CPI1 - ANALYSE 1.2

CORRECTION Exercices Chapitre 1 - Suites géométriques.

Exercice 1.1 *Correction* :

On peut utiliser les 3 résultats suivants pour traiter certaines suites de l'exercice 1 :

- On a, au voisinage de 0, le développement limité $\ln(1+x) = x + o(x)$ où la notation "o" de Landau signifie (voir page 14 du cours, Proposition 1.1.11, point 2.) que le reste du DL est négligeable devant x. On peut alors écrire $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
- En posant $y = 1+x$, on a, au voisinage de 1, le DL : $\ln y = y - 1 + o(y) \underset{1}{\sim} y - 1$.
- Si $x > 0$, $x^a = \exp(\ln x^a) = \exp(a \ln x)$.

1. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n$ donc (u_n) diverge.
3. $u_n = \dfrac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \dfrac{E\left(n^2+n+\frac{1}{4}\right)}{E\left(n^2-n+\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{n^2+n}{n^2-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3-1} = n\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} - n\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} = n\left[\left(1+\dfrac{2}{3n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1-\dfrac{1}{3n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)\right]$
   Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. $u_n = n^2 \ln \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$. Comme $\dfrac{n^2+1}{n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} 1$ on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1} - 1\right) = n^2\left(\dfrac{2}{n^2-1}\right) = \dfrac{2}{1+\frac{1}{n^2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
6. $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(\pi n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sin\left(\pi n + \dfrac{\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et on trouve finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
7. $u_n = n^2 \sin \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$
   - Si $\alpha = 0$, $u_n = n^2 \sin 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Si $\alpha > 0$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$.
     . si $\alpha > 2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
     . si $0 < \alpha < 2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
     . si $\alpha = 2$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
8. $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^n (3k+1)}{\sum_{k=0}^n (2k+3)} = \dfrac{3\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1}{2\sum_{k=0}^n k + 3\sum_{k=0}^n 1} = \dfrac{3\frac{n(n+1)}{2} + n}{2\frac{n(n+1)}{2} + 3n} = \dfrac{3n^2+5n+2}{2n^2+8n+6}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.
9. $u_n = \dfrac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si n est pair, $x^n + y^n = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
   - Si n est impair, $x^n + y^n = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$.

   (u_n) est donc définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ privé de la droite $x + y = 0$. On suppose dorénavant que $x + y \neq 0$.
   - Si $x = 0$, $u_n = -1$.
   - Si $x \neq 0$, on pose $k = \dfrac{y}{x}$ et le terme général de la suite s'écrit $u_n = \dfrac{1-k^n}{1+k^n}$.
     . Si $|k| < 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
     . Si $|k| > 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
     . Si $k = 1$, $u_n = 0$.

10. $u_n = \sqrt[n]{n^2} = (n^2)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n^2} = e^{\frac{2}{n}\ln n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

11. $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$.
    - Si $a = b = 0$, $u_n = 0$.
    - Si $(a,b) \neq (0,0)$, $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\ln(a^n + b^n)$.
      . Si $0 \leq a < b$, $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(b^n\left(1 + \dfrac{a^n}{b^n}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\left(n\ln b + \ln\left(1 + \dfrac{a^n}{b^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln b$.
      . Si $0 \leq b < a$, on obtient de la même façon $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln a$.

    Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \max(a,b)$.

12. $u_n = n(\sqrt[n]{5} - 1) = n(e^{\frac{1}{n}\ln 5} - 1) \underset{+\infty}{\sim} n\left(\dfrac{1}{n}\ln 5\right) = \ln 5$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 5$.

13. On a $\ln u_n = n\ln\left(3e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2e^{\frac{1}{n}\ln 3}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\left(3e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2e^{\frac{1}{n}\ln 3} - 1\right)$ car $3e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2e^{\frac{1}{n}\ln 3} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Or,

    $$3e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 2e^{\frac{1}{n}\ln 3} - 1 = 3\left(1 + \frac{1}{n}\ln 2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\left(1 + \frac{1}{n}\ln 3 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n}\ln 2 - \frac{2}{n}\ln 3 = \frac{1}{n}\ln\frac{8}{9}$$

    D'où, $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln\dfrac{8}{9}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{8}{9}$.

14. $u_n = (\operatorname{th} n)^n$. On a $\ln u_n = n\ln(\operatorname{th} n) = n\ln\dfrac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} \underset{+\infty}{\sim} n\left(\dfrac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -2ne^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

15. $u_n = \dfrac{C_n^k}{n^k}$ (k entier fixé). Pour $n \geq k$, $u_n = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!n^k}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 1.2 *Correction* :

1. Le résultat se trouve aisément par mise au même dénominateur et identification. On obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ u_k = \frac{1}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+2}$$

2. On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$.
   Si on considère uniquement les termes des 3 sommes obtenus pour k variant de 3 à n, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} = 0$$

   On peut donc écrire que :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

   et conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 1.3 *Correction* :

1. On remarque dans un premier temps que $k^3 - 4k = k(k-2)(k+2)$ donc, pour $k \geq 3$,

$$u_k = \frac{2k-1}{k(k-2)(k+2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\frac{1}{k+2}$$

   Par conséquent, $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}$.

   On fait ensuite varier k de 5 à $n-2$: on remarque que $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} = 0$. On en déduit que

$$S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

   et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{89}{96}$.

2. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. On a donc $S_n := \ln P_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -2\sum_{k=2}^{n} \ln k + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)$.
car $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Par décalage des indices, il reste :

$$S_n = -2(\ln 2 + \ln(n-1)) + (\ln 1 + \ln 2) + (\ln n + \ln(n+1))$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln 2$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 1.4 *Correction* :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $|u_n| \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. $u_n = \left(\frac{1}{3}\sin n\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $u_n = \sqrt[3]{3 + \cos n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{2} \leq u_n \leq \sqrt[4]{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
4. $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ $(\alpha > 1)$. On note que $\ln(u_n) = -\alpha \ln n + \frac{1}{n}[\ln(n+1) + \ldots + \ln 2n]$. Comme

$$n\ln(n+1) \leq \ln(n+1) + \ldots + \ln 2n \leq n\ln 2n \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq \frac{1}{n}[\ln(n+1) + \ldots + \ln 2n] \leq \ln 2n$$

on a

$$\ln(n+1) - \alpha\ln n \leq \ln u_n \leq \ln 2n - \alpha \ln n \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n^\alpha}\right) \leq \ln u_n \leq \ln\frac{2n}{n^\alpha}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{n+1}{n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{2n}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $(n+1)\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq (n+1)\frac{n}{n^2}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
7. $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
8. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2n^2}} = \frac{n}{\sqrt{3}}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
9. $u_n = \sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)e^{-\sqrt{2n}} \leq u_n \leq (n+1)e^{-\sqrt{n}}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
10. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$. Or $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq u_n \leq \cos\frac{1}{\sqrt{2n}}$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
11. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$, $x \in \mathbb{R}$. On a $kx - 1 < E(kx) \leq kx \Rightarrow x\sum_{k=1}^{n} k - n < \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq x\sum_{k=1}^{n} k$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x\frac{n(n+1)}{2n^2}$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$.
12. $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} kE(kx)$. Compte-tenu de l'inégalité $k^2x - k < kE(kx) \leq k^2x$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2x - k) < u_n \leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2x \Leftrightarrow \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}x - \frac{n+1}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}x$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{3}$.

13. $u_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right) = 2\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(2 - \frac{n-1}{n}\right)$. Donc

$$u_n = 2\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\left(1 + \frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On établit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$. En effet,

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) = \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)\right)(1+a_{n+1}) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)(1+a_{n+1}) = 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k+\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)a_{n+1} \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

Donc

$$u_n \geq 2\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq 2\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = n + 1$. Conclusion, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

14. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. À l'aide du résultat précédent, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = 1 + \frac{n+2}{2}$.
Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.5 <u>*Correction*</u> :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists k \in [0, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+1}| \leq k|u_n|)$.

On établit par récurrence que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq k^{n-n_0}|u_{n_0}|$. D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $0 \leq k < 1$.

Application : soit $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

- Si $x \in [-1, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
- Si $|x| > 1$, $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq 2|x| - 1$. Soit $n_0 = E(2|x| - 1) + 1$. $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2}|u_n(x)| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Exercice 1.6 <u>*Correction*</u> :

1. Montrons que $\forall x \in [0, 1[$, $\ln(1 + x) \leq x \leq -\ln(1 - x)$.
   - On pose $f(x) = x + \ln(1 - x)$. $\forall x \in [0, 1[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0$. Ainsi, f est continue et décroissante sur $[0, 1[$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que, $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\ln(1 - x)$.
   - On pose $g(x) = x - \ln(1 + x)$. $\forall x \in [0, 1[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1-x} \geq 0$. Ainsi, g est continue et croissante sur $[0, 1[$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que, $\forall x \in [0, 1[$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1 + x)$.
2. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, avec $v_k = \frac{1}{n+k} \in [0, 1[$ pour tout $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après 1.,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq v_k \leq \ln\left(1 - \frac{1}{n+k}\right)$$

On en déduit que $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leq u_n \leq \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 - 1\frac{1}{n+k}\right)$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln(n + k + 1) - \sum_{k=0}^{n}\ln(n + k) = \sum_{k=1}^{n+1}\ln(n + k) - \sum_{k=0}^{n}\ln(n + k) = \ln\frac{2n+1}{n}$$

De même,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n+k}\right) = \ln\frac{2n}{n+1}.$$

En résumé, $\forall n \geq 2$, $\ln\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \ln\frac{2n}{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 1.7 *Correction* :

1. Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[0,x]$ (voir poly sur les développements limités) prouve l'existence de $c \in]0,x[$ tel que : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6}\cos c$. Comme $c \in]0,x[\subset [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos c \leq 1$, on en déduit la double inégalité souhaitée.

2. • $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{k^3}{n^6} \leq \sin \dfrac{k}{n^2} \leq \dfrac{k}{n^2}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$
soit
$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

   • On vérifie que $u_n - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)-n^2}{2n^2} = \frac{1}{2n}$.

Exercice 1.8 *Correction* :

1. Établissons que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. On procède comme dans l'exercice précédent : d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[0,x]$, $\exists c \in]0,x[$, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2c^2}$. On en déduit l'inégalité de droite. Pour l'inégalité de gauche, il suffit d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et de montrer qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme la fonction s'annule en 0, on peut conclure.

2. Comme $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, $\ln P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ avec $u_k = \ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$. On a $\forall k \in \{1,\dots,n\}$,
$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4} \leq u_k \leq \frac{k}{n^2}$$
et on en déduit que
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \ln P_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
Finalement, $\ln P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercice 1.9 *Correction* : On pose $u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On a
$$\left|u_n - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{2(2n+3)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2\varepsilon} - 3\right)$$
On pose $N = E\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{11}{2\varepsilon} - 3\right)\right) + 1$. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon)$$

Exercice 1.10 *Correction* : On démontre le résultat par l'absurde : si (u_n+v_n) converge alors $(v_n) = (u_n+v_n) - (u_n)$ converge.

Exercice 1.11 *Correction* : Soit (u_n) une suite de temes dans $\mathbb{Z}$. On suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors :
$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq N, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| = |(u_p - \ell) + (\ell - u_q)| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \leq \frac{1}{2})$$

Comme $u_p \in \mathbb{Z}$ et $u_q \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $u_p = u_q$. Donc (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).
La réciproque est évidente.

Exercice 1.12 *Correction* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, $0 \leq v_n \leq 1$. On suppose que $u_n v_n \underset{\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

On montre le résultat pour (v_n) de la même manière.

Exercice 1.13 *Correction* :

- Si $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, (u_n) converge.
- Si $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors, à partir d'un certain rang, $u_n^2 > 0$.

Comme $u_n = \dfrac{u_n^3}{u_n^2}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Exercice 1.14 *Correction* :

Comme $\lim_{n\to+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 1$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq \dfrac{1}{2n})$. On en déduit que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N+1} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}\right)$. Or, d'après le rappel de l'exercice, $\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N+1} + \ldots + \dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Finalement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1.15 *Correction* :

1. D'après les hypothèses, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$. Donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$$

   On note $k = \dfrac{1+\ell}{2} \in]0,1[$. Alors,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq k u_n)$$

   ce qui implique (d'après l'exercice 1.5) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On applique 1. à $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (On remarquera que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.)
3. D'après les hypothèses, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell < 1$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell^n$. On en déduit immédiatement les deux résultats attendus.

Exercice 1.16 *Correction* : On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1 \Rightarrow v_n = \sin n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u\cos 1 - u}{\sin 1} = v$$

D'autre part,

$$\begin{array}{c} u_{n+1} + u_{n-1} = \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n \cos 1 \quad (1) \\ v_{n+1} + v_{n-1} = \sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cos 1 \quad (2) \end{array}$$

Par passage à la limite dans (1) et (2), on obtient $\left\{\begin{array}{l} 2u = 2u\cos 1 \\ 2v = 2v\cos 1 \end{array}\right.$. Nécessairement, $u = v = 0$. Or,

$$\cos^2 n + \sin^2 n = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1$$

On obtient donc une contradiction.
On montre de même que l'assertion $v_n \to v$ est fausse.

Exercice 1.17 *Correction* : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $0 \le u_{m+n} \le \dfrac{m+n}{mn}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \le u_{2n} \le \dfrac{2n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \le u_{2n+1} \le \dfrac{n+(n+1)}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En résumé, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.18 *Correction* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n$.

- $u_{2n+1} = u_{2n}^2 + 2n \ge 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $u_{2n+2} = u_{2n+1}^2 - (2n+1) \ge (2n)^2 - (2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En résumé, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 1.19 *Correction* :

1. $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, $u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_3$.
   - (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et de (u_{3n}) donc $\ell_2 = \ell_3$,
   - (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}) donc $\ell_1 = \ell_3$

   Ces deux résultats impliquent que $\ell_1 = \ell_3$.
2. Il suffit de considérer $u_{(2n)^2}$ et $u_{(2n+1)^2}$.

Exercice 1.20 *Correction* :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme
$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$
ceci permet de dire que (u_n) est croissante. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \le \dfrac{n}{n+1} < 1$, on peut donc affirmer que (u_n) converge.
2. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$. De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{2n+2} < 1$ donc (u_n) est décroissante. Conclusion, (u_n) converge.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On voit donc que (u_n) est croissante. Pour $k \ge 2$, $\dfrac{1}{k^k} \le \dfrac{1}{2^k} \Rightarrow$ $u_n \le 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$. A fortiori, $u_n \le \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$ et (u_n) est majorée. On en déduit que (u_n) converge.
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que (u_n) est croissante. On peut ensuite montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $n! \ge 2^{n-1}$ et procéder comme au point 3.
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$
En notant $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, on obtient
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}\left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}a_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}a_n \le \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} < 0$$
(u_n) est donc décroissante et comme $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$, on en déduit que (u_n) converge.

6. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^\star$. (u_n) est évidemment croissante. Pour $k\geq 2$, $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}\Rightarrow$ $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}<1$. Ainsi, on peut affirmer que (u_n) converge.

Exercice 1.21 *Correction* :

1. La formule des accroissements finis appliquée à ln entre n et $n+1$ implique que $\forall n\in\mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

2. D'après 1., $\forall k\in\mathbb{N}^\star$, $0<u_k=\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. D'où,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

Donc (S_n) est croissante et $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $S_n\leq 1$, ce qui permet d'affirmer que (S_n) converge et $C=\lim_{n\to+\infty}S_n\in[0,1]$.

3. $x_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ donc

$$\begin{aligned}x_n-S_n&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-\left(1-\ln\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}x_n=C\in[0,1]$.

Exercice 1.22 *Correction* : Soit $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $(n\in\mathbb{N}^\star)$

1. Pour tout entier $n\geq 2$, $(1-\alpha)^n>1-n\alpha$, $\alpha\in]0,1[$. On fixe α et on fait une récurrence sur n :
   - $n=2$: $(1-\alpha)^2=1-2\alpha+\alpha^2>1-2\alpha$.
   - On suppose la relation vraie à l'ordre n : $(1-\alpha)^n>1-n\alpha$.
   - Alors, $(1-\alpha)^{n+1}>(1-n\alpha)(1-\alpha)=1-(n+1)\alpha+n\alpha^2>1-(n+1)\alpha$.
2. On choisit $\alpha=\frac{1}{n^2}$. D'après 1., pour $n\geq 2$, $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$. D'où :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}\text{ et }\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}}$$

Or, $\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n-1}$ et donc, pour $n\geq 2$, $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq u_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$.

3. On choisit $\alpha=\frac{1}{6n+1}$. D'après 1., pour $n\geq 2$, $\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)^n>1-\frac{n}{6n+1}$. Donc

$$\left(1-\frac{1}{6n-1}\right)^n>\frac{5n+1}{6n+1}>\frac{5}{6}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{6n}<\left(\frac{6}{5}\right)^6\text{ pour }n\geq 2$$

Comme (u_n) est croissante, pour $n\geq 2$, $u_n\leq u_{6n}<\left(\frac{6}{5}\right)^6$.

4. (u_n) est une suite croissante majorée et est donc convergente. On a $\lim_{n\to+\infty}u_n=e$.

Exercice 1.23 *Correction* : Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. • On a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Il suffit pour s'en convaincre de noter que pour tout entier naturel n et tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin x < 1$, et qu'il suffit de multiplier les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif $\sin^n x$ pour obtenir le résultat voulu. Puisque les trois membres de cet encadrement sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, les inégalités strictes sont préservées par intégration et on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$. Donc, (I_n) est décroissante. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, on en conclut que (I_n) converge.
   • Soit $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $I_n = \displaystyle\int_0^{\lambda} \sin^n x dx + \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$. En effet, comme $x \mapsto \sin^n x$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a pour $x \in [0, \lambda] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin^n x \leq \sin^n \lambda$. Donc $\displaystyle\int_0^{\lambda} \sin^n x dx \leq \int_0^{\lambda} \sin^n \lambda dx = \sin^n \lambda \int_0^{\lambda} dx = \lambda \sin^n \lambda \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \lambda$. De plus, comme $\sin^n x \leq 1$, $\displaystyle\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - \lambda$.
   • On fixe λ et on fait tendre n vers $+\infty$. Comme $\lambda < \frac{\pi}{2}$, $\sin \lambda < 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sin^n \lambda = 0$. Cela implique que $0 \leq \ell = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n \leq \frac{\pi}{2} - \lambda$. On fait ensuite tendre λ vers $\dfrac{\pi}{2}$ et on obtient $\ell = 0$.
2. On intègre par parties $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx$. On pose pour cela $u(x) = \sin^{n+1} x$ et $v'(x) = \sin x$. On obtient :
$$I_{n+2} = -\left[\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(1 - \sin^2 x) dx$$
D'où, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$. On remarquera que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
3. (a) On multiplie la relation de récurrence par I_{n+1} (> 0). On obtient :
$$(n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n = \ldots = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2} \ (*)$$
   (b) (I_n) décroissante implique que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \Rightarrow I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.
   (c) Compte-tenu de $(*)$, il vient :
$$(n+1) I_n^2 = \frac{\pi}{2} \frac{I_n}{I_{n+1}} \text{ et } I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 1.24 *Correction* : On peut toujours supposer (u_n) croissante (sinon on considère la suite de terme général $-u_n$). Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\sigma(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Comme $(u_{\sigma(n)})$ est croissante,
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_{\sigma(n)} \leq \ell)$$
On peut montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$. Alors :
$$\sigma(n_0) \geq n_0 \underset{(u_n) \text{ croissante}}{\Longrightarrow} u_{\sigma(n_0)} \geq u_{n_0} > \ell$$
ce qui est impossible. Donc (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$, ce qui implique que (u_n) converge. Nécessairement, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ car $u_{\sigma(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 1.25 *Correction* :

1. • Puisque $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\}$ est borné, et donc, $v_n = \inf A_n$ et $w_n = \sup A_n$ existent.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A_{n+1} = \{u_k, k \geq n+1\} \subset A_n = \{u_k, k \geq n\} \subset A_0 = \{u_k, k \geq 0\}$$
   On en déduit $\begin{cases} w_n \leq v_{n+1} \leq w_0 \\ w_n \geq w_{n+1} \geq v_0 \end{cases}$
   (v_n) croissante majorée $\Rightarrow$ (v_n) converge. On a $v = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \inf u_n$.
   (w_n) décroissante minorée $\Rightarrow$ (w_n) converge. On a $w = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \inf u_n$.

Exemples :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $A_n = \left\{\dfrac{1}{k+1}, k \geq n\right\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \dots\right\}$.

$v_n = \inf A_n = 0$, $w_n = \sup A_n = \dfrac{1}{n+1}$, $v = w = 0$.

(b) $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$ $(u_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n+1} > 0$, $u_{2n+1} = -1 + \dfrac{1}{2n+2} < 0)$.

$A_{2n} = \{u_k, k \geq 2n\} = \{1 + \dfrac{1}{2n+1}, -1 + \dfrac{1}{2n+2}, 1 + \dfrac{1}{2n+3}, -1 + \dfrac{1}{2n+4}, \dots\}$.

$A_{2n+1} = \{u_k, k \geq 2n+1\} = \{-1 + \dfrac{1}{2n+2}, 1 + \dfrac{1}{2n+3}, -1 + \dfrac{1}{2n+4}, 1 + \dfrac{1}{2n+5}, \dots\}$.

. $v_{2n} = \inf A_{2n} = \inf\{-1 + \dfrac{1}{2n+2}, 1 + \dfrac{1}{2n+3}, \dots\} = -1$. De même, $v_{2n+1} = -1$ et donc $v = -1$.

. $w_{2n} = \sup A_{2n} = \inf\{1 + \dfrac{1}{2n+1}\}$. De même, $w_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+3}$ et donc $w = 1$.

(c) $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{4}$, $u_n \in \{-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$, $v = -1$, $w = 1$.

2. (u_n) est bornée donc (u_n) converge ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.

. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$, le théorème d'encadrement permet de conclure que (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.

. Réciproquement, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq n \Rightarrow p \geq N \Rightarrow |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_p \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, en passant aux bornes supérieure et inférieure, $\ell - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_n - \ell \leq \varepsilon \\ w_n - \ell \leq \varepsilon \end{array}\right.$$

Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 1.26 *Correction* : Soit $v_n = u_{n+1} - u_n$. D'après les hypothèses, (v_n) est croissante. Comme (v_n) est bornée, si $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, $v_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc (u_n) serait croissante à partir d'un certain rang. Comme (u_n) est bornée, elle converge vers un réel λ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient le même résultat si $\ell < 0$. Finalement, nécessairement, $\ell = 0$.

Exercice 1.27 *Correction* : On vérifie aisément que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$. Avec $n = 3$, on obtient l'encadrement précisé dans l'énoncé.

Exercice 1.28 *Correction* :

1. • (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.

• $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

donc (v_n) est décroissante.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Donc (u_n) et (v_n) convergent. Soit $e = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n < e < v_n$ (car (u_n) et (v_n) sont strictement monotones).

2. Supposons que $e = \dfrac{P}{N}$ où P et N sont des entiers positifs. On aurait $u_N < \dfrac{P}{N} < v_N = u_N + \dfrac{1}{NN!}$. On multiplie les deux membres par $NN!$ et on obtient :

$$NN!\left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{N!}\right) < P < NN!\left(1 + \dots + \frac{1}{N!}\right) + 1$$

P, qui est un entier, serait compris entre 2 entiers consécutifs ce qui est impossible.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leq u_{n+1} \leq e \leq v_n$. Ceci implique $u_{n+1} - u_n \leq e - u_n \leq v_n - u_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{(n+1)!} \leq e - u_n \leq \dfrac{1}{nn!}$.

   D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} (nn!)(e - u_n) = 1$ et donc, $e - u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nn!}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+3} \leq e \leq v_{n+1} \Leftrightarrow -v_{n+1} \leq -e \leq -u_{n+3} \Rightarrow v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3}$. Donc,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq v_n - e \leq \left(u_n + \frac{1}{nn!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{n+3)!}\right)$$

   Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq v_n - e \leq \dfrac{n+6}{n(n+3)!}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3 n!)(v_n - e) = 1$ et $v_n - e \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3 n!}$.

5. D'après 4., $\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leq v_n - e \leq \dfrac{n+6}{n(n+3)!}$. Or, $\dfrac{n+6}{n(n+3)!} \leq 10^{-3} \Rightarrow n \geq 4$. Ainsi,

$$v_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{4.4!} = \frac{261}{96} \simeq 2,71875$$

   On a $4.10^{-4} \leq v_4 - e \leq 5.10^{-4}$ soit $2,71825 \leq e \leq 2,71835$ ou ausi $2,718 \leq e \leq 2,719$.

Exercice 1.29 *Correction* :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. $u_n = 2\sqrt{n} - S_n$, $v_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$.
   - $u_{n+1} - u_n = 2\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+1}} \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.
   - De même, (v_n) est décroissante.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

   Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \leq \ell \leq v_n$. Avec $n = 1$, $\ell \geq u_1 = 1$.
3. - $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{2\sqrt{n} - u_n}{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   - $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2\sqrt{n} - u_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$
4. - $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}\frac{S_{2n}}{\sqrt{2n}} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{2} - 2$.
   - $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{np+k}} = \frac{S_{n(p+1)} - S_{np}}{\sqrt{n}} = \sqrt{p+1}\frac{S_{n(p+1)}}{\sqrt{n(p+1)}} - \sqrt{p}\frac{S_{np}}{\sqrt{np}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$.

Exercice 1.30 *Correction* : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

- $\sigma_n = S_{2n} = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, $\sigma_{n+1} = S_{2n+2} = S_{2n} - \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2}$.

  Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\sigma_{n+1} - \sigma_n = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} < 0$. Donc, (σ_n) est décroissante.
- $\sigma'_n = S_{2n+1} = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots - \dfrac{1}{2n+3}$, $\sigma'_{n+1} = S_{2n+3} = S_{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+3}$.

  Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\sigma'_{n+1} - \sigma'_n = -\dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+3} > 0$. Donc, (σ'_n) est croissante.
- $\sigma_n - \sigma'_n = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Conclusion, $(S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S) \Leftrightarrow (S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S)$

Exercice 1.31 *Correction* :

1. $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
   - On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   - $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)^2 \geq 0$ d'où, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n \geq u_n$.
   - $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \dfrac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + v_n} \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.
   - $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leq 0$. Donc (v_n) est décroissante.

- (u_n) croissante et majorée (par v_1) converge. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
- (v_n) décroissante et minorée (par u_1) converge. Soit $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
- Par passage à la limite, on a $\ell = \sqrt{\ell\ell'}$ et $\ell' = \dfrac{\ell+\ell'}{2} \Rightarrow \ell = \ell'$.

2. $0 \le q \le p$, $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{pu_n + qv_n}{p+q}$, $v_{n+1} = \dfrac{pv_n + qu_n}{p+q}$.
   - On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$ et $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{p-q}{p+q}(v_n - u_n)$. On en déduit que $v_n + u_n = u_0 + v_0$ et $v_n - u_n = \left(\dfrac{p-q}{p+q}\right)^n (v_0 - u)$ puis,

$$\begin{cases} v_n &= \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{p-q}{p+q}\right)^n (v_0 - u_0 + (u_0 + v_0)\right] \\ u_n &= \dfrac{1}{2}\left[(u_0+v_0) - \left(\dfrac{p-q}{p+q}\right)^n (v_0 - u_0)\right] \end{cases}$$

   Si $p = q$, $u_n = v_n = \dfrac{1}{2}(u_0 + v_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   Si $p > q$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}(u_0+v_0)$.

3. $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + v_n^2}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_n^2 + v_n^2}$.
   - On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
   - On note $z_n = u_n + iv_n$. Alors, $z_{n+2} = \dfrac{1}{\overline{z}_{n+1}} = z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
     Si $n = 2p$, $z_{2p} = z_0 \Leftrightarrow u_{2p} = u_0$ et $v_{2p} = v_0$.
     Si $n = 2p+1$, $z_{2p+1} = z_1 \Leftrightarrow u_{2p+1} = u_1$ et $v_{2p+1} = v_1$.
   - Si $u_0 = 0$ (et nécessairement $v_0 \neq 0$), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, $v_{2p} = v_0$ et $v_{2p+1} = \dfrac{1}{v_0}$ ((v_n) converge si et seulement si $v_0 = \pm 1$).
     Si $v_0 = 0$ (et nécessairement $u_0 \neq 0$), $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$, $u_{2p} = u_0$ et $u_{2p+1} = \dfrac{1}{u_0}$ ((u_n) converge si et seulement si $u_0 = \pm 1$).
     Si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $u_0^2 + v_0^2 = 1$.

   En résumé, (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $u_0^2 + v_0^2 = 1$.

Exercice 1.32 <u>*Correction*</u> :

1. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
   Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge 0$.
   Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ (on dit que $\mathbb{R}_+$ est stable par f).
   $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Conclusion, si (u_n) converge, $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   À ce stade, la proposition 1.1.14 ne permet pas de conclure car elle impose de travailler sur un intervalle $[a,b]$ borné, ce qui n'est pas le cas ici. On doit donc démontrer que (u_n) converge (ou pas).
   - On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \le \ell$: si $n = 0$, $u_0 = 0 \le \ell$. On suppose la relation vraie au rang n : $u_n \le \ell$. Comme f est croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \le f(\ell) = \ell$.
   - Étudions la monotonie de (u_n). Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(u_1 - u_0)$. Ici, $u_1 - u_0 > 0$ donc (u_n) est croissante (*). La suite (u_n) étant majorée, elle converge et donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   On a utilisé la proposition suivante pour affirmer (*) :

   Proposition 0.1 *Soient I un intervalle (non nécessairement borné) de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'intervalle I est stable par f. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est strictement croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone. Si $u_1 - u_0 > 0$, elle est strictement croissante. Si $u_1 - u_0 < 0$, elle est strictement décroissante. Enfin, si $u_1 = u_0$, elle est constante égale à u_0.*

2. $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$. On utilise le même raisonnement que précédemment. On établit que (u_n) est décroissante et minorée et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On a $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} \leq 1$. Donc (u_n) est décroissante et minorée, elle converge. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_n}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\ell = 1 - \dfrac{2}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell + 2 = 0$. C'est impossible puisque le discriminant est négatif. Donc (u_n) diverge.

5. $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. On établit que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $1 - \cos x \leq x \quad (1)$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$. Soit $n = 0$, on a $u_0 = \frac{\pi}{4}$. On suppose que $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{4}$. Comme f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq f(\frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{4}$. Ensuite, d'après (1), $u_{n+1} \leq u_n$. Par conséquent, (u_n) est décroissante et minorée. La suite (u_n) converge. L'unique point fixe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est 0. Conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = e^{au_n}$ $(a > 0)$.
   - On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
   - Soit $f(x) = e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow e^{ax} = x \Leftrightarrow a = \dfrac{\ln x}{x}$. Soit (E) : $\dfrac{\ln x}{x} = a$. On étudie : $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. On a $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0		e		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   - Si $a > \dfrac{1}{e}$, (E) n'a pas de solution.
   - Si $0 < a < \dfrac{1}{e}$, (E) admet 2 solutions positives.
   - Si $a = \dfrac{1}{e}$, (E) admet 1 solution positive e.
   - Monotonie de (u_n). Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(u_1 - u_0)$. $u_1 - u_0 = e^0 - 0 = 1 > 0$. Donc (u_n)est croissante.
   - Montrons par récurrence que si $0 < a \leq \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e$. On a $u_0 = 0 \leq e$. On suppose que $u_n \leq e$. Comme f est croissante, $f(u_n) \leq f(e)$ ce qui est équivalent à l'inégalité $u_{n+1} \leq e^{ae} \leq e$.

   En résumé,
   - Si $0 < a \leq \dfrac{1}{e}$, (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e$. Cela implique que (u_n) converge. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ la solution de (E) qui est inférieure à e.
   - Si $a > \dfrac{1}{e}$, (E) n'admet pas de solution. Donc (u_n) diverge. Comme (u_n) est croissante, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice 1.33}}$ *Correction* : Attention, si f est strictement décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone. En effet, si la suite (u_n) était par exemple strictement croissante, on aurait pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. La stricte décroissance de f impliquerait alors $f(u_n) > f(u_{n-1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_{n+2}$, ce qui est absurde. On pourrait vérifier de même que (u_n) ne peut pas être décroissante. On dispose néanmoins du résultat suivant :

Proposition 0.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to R$ une fonction continue. Supposons que l'intervalle I est stable par f. Notons (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est strictement décroissante sur I, alors les deux suites (v_n) et (w_n) définies respectivement par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones.*
. Si $u_2 - u_0 > 0$, la suite (v_n) est strictement croissante.
. Si $u_2 - u_0 < 0$, elle est strictement décroissante.
. Enfin, si $u_2 = u_0$, elle est constante égale à u_0.
. Si $u_3 - u_1 > 0$, la suite (w_n) est strictement croissante.
. Si $u_3 - u_1 < 0$, elle est strictement décroissante.
. Enfin, si $u_3 = u_1$, elle est constante égale à u_1.
De plus si la suite (v_n) est croissante, alors la suite (w_n) est décroissante, et de même, si la suite (v_n) est décroissante, alors la suite (w_n) est croissante.

Le résultat se prouve aisément à l'aide la proposition 0.1 et du fait que

$$\left\{\begin{array}{l} u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = \underbrace{f \circ f}_{g}(u_{2n+1}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = \underbrace{f \circ f}_{g}(u_{2n}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} w_{n+1} = g(w_n) \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{array}\right.$$

En effet, comme la composée d'une fonction avec elle-même est croissante, g est toujours croissante et on peut appliquer la proposition 0.1 aux suites (v_n) et (w_n).

1. $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$ Soit $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$, $x \in]-1, +\infty[$. f est décroissante et $f(]-1, +\infty[) =]0; +\infty[\subset]-1, +\infty[$. On a $(f(x) = x, x > -1) \Leftrightarrow x = 1$. Soit $g(x) = (f \circ f)(x) = \dfrac{2(1+x)}{3+x}$, g est bien croissante sur $\mathbb{R}_+$. On retrouve bien-sûr le fait que le point fixe de f est aussi le point fixe de g : $(g(x) = x, x \geq 0) \Leftrightarrow x = 1$. On étudie les sous-suites $(v_n = u_{2n})$ et $(w_n = u_{2n+1})$ définies par :
$$\left\{\begin{array}{l} v_{n+1} = g(v_n) \\ v_0 = u_0 = \frac{1}{2} \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} w_{n+1} = g(w_n) \\ w_0 = u_1 = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$
Comme g est croissante, on montre par récurrence que (v_n) est croissante et majorée par 1, et que (w_n) est décroissante et minorée par 1. Les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers le point fixe de g. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$, et on a finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$. Soit $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in [0,1]$. On a le tableau de variations :

x	0 1
signe de $f'(x)$	$-$
variations de f	1 $\searrow$ 0

Comme $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$ et $f([0,1]) = [0,1]$, u_n est parfaitement définie.
On note que $(f(x) = x, x \in [0,1]) \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,512$. On notera $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Soit $g = f \circ f$ (g est croissante sur $[0,1]$). Soient $(v_n = u_{2n})$ et $(w_n = u_{2n+1})$ définies par :
$$\left\{\begin{array}{l} v_{n+1} = g(v_n) \\ v_0 = u_0 = \frac{1}{2} \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} w_{n+1} = g(w_n) \\ w_0 = u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$
Comme g est croissante,
   - (v_n) croissante et majorée ($v_n \leq \ell$) impliquent que (v_n) converge,
   - (w_n) décroissante et minorée ($w_n \geq \ell$) impliquent que (w_n) converge.

   Si on note $v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $w = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, on a $\dfrac{1}{2} \leq v \leq \ell$ et $\ell \leq w \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $v = g(v)$ et $(w = g(w))$. Or, $v_{n+1} = f(w_n)$ et $w_{n+1} = f(v_n)$. Par passage à la limite, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{l} v = f(w) \\ w = f(v) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} v = \sqrt{1-w} & (a) \\ w = \sqrt{1-v} & (b) \end{array}\right.$$
On en déduit $v^2 = 1 - w$ et $w^2 = 1 - v$ ce qui est équivalent à
$$v^2 - w^2 = v - w \Leftrightarrow (v-w)(v+w-1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = w \\ \text{ou } v + w - 1 = 0 \end{array}\right.$$
Si $v + w - 1 = 0$, alors $v^2 = 1 - w = v \Leftrightarrow v = 0$ ou $v = 1$ ce qui est impossible. Nécessairement, $v = w$ et (a) et (b) impliquent que $v = w = \ell$. Conclusion,
$$(v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ et } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

3. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{a}{u_n^2}$ $(a > 0)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $x_n = \ln u_n \Leftrightarrow u_n = e^{x_n}$. On a donc $\ln u_{n+1} = \ln a - 2\ln u_n$.
La suite (x_n) est définie par $\left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} = -2x_n + \ln a & (1) \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$ On cherche une solution particulière $\tilde{x}_n$ de (1) sous forme d'une constante k :
$$k = -2k + \ln a \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}\ln a$$

(x_n) est solution de (1) si et seulement si $x_n - \dfrac{1}{3}\ln a$ est solution de $v_{n+1} = -2v_n$ c'est-à-dire $v_n = (-2)^n C$, $(C \in \mathbb{R})$. En résumé, (x_n) est solution de (1) si et seulement si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n = C(-2)^n + \frac{1}{3}\ln a$. Avec $n = 0$, $x_0 = C + \frac{1}{3}\ln a \Rightarrow C = \frac{1}{3}\ln a$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{3}\ln a[(-2)^n + 1]$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{\frac{1}{3}((-2)^n+1)\ln a}$$

Si $a = 1$, $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; si $a \neq 1$, (u_n) diverge.

4. $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$. On pose $f(x) = (1-x)^2$, $x \in [0,1]$. Donc f est décroissante sur $[0,1]$. Soit $g = f \circ f$ (g est croissante sur $[0,1]$). Les suites $(v_n = u_{2n})$ et $(w_n = u_{2n+1})$ sont telles que

$$\begin{cases} v_{n+1} = g(v_n) \\ v_0 = u_0 = \frac{1}{2} \end{cases},\quad \begin{cases} w_{n+1} = g(w_n) \\ w_0 = u_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Avec g croissante, on établit que (v_n) est croissante. Comme $v_n \leq 1$, (v_n) converge. Soit $v = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors on a $\dfrac{1}{2} \leq v \leq 1$. De même, (w_n) est décroissante. Comme $w_n \geq 0$, (w_n) converge. Soit $w = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ alors on a $0 \leq w \leq \dfrac{1}{4}$. Comme $v \neq w$, (u_n) diverge.
Remarque : on peut montrer que $v = 1$ et $w = 0$.

5. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $x \geq 0$. On note que f est décroissante et que $f([0,+\infty[) \subset [0,+\infty[$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1$. f admet un seul point fixe $\ell = \sqrt{2}-1 \simeq 0,414$. Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|$$

On en déduit par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - \ell|$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}-1$.

6. $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3+u_n}$. On utilise le même raisonnement que dans le 5. et on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$.

Exercice 1.34 *Correction* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^\star$,

$$|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{k=0}^{p-1}(u_{n+k+1} - u_{n+k})\right| \leq \sum_{k=0} p - 1|u_{n+k+1} - u_{n+k}|$$

soit

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \leq \varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Finalement, comme (u_n) est de Cauchy si et seulement si (u_n) converge, on a la conclusion attendue.

Exercice 1.35 *Correction* :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. $\forall x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

On somme de $k = n+1$ à $k = n+p$, puis de $k = n$ à $k = n+p-1$ et on obtient :

$$\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \int_n^{n+p} \frac{dx}{x}$$

soit $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$,

$$\ln\frac{n+p+1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \leq \ln\frac{n+p}{n}\ (1)$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$. Donc, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{\star 2},\ u_{n+p} - u_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} - \ln \frac{n+p}{n}$. D'après (1), $\ln \frac{(n+p+1)(n)}{(n+1)(n+p)} \leq u_{n+p} - u_n \leq 0$ soit

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \left| \ln \frac{(n+p+1)n}{(n+1)(n+p)} \right| \leq \ln \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, comme (u_n) est de Cauchy si et seulement si (u_n) converge, on a la conclusion attendue.

$\boxed{\textbf{Exercice 1.36}}$ *Correction* : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2}$, $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ est injective.

$$u_{2n} - u_n = \frac{\varphi(n+1)}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\varphi(2n)}{(2n)^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \left(\varphi(n+1) + \ldots + \varphi(2n)\right)$$

φ est injective : $p \neq p' \Rightarrow \varphi(p) \neq \varphi(p')$. On peut donc ordonner les termes $\varphi(n+1), \ldots, \varphi(2n)$. Comme, pour $p \geq n+1$, $\varphi(p) \geq 1$, on a :

$$\varphi(n+1) + \varphi(n+2) + \ldots + \varphi(2n) \geq 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

D'où : $u_{2n} - u_n \geq \frac{n(n+1)}{2(2n)^2} \geq \frac{1}{8}$, et donc $\lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n) \neq 0$. Donc (u_n) n'est pas de Cauchy $\Leftrightarrow$ (u_n) diverge. Comme (u_n) est croissante, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice 1.37}}$ *Correction* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, $a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{2^n}$.

1. $|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n+p}}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (a_n) est de Cauchy$\Leftrightarrow$ (a_n) converge. Comme $|a_n| \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \leq 2$, $a = \lim_{n\to+\infty} a_n \in [-2, 2]$.

2. (a) $k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\right)}_{\alpha} = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sin^2 k}}_{\beta}$

   (b) α et β étant positifs ou nuls, $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta^2$. Or, $\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos k + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 2\sin k \cos k\right) = \beta^2$.

   (c) $x_n = \varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\sqrt{2 + \varepsilon_n\sqrt{2}}}}$, $y_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}a_n\right)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$. Soit (P_n) : "$x_n = y_n$". $P(0)$ est vraie : $y_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon_0\right) = \varepsilon_0\sqrt{2} = x_0$. Montrons que $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

   $$y_n = 2\sin\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}\right) = 2\varepsilon_0\sin\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}\right) =$$

   $$2\varepsilon_0\sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\left(\underbrace{\frac{\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}}_{k_n\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]}\right)\right] \overset{2.(a)}{=} \varepsilon_0\sqrt{2 + \underbrace{2\sin\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n+1}}{2^n}\right)}_{y_n=x_n}} =$$

   $$\varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\sqrt{2 + \varepsilon_{n+1}\sqrt{2}}}} = x_{n+1}.$$

   En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}a\right)$.

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1$. Alors, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a = 2$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.

   On retrouve ce résultat en remarquant que $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \\ x_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ On établit que puisque (x_n) est croissante et majorée par 2, (x_n) converge vers ℓ telle que $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ $(\ell \geq 0)$ soit $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.