixe diverge (sauf si $x_0 = r$).

   Remarque 0.4 *Même si r est attractif, la méthode du point fixe ne converge pas nécessairement vers r pour toute valeur de x_0.*

   On a donc les résultats suivants :
   — la méthode du point fixe converge à l'ordre 2 si $\alpha f'(l) = -1$ (car $g(l) = g'(l) = 0$ et $g''(l) \neq 0$).
   — la méthode du point fixe converge à l'ordre 1 si $-2 < \alpha f'(l) < 0$ mais $\alpha f'(l) \neq -1$.
   (En effet, $|g'(l)| < 1 \Leftrightarrow -1 < g'(l) < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \alpha f'(l) < 1 \Leftrightarrow -2 < \alpha f'(l) < 0$).
   — la méthode du point fixe diverge si $\alpha f'(l) < -2$ ou $\alpha f'(l) > 0$.
   Étant donné que $-2 < f'(l) < -1$ et $0 < \alpha < 1$, on peut conclure que :
   — la méthode du point fixe converge à l'ordre 2 si $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$,
   — la méthode du point fixe converge à l'ordre 1 si $\alpha \neq -\frac{1}{f'(l)}$.
7. D'un point de vue pratique, on ne peut pas choisir $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$ pour avoir la meilleure convergence car on ne connaît pas l !
8. Si on choisit d'approcher $\alpha = -\frac{1}{f'(l)}$ par $\alpha_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$ et si on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \alpha_n f(x_n)$, on obtient la méthode de Newton (qui est d'ordre 2). De plus, étant donné la double inégalité $-2 < f'(x) < -1$, on est dans le cas où $0 < \alpha < 1$ et donc celui où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.4 <u>*Correction*</u> :

1. Étude de la fonction $g : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$:
   . $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

. $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,
$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) - \frac{2}{3}x = -\frac{4}{9}$ donc $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}$ est une asymptote,

. $g'(x) = \frac{2(3x+4)(x^3+4x^2-10)}{x^2(3x+8)^2}$ et $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = -\frac{4}{3}$ ou $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$,

. g est croissante sur $[m, +\infty[$, décroissante sur $[0, m]$ où $m \simeq 1,36$

. $x = m$ est un minimum absolu et $g(m) = m$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		m		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

2. Le graphe de g comparé au graphe de $i(x) = x$ est le suivant :

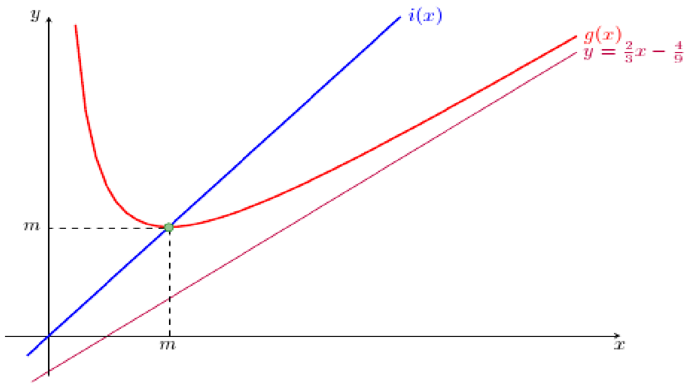


FIGURE 8 – Graphe de g.

On vérifie analytiquement qu'il existe une et une seule intersection entre la courbe d'équation $y = g(x)$ et la droite d'équation $y = x$:

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x} = x \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x = m \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

3. Étude graphique de la convergence de la méthode du point fixe :

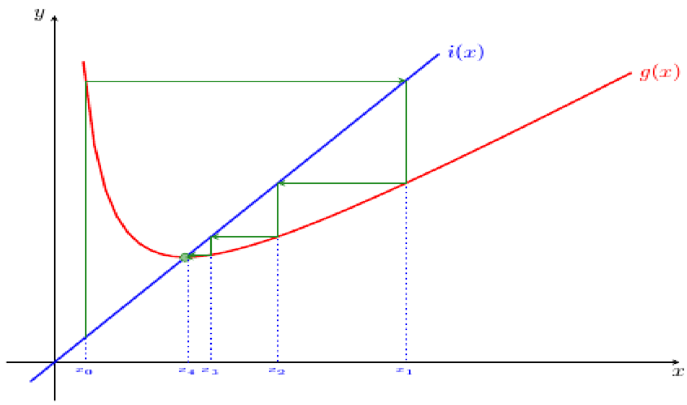


FIGURE 9 – Étude graphique de la convergence.

4. On en déduit que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq m$. Donc, pour tout $k > 0$, $x_k = g(x_{k-1}) \geq m$. Pour étudier la convergence de la méthode, on procède en deux étapes :
   - on vérifie d'abord la CN pour tout $\alpha \in [m, +\infty[$: $\alpha = g(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ d'après la question 2.,
   - vérifions maintenant les CS :
     . pour tout x dans $[m, +\infty[$, on a $g(x) > 0$ donc $g : [m, +\infty[\to [m, +\infty[$,

. $g \in \mathcal{C}^1([m, +\infty[)$, et pour tout x dans $[m, +\infty[$, $|g'(x)| = \left|\dfrac{(6x^2+8x) - g(x)(6x+8)}{3x^2+8x}\right| < 1$ donc g est contractante.

Par conséquent, la méthode du point fixe converge vers m, point fixe de g (et racine de f).

5. Algorithme du point fixe :

Algorithm 2 Calcul de $x = g(x)$

Require : $x_0 > 0$
Require : $s : x \mapsto g(x)$
  while $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ **do**
    $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  end while

6. La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Elle s'écrit donc ici :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 + 4x_k^2 - 10}{3x_k^2 + 8x_k} = g(x_k)$$

autrement dit la méthode du point fixe assignée est la méthode de Newton.

7. Étant donné que la méthode du point fixe donnée est la méthode de Newton et que la racine m de f est simple, la méthode converge à l'ordre 2.