Licence 1 Sciences & Technologies

Algèbre - Semestre 2

Université du Littoral - Côte d'Opale, La Citadelle

Laurent SMOCH

Janvier 2009

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles, relations d'équivalence et applications

1.1 Introduction

Depuis le début du XX^e siècle, l'utilisation du vocabulaire de la théorie des ensembles a permis de clarifier, simplifier, unifier toutes les mathématiques. Depuis de nombreuses années, ce vocabulaire s'est fixé et est devenu la langue universelle de ceux et celles qui font ou utilisent des mathématiques. Son emploi induit des modes de raisonnement simples, clairs, généraux, et l'étudiant peut ainsi cheminer sur une voie sûre. Le but est ici d'exposer un vocabulaire et des propriétés utilisables et utilisés dans tous les domaines des mathématiques, sans masquer inutilement la puissance de leus généralité, mais également sans développement stérile.

On développera dans cette partie les notions suivantes :
- les objets fondamentaux de l'algèbre que sont les **ensembles**,
- les **relations**, qui mettent en liaison des éléments de deux ensembles ou d'un même ensemble,
- les **applications**, qui à chaque élément de l'ensemble de départ, associent un élément et un seul de l'ensemble d'arrivée.

1.2 Ensembles

1.2.1 Éléments de logique

Définition 1.2.1 *Une **assertion** (ou **propriété**) p peut être vraie (V) ou fausse (F), une **table de vérité** consignant ces deux possibilités.*

p	V	F

Un théorème, une proposition, sont des assertions vraies.

Définition 1.2.2 *La **négation** d'une asssertion p est l'assertion notée non p ou $\neg p$ (ou $\rceil p$), définie dans la table de vérité ci-dessous :*

p	V	F
non p	F	V

Définition 1.2.3 *les **connecteurs logiques** "et" (conjonction), "ou" (disjonction), "$\Rightarrow$" (implication), "$\Leftrightarrow$" (équivalence) sont définis par*

p	q	p *et* q	p *ou* q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Remarque 1.2.1

- "et" peut se noter $\wedge$. "ou" peut se noter $\vee$.
- Il peut être commode de noter $\left\{ \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right.$ au lieu de "p et q".
- Dans l'implication $p \Rightarrow q$, p s'appelle l'**hypothèse** et q la **conclusion**.
- L'implication $q \Rightarrow p$ s'appelle la **réciproque** de l'implication $p \Rightarrow q$.
- On peut exprimer $p \Rightarrow q$ de l'une des façons suivantes :
  - pour que p, il faut que q,
  - pour que q, il suffit que p,
  - si p, alors q,
  - p est une condition suffisante (CS) pour q,
  - q est une condition nécessaire (CN) de p.
- L'équivalence logique $p \Leftrightarrow q$ peut s'exprimer par :
  - pour que p, il faut et il suffit que q,
  - p est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour q,
  - p si et seulement si (ssi) q.

Définition 1.2.4 *Un **théorème de logique**, appelé aussi **tautologie**, est une assertion vraie quelles que soient les valeurs de vérité des éléments qui la composent.*

Exemple 1.2.1

1. (p ou p) $\Leftrightarrow p$,
2. (p et p) $\Leftrightarrow p$,
3. p ou (non p) (tiers exclu)
4. non (p et (non p)),
5. $p \Rightarrow p$,
6. $p \Leftrightarrow p$,
7. (non (non p)) $\Rightarrow p$,
8. (p et ($p \Rightarrow q$)) $\Rightarrow q$) (règle d'inférence ou syllogisme),
9. ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ ((non p) ou q),
10. ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ ((non q) $\Rightarrow$ (non p) (principe de contraposition),
11. (non (p ou q)) $\Leftrightarrow$ ((non p) et (non q)) (loi de Morgan),
12. (non (p et q)) $\Leftrightarrow$ ((non p) ou (non q)) (loi de Morgan),
13. (non ($p \Rightarrow q$)) $\Leftrightarrow$ (p et (non q)) (négation d'une implication),
14. (p et q et r) $\Leftrightarrow$ (p et (q et r)) (associativité du "et"),
15. (p ou q ou r) $\Leftrightarrow$ (p ou (q ou r)) (associativité du "ou"),

16. (p et q ou r) $\Leftrightarrow$ (p ou r) et (q ou r)) (distributivité de “ou” sur “et”),
17. (p ou q et r) $\Leftrightarrow$ (p et r) ou (q et r)) (distributivité de “et” sur “ou”),
18. $((p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication),

Exercice 1 Illustrer à l'aide d'une table de vérité le théorème de logique relatif à la négation d'une implication.
Correction :

p	q	$p \Rightarrow q$	non $(p \Rightarrow q)$	non q	p et (non q)	(non $(p \Rightarrow q)$) $\Leftrightarrow$ (p et (non q))
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

Exercice 2 Montrer que la proposition composée $p \vee \neg p$ est une tautologie.
Correction :

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Exercice 3 Montrer que la proposition composéee $p \wedge \neg p$ est une contradiction.
Correction :

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Exercice 4 (*non corrigé*) Prouver chaque théorème de logique proposé précédemment à l'aide d'une table de vérité.

Exercice 5 (*non corrigé*) Montrer les théorèmes de logique suivants :

1. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$,
2. $(p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p$ et $q) \Rightarrow r)$
3. $\left\{\begin{array}{l} \\ p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ r \Rightarrow p \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \\ p \Leftrightarrow q \\ p \Leftrightarrow r \\ q \Leftrightarrow r \end{array}\right.$,
4. $((p$ ou $q) \Rightarrow) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r)$ et $(q \Rightarrow r))$.

Exercice 6 (*non corrigé*) Nier les propositions suivantes :

1. Tous les hommes sont mortels.

2. Je mange beaucoup et je ne grossis pas.
3. Dans toute école, il y a un élève qui n'aime aucun professeur.
4. S'il pleut, je joue aux dominos ou je vais au cinéma.
5. En septembre, tous les jours, il a plu et il y a eu du brouillard.
6. Si je ne me trompe pas, tu es riche et célèbre.
7. Si tu travailles bien et si tu es doué, tu réussis tes examens.
8. Il existe un pays dont chaque ville possède un quartier mal famé.
9. Toutes les suédoises sont blondes et ont les yeux bleus.
10. Tout homme, quand il est amoureux, devient stupide.
11. Dans tout livre, une page au moins compte plusieurs coquilles.

Exercice 7 (*non corrigé*) Compléter les phrases suivantes par “il faut”, “il suffit” ou “il faut et il suffit” :

1. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, ... qu'il soit un rectangle.
2. Pour qu'un triangle soit équilatéral, ... qu'il ait deux angles de 60^o.
3. Pour qu'un rectangle soit un carré, ... qu'il soit un losange.
4. Pour qu'un quadrilatère soit un losange, ... qu'il soit un carré.
5. Pour qu'un parallélogramme soit un losange, ... que ses diagonales soient perpendicualires.
6. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, ... que ses diagonales se coupent en leur milieu.
7. Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90km/h, ... que sa vitesse instantanée ait été à un moment supérieure à 90km/h.
8. Pour que la vitesse moyenne d'un automobiliste sur un certain trajet soit supérieure à 90km/h, ... que sa vitesse instantanée ait été constamment supérieure à 90km/h.

1.2.2 Ensembles

On commence tout d'abord par présenter les quantificateurs universels $\forall$ et $\exists$.

– le quantificateur $\forall$ se lit “pour tout” ou “quel que soit”.

$$\boxed{(\forall x \in E,\ P(x)) \text{ se lit : “pour tout } x \text{ appartenant à } E\text{, on a } P(x)\text{”}}$$

– le quantificateur $\exists$ se lit “il existe au moins un élément”.

$$\boxed{(\exists x \in E,\ P(x)) \text{ se lit : “il existe au moins un élément } x \text{ appartenant à } E \text{ tel que l'on ait } P(x)}$$

Remarque 1.2.2

– La notation $\exists!$ signifie “il existe un unique élément”.

– La lettre affectée par un quantificateur est muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre n'ayant pas déja une signification :

$$(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall y \in E, P(y)),$$
$$(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists y \in E, P(y)).$$

– Les quantificateurs permettent également d'exprimer la négation d'une phrase quantifiée à savoir

$$(\text{non } (\forall x \in E, P(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \text{non } P(x)),$$
$$(\text{non } (\exists x \in E, P(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \text{non } P(x)).$$

– Dans une phrase quantifiée, on ne peut pas à priori modifier l'ordre des quantificateurs. Par exemple $(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y)$ est vraie mais $(\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y)$ est fausse.

  Cependant, si les ensembles E et E' sont fixés :
$$(\forall x \in E, \forall x' \in E', P(x, x')) \Leftrightarrow (\forall x' \in E', \forall x \in E, P(x, x'))$$
  et
$$(\exists x \in E, \exists x' \in E', P(x, x')) \Leftrightarrow (\exists x' \in E', \exists x \in E, P(x, x'))$$

Exercice 8 Soit F l'ensemble des femmes et H celui des hommes et $M(x, y)$ la proposition "x est marié à y". Énoncer par des phrases correctes les propositions

$$(\exists y \in H)(\forall x \in F)M(x, y)$$
$$\text{et}$$
$$(\forall x \in F)(\exists y \in H)M(x, y)$$

Ces deux propositions ont-elles le même sens ?
Correction : La proposition $(\exists y \in H)(\forall x \in F)M(x, y)$ peut se traduire par "il existe au moins un homme qui est marié avec toutes les femmes".
La proposition $(\forall x \in F)(\exists y \in H)M(x, y)$ peut se traduire par "chaque femme est mariée avec au moins un homme".
Ces deux propositions n'ont bien évidemment pas le même sens.

Définition 1.2.5 *En théorie des ensembles, un* ***ensemble*** *désigne intuitivement une collection d'objets (que l'on appelle* ***éléments de l'ensemble****), "une multitude qui peut être comprise comme un tout", comme l'énonçait le créateur de cette théorie, le mathématicien Georg CANTOR (1845-1918).*

Ceci était particulièrement novateur, s'agissant d'ensembles éventuellement infinis (et ce sont ces derniers qui intéressent Cantor).

Un ensemble peut être vu comme une sorte de sac virtuel entourant ses éléments, ce que modélisent bien les **diagrammes de Venn**. Souvent (ce n'est pas toujours possible), on essaye de le distinguer typographiquement de ses éléments, par exemple en utilisant une lettre latine majuscule, par exemple "E" ou "A", pour représenter l'ensemble, et des minuscules, telles que "x" ou "n", pour ses éléments.
Les éléments peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles ... On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple, lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine, une bibliothèque est un ensemble de livres, etc.
Un même objet peut être élément de plusieurs ensembles : 4 est un élément de l'ensemble des nombres entiers, ainsi que de l'ensemble des nombres pairs (forcément entiers). Ces deux derniers ensembles sont infinis, ils ont une infinité d'éléments.

Ce qui est manifestement en jeu au premier chef dans la notion d'ensemble, c'est la relation dŠappartenance : un élément appartient à un ensemble. Ce sont les propriétés de cette relation que l'on axiomatise en théorie des ensembles, et il est assez remarquable que l'on puisse s'en contenter pour une théorie qui peut potentiellement formaliser les mathématiques (ce qui n'était pas encore clair à l'époque de Cantor).

Définition 1.2.6
- *On appelle* ***ensemble vide****, et on note $\emptyset$, un ensemble ne contenant aucun élément. Il n'existe qu'un seul ensemble vide.*

- *Si x est un objet quelconque, on appelle* ***singleton*** *x ou* ***ensemble réduit à*** *x, et on note $\{x\}$, l'ensemble ne contenant qu'un seul objet, qui est égal à x.*
- *Par extension, on peut définir un* ***ensemble fini*** *en énumérant ses éléments : $\{a, b, \dots, z\}$.*
- *Si $P(x)$ est un prédicat, on note $\{x; P(x)\}$, ou $\{x/P(x)\}$, ou $\{x, P(x)\}$, l'ensemble des éléments x tels que l'assertion $P(x)$ soit vraie. Attention, tous les prédicats ne peuvent pas définir un ensemble.*

On désigne généralement les ensembles les plus usuels par une lettre en gras ou à double barre :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers positifs,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls),
- $\mathbb{Z}^\star$ l'ensemble des entiers différents de 0,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^\star\right)$,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels,
- $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs,
- $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des réels autres que 0,
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.2.7 *Soit E un ensemble, on appelle* ***élément de*** *E tout objet appartenant à E, et on note $x \in E$.*

Dans la suite, on utilisera souvent la notion de famille d'objets.

Définition 1.2.8 *On appelle* ***famille d'ensembles*** *$(E_i)_{i \in I}$, avec $\forall i \in I$, $E_i \subset E$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & E_i \end{array}.$$

Une famille est appelée ***suite*** *dans le cas particulier où I est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, éventuellement privé d'un nombre fini d'éléments.*

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

$$A = \left\{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\right\},$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{C};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = \frac{n}{p} \text{ et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\right\}.$$

<u>Correction</u> : On a $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$.

Définition 1.2.9 *On dit qu'un ensemble E est une* ***partie d'un ensemble*** *F, ou que E est un* ***sous-ensemble*** *de F, ou que E est* ***inclus*** *dans F, ou que F est un* ***sur-ensemble*** *de E, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est aussi élément de F.*

Remarque 1.2.3 Soit E un ensemble. Alors E et $\emptyset$ sont des parties de E.

<u>Notation</u> : Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de E.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.
<u>Correction</u> : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\},$

Définition 1.2.10 *Soit E un ensemble. On appelle* ***partie propre*** *de E toute partie de E distincte de E et de $\emptyset$.*

Introduisons maintenant les notions de réunion, d'intersection, de complémentation, de différence et de différence symétrique.

Définition 1.2.11 *Soient A et B deux sous-ensembles de E.*

- *On appelle* ***réunion*** *de A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble formé par les éléments de A ou les éléments de B.*
$$\boxed{A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}},$$
- *On appelle* ***intersection*** *de A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des objets appartenant à la fois à A et à B.*
$$\boxed{A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}},$$
- *Deux sous-ensembles A et B de l'ensemble E sont dits* ***complémentaires*** *si leur réunion est l'ensemble E et leur intersection l'ensemble vide :*
$$\boxed{A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset}$$
On note alors $B = C_E^A$ ou $B = \overline{A}$ ou $B = A^c$.
- *On appelle* ***différence*** *de A et B, et on note $A \backslash B$ (ou $A - B$), l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B soit $A \cap B^c$.*
- *On appelle* ***différence symétrique*** *de A et B, et on note $A \Delta B$, la réunion de $A \backslash B$ et $B \backslash A$.*

Exemple 1.2.2 *Posons $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. On a alors $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A^c = \{3, 4\}$, $B^c = \{1, 4\}$, $A \backslash B = \{1\}$, $B \backslash A = \{3\}$ et $A \Delta B = \{1, 3\}$.*

Remarque 1.2.4

- Les définitions de la réunion, de l'intersection et de la différence symétrique sont symétriques en E et F.
- Les définitions de la réunion et de l'intersection se généralisent à une famille quelconque d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$:
$$\cup E_i = \{x; \exists i \in I, x \in E_i\}$$
$$\cap E_i = \{x; \forall i \in I, x \in E_i\}$$

Propriété 1.2.1 *Soient A, B, C des ensembles quelconques. On a les propriétés suivantes :*

- $A \cap B = B \cap A \quad , \quad A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativité)*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité)*
- $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$
- $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$
- $(C \subset A \text{ et } C \subset B) \Rightarrow C \subset (A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow C \backslash B \subset C \backslash A$
- $A \subset B \Rightarrow A \backslash C \subset B \backslash C$
- $A = (A \cap B) \cup A \backslash B$

Propriété 1.2.2 *(Lois de Morgan) Quels que soient les sous-ensembles A et B de E, on a*

$$\boxed{\begin{array}{l}(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c\end{array}}$$

On dit qu'il existe une dualité entre les opérations de réunion et d'intersection.

Propriété 1.2.3 *(Généralisation) Soient $I \subset \mathbb{N}$ un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Les lois de Morgan ci-dessus s'étendent à une famille de parties de E sous la forme :*

$$(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$$
$$(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$$

Exercice 11 (*non corrigé*) On appelle **fonction caractéristique** de A (partie de l'ensemble E) une application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$ telle que

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin A$$
$$f(x) = 1 \text{ si } x \in A$$

Soient A et B deux parties de E et leurs fonctions caractéristiques f et g. Quels sont les ensembles A_1, A_2 et A_3 dont les fonctions caractéristiques sont

1. $1 - f$,
2. fg,
3. $f + g - fg$.

Définition 1.2.12 *Soient E un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On appelle **recouvrement** de E la réunion $E = \cup_i E_i$ c'est-à-dire que $\forall x \in E$, $\exists E_i$ tel que $x \in E_i$. Si de plus*
- *$\forall (i, j) \in I \times I$, $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$,*
- *les E_i sont tous non vides.*

*on dit que les E_i forment une **partition** de E.*

Exemple 1.2.3 Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, les perpendiculaires à l'axe $(0x)$ aux points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, $\forall x_i \in \mathbb{R}$ forment une partition de E.

Introduisons enfin la notion d'ensemble-produit :

Définition 1.2.13 *Soient deux ensembles A et B et deux éléments a et b avec $a \in A$ et $b \in B$. L'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre est appelé **produit cartésien** des ensembles A et B. On le note $A \times B$.*

Remarque 1.2.5 La précision de l'ordre a puis b n'est pas superflue. Tout couple appartenant à $A \times B$ est constitué d'un élément appartenant à A puis d'un élément appartenant à B. (b, a) n'est pas en général un élément de $A \times B$ (ce n'est le cas que si a et $b \in A \cap B$).

Définition 1.2.14 *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On note E_i, et on appelle **ensemble-produit** des E_i, l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in E_i$.*

Si les E_i sont en nombre fini, par exemple $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, on peut noter $E = E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$. Si de plus tous les E_i sont égaux, on peut écrire $E \times E \times \ldots \times E = E^n$.

1.2.3 Lois de composition

Définition 1.2.15 *Étant donnés trois ensembles E, F et G (non vides), toute application de $E \times F$ (produit cartésien de E par F) vers G est appelée **loi de composition** de $E \times F$ à valeurs dans G.*

Définition 1.2.16 *Une loi de composition **interne** - lci - (ou simplement loi interne) dans E est une loi de composition de $E \times E$ à valeurs dans E (cas $E = F = G$).*

Exemple 1.2.4
- L'addition est une loi interne dans $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels,
- la soustraction n'est pas une loi interne dans $\mathbb{N}$, $2 - 3$ n'est pas un entier naturel, mais elle en est une dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs.

Définition 1.2.17 *Une loi de composition* ***externe*** *(ou simplement loi externe) dans E est une loi de composition de $F \times E$ à valeurs dans E, où F est un ensemble distinct de E. Une telle loi à valeurs dans E est aussi appelée* ***action*** *de F sur E. L'ensemble F est alors le domaine d'opérateurs. On dit aussi que F opère sur E.*

Pour simplifier, on donne un nom et une notation pour désigner la loi de composition : si c est l'image du couple (a, b) par la loi de composition notée T, on note $c = aTb$. Lorsque la loi s'apparente à une multiplication on la note souvent $\times$. L'appellation opération est généralement utilisée et réservée pour les lois de composition interne.

Exemple 1.2.5
- La multiplication d'un vecteur par un nombre réel où F est généralement un corps (voir plus loin), dit corps de scalaires, est une loi de composition externe d'un espace vectoriel.
- L'application qui à tout couple (E, F) d'ensembles, associe l'ensemble $E \times F$ pourrait être considérée comme une loi de composition interne dans l'ensemble de tous les ensembles. Hélas, ce dernier ensemble n'est pas un ensemble ...

Définition 1.2.18 *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T.*
- *Si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a $xTy = yTx$, la loi T est dite* ***commutative****.*
- *Si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, on a $(xTy)Tz = xT(yTz)$, la loi T est dite* ***associative****.*
- *Soit $e \in E$ vérifiant $\forall x \in E$, $xTe = eTx = x$, on dit alors que e est un* ***élément neutre*** *de E pour la loi T.*

Exercice 12 (*non corrigé*) Soit l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments, par exemple $E = \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Donc, $E = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. On considère les lois de composition "$\star$" suivantes sur l'ensemble E.
- Réunion : $A \star B = A \cup B$
- Intersection : $A \star B = A \cap B$
- Différence symétrique : $A \star B = A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$
- Réunion des complémentaires : $A \star B = A^c \cup B^c$
- Intersection des complémentaires : $A \star B = A^c \cap B^c$

Pour chacune d'entre elles :

1. Écrire la table de composition de la loi .
2. L'ensemble E possède-t-il un élément neutre pour la loi $\star$?
3. La loi est-elle associative ?
4. La loi est-elle commutative ?
5. Répondre aux questions 2. à 4. en remplaçant E par l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque.

Exercice 13 (*non corrigé*) Sur $E = \{a, b, c\}$ on définit une loi de composition interne $*$ par sa table de Pythagore :

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

1. Calculer $(a * b) * c$ et $(a * c) * b$.

2. Trouver les propriétés de cette loi (commutativité, associativité).
3. Admet-elle un élément neutre ?

Exercice 14 (*non corrigé*) On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

1.3 Relations d'équivalence et relations d'ordre

Le concept de relation est la base de toute la mathématique dont le but est d'étudier - par observation et déduction (raisonnement), calcul et comparaison - des configurations abstraites ou concrètes de ses objets (nombres, formes, structures) en cherchant à établir les liens logiques, numériques ou conceptuels entre ces objets.

1.3.1 Relations binaires

Définition 1.3.1 *Soit x un élément d'un ensemble E et y un élément d'un ensemble F. Une **relation** $\mathcal{R}$ entre x et y est un lien verbal caractérisant la correspondance entre x et y.*

Lorsque le couple (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$. On dit que x est en relation avec y.

Définition 1.3.2 *L'ensemble des couples (x, y) de $E \times F$ tels que $x\mathcal{R}y$ est appelé **graphe** de la relation. On note*

$$\boxed{G = \{(x, y) \in E \times F / x\mathcal{R}y\}}$$

On remarque que $G \subset E \times F$.

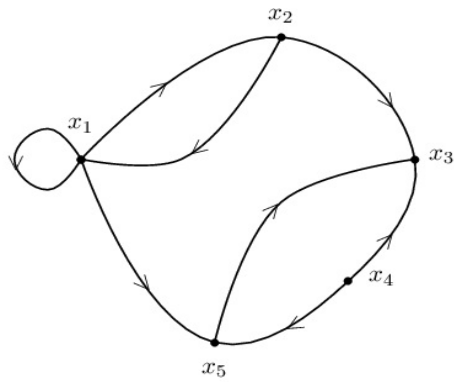
Définition 1.3.3 *Si x et y appartiennent au même ensemble E, la relation $\mathcal{R}$ est appelée **relation binaire** dans E. C'est une partie du produit $E \times E$.*

Proposition 1.3.1 *Une relation binaire est caractérisée*
- *par son graphe*
- *par sa **représentation sagittale***
- *par sa **représentation cartésienne***
- *par sa **matrice booléenne***
- *par son **dictionnaire des sommets***
  . *des **suivants** ou des **successeurs** (si $x\mathcal{R}y$, y est le suivant de x).*
  . *des **précédents** ou des **prédécesseurs** (si $x\mathcal{R}y$, x est le précédent de y)*

Exemple 1.3.1 Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. On se donne

$$G = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_3)\}$$

- G est donc le graphe de la relation binaire $\mathcal{R}$.
- La représentation sagittale de $\mathcal{R}$ est :



– La représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est :

départ \ arrivée	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\star$	$\star$			$\star$
x_2	$\star$		$\star$		
x_3					
x_4			$\star$		$\star$
x_5			$\star$		

– La matrice booléenne de $\mathcal{R}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Le dictionnaire des suivants de $\mathcal{R}$ est :

x	$S(x)$
x_1	x_1, x_2, x_5
x_2	x_1, x_3
x_3	
x_4	x_3, x_5
x_5	x_3

– Le dictionnaire des précédents de $\mathcal{R}$ est :

x	$P(x)$
x_1	x_1, x_2
x_2	x_1
x_3	x_2, x_4, x_5
x_4	
x_5	x_1, x_4

Remarque 1.3.1 La relation $\mathcal{R}^{-1}$ est définie par le graphe

$$G' = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_5, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_4), (x_3, x_5)\}$$

En effet, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$. La matrice booléenne de $\mathcal{R}^{-1}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que les matrices booléennes de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$ ont leurs termes symétriques par rapport à la diagonale principale.

Exercice 15 (*non corrigé*) On se donne la relation binaire définie par l'ensemble de sommets $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et le graphe

$$G = \{(x_1, x_2); (x_1, x_5); (x_2, x_3); (x_2, x_4); (x_4, x_3); (x_4, x_4); (x_4, x_5)\}$$

Caractériser cette relation binaire par

1. sa représentation sagittale,
2. sa représentation cartésienne,
3. sa matrice booléenne.

Définition 1.3.4 *Soit $(E, \odot, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une relation binaire. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est **compatible avec la loi** $\odot$ si $\forall (x, x', y, y') \in E^4$, $(x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y') \Rightarrow (x \odot x')\mathcal{R}(y \odot y')$.*
On dit aussi que la relation $\odot$ respecte la loi T.

Exemple 1.3.2 Soit $E = \mathbb{R}$, la relation "$\leq$" est compatible avec la loi "$+$" car $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$, $(x \leq y$ et $x' \leq y') \Rightarrow (x + x') \leq (y + y')$.

1.3.2 Fonctions et applications

Définition 1.3.5 *Si $x\mathcal{R}y$, on dit que y est une **image** de x par la relation $\mathcal{R}$ et que x est un **antécédent** de y par cette même relation.*

Exemple 1.3.3
- Soit $\mathcal{S} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ($E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{Z}$) et $x\mathcal{S}y$ ssi $x = |y|$. On a $3\mathcal{S}3$ et $3\mathcal{S}(-3)$: 3 possède deux images. Seul 0 possède une seule image.
- Dans $E = F = \mathbb{Z}$, on pose $x\mathcal{R}y$ ssi y est le carré de x. On a $3\mathcal{R}9$ mais l'assertion $z\mathcal{R}8$ est fausse pour tout z de $\mathbb{Z}$: on dira que 8 n'a pas d'antécédent par $\mathcal{R}$ ou que 8 n'est pas une image. On remarque que -3 et 3 ont la même image. 9 est l'unique image de 3 mais 9 est aussi l'image de -3 : le nombre 9 admet deux antécédents qui sont -3 et 3.

Définition 1.3.6 *L'ensemble $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ des éléments de E qui ont au moins une image par $\mathcal{R}$ est l'**ensemble** (ou **domaine**) **de définition de** $\mathcal{R}$.*

Définition 1.3.7 *Lorsque chaque élément de E possède au plus une image (aucune ou une seule) par une relation $\mathcal{R}$, on dit que $\mathcal{R}$ est une **fonction** et on note $y = \mathcal{R}(x)$, plutôt que $x\mathcal{R}y$. On dira que y est exprimé en fonction de x : c'est l'unique image de x par $\mathcal{R}$.*

Cette notation, dite fonctionnelle, est due à Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) qui utilisait une notation comme $\mathcal{R}_x$ ou f_x. La notation $f(x)$ pour désigner l'image par f d'un élément x nous vient de Alexis Claude CLAIRAUT (1713-1765), Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813) et Jean Le Rond d'ALEMBERT (1717-1783). x prend le nom de **variable**.

Exemple 1.3.4 Dans le cas $E = F = \mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par "$x\mathcal{R}y$ si et seulement si y est le carré de x" est une fonction. On peut la rebaptiser f ou bien c comme carré : on écrira $9 = c(-3)$ et d'une façon générale $y = c(x)$ avec $y = x^2$.

Définition 1.3.8 *Si $\mathcal{D}_f = E$, on dira que la fonction f est partout définie, elle prend alors le nom d'**application**.*

Exemple 1.3.5
- La fonction $\mathcal{R}$ ci-dessus (rebaptisée c) est une application.
- La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f(x) = 1/x$ n'est pas une application : 0 n'a pas d'image.
- La projection des points d'une droite D sur un plan P est une application de D dans P.

<u>*Notation*</u> : On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 1.3.9 *Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation binaire, F un ensemble et f une application de E dans F. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est **compatible avec l'application** f si $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$.*

Définition 1.3.10 *Soit $f : E \to F$ une fonction. L'ensemble des images par f des éléments de E est noté $f(E)$, ou parfois $Im(f)$ ou $\Im(f)$ si cela n'est pas ambigu, et est appelé **image de E par f**. Si A est inclus dans E, l'image de A par f est l'ensemble des éléments $f(x)$ où x est élément de A :*

$$f(A) = \{y \in F / x \in A, y = f(x)\}$$

Remarque 1.3.2
- si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$. La réciproque est fausse sauf si f est bijective (voir plus loin). Voici un contre-exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-2, 1]$ et $B = [-1, 3]$. $f(A) = [0, 4]$, $f(B) = [0, 9]$. On a $f(A) \subset f(B)$ mais pas $A \subset B$.
- On devra aussi savoir que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et que l'égalité est fausse en général mais que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 16 (*non corrigé*)
1. Prouver les résultats énoncés dans la remarque précédente.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [-2, 1]$ et $B = [-1, 3]$. $f(A) = [0, 4]$, $f(B) = [0, 9]$. Comparer $f(A \cap B)$ à $f(A) \cap f(B)$.
   Prouver que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Définition 1.3.11 *Soit E un ensemble. L'**application identique** de E (ou **identité** de E), notée Id_E, est l'application de E dans E définie par $\forall x \in E$, $Id_E(x) = x$.*

Nous verrons que cette application joue un rôle important dans la caractérisation des bijections ; elle est également utile en topologie.

Définition 1.3.12 *Soient E un ensemble, f une application de E dans E et A une partie de E. On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$.*

Définition 1.3.13 *Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G. On appelle **application composée** de f par g l'application*

$$\begin{array}{rcl} (g_o f) : E & \to & G \\ x & \mapsto & (g_o f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 1.3.2 *Soient E, F, G, H quatre ensembles, f une application de E vers F, g une application de F vers G, h une application de G vers H. On a $(f_o g)_o h = f_o(g_o h)$.*

Définition 1.3.14

- *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est une* **injection** *de E dans F (ou f est injective) si :*

$$\boxed{\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

- *On dit que f est une* **surjection** *de E dans F (ou f est surjective) si :*

$$\boxed{\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E\ ,\ y = f(x)}$$

- *On dit que f est une bijection de E sur F (ou f est bijective) si f est à la fois injective et surjective.*

Caractérisation : Avec les mêmes notations, on a :

- f est surjective si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que $f_o g = Id_F$. g est alors injective.
- f est injective si et seulement si il existe une fonction g de F dans E telle que $g_o f = Id_E$. g est alors surjective.
- f est bijective si et seulement si il existe une application g de F dans E telle que $f_o g = Id_F$ et $g_o f = Id_E$. g est alors unique, elle est appelée **application inverse** (ou **réciproque**) de f et notée f^{-1}. g est alors également bijective, de réciproque f.

Corollaire 1.3.1 *: Il existe une injection de E dans F si et seulement si il existe une surjection de F dans E.*

Proposition 1.3.3

- *La composée de deux surjections est une surjection.*
- *La composée de deux injections est une injection.*
- *La composée de deux bijections est une bijection.*

Exercice 17 E, F, G sont des ensembles non vides, f est une application de E dans F et g une application de F dans G. Justifier

1. gof injective $\Rightarrow f$ injective
2. gof surjective $\Rightarrow g$ surjective

Correction :

1. Supposons tout d'abord que $g_o f$ soit injective et montrons que f est injective. Soit $(a, a') \in E^2$ avec $f(a) = f(a')$ alors $g_o f(a) = g_o f(a')$ or $g_o f$ est injective donc $a = a'$ ce qui signifie que f est injective.
2. Supposons maintenant que $g_o f$ soit surjective et montrons que g est surjective. Soit $c \in G$, comme $g_o f$ est surjective, il existe $a \in E$ tel que $g_o f(a) = c$. Posons $b = f(a)$ alors $g(b) = c$ ceci quel que soit $c \in G$ donc g est surjective.

Exercice 18 Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à un nombre n associe la somme de ses chiffres (par exemple $f(17) = 8$). Soit g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à un nombre n associe son dernier chiffre (par exemple $g(17) = 7$).

1. Étudier l'injectivité de f

2. Étudier la surjectivité de f
3. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{3\}) \cap [1, 100]$
4. Étudier l'injectivité de g
5. Étudier la surjectivité de g
6. Calculer $g(\mathbb{N})$
7. L'application gof est-elle surjective ? Même question pour fog.

Correction :

1. f est injective ssi $\forall (x, x') \in \mathbb{N}^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Or $f(17) = f(26) = 8$ et $17 \neq 26$ donc f n'est pas injective.
2. f est surjective ssi $\forall y \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$. Il suffit de considérer (par exemple) $x = \underbrace{11\ldots1}_{y \text{ fois}}$.
3. $f^{-1}(\{1\}) = 10^n$ avec $n \in \mathbb{N}$; $f^{-1}(\{3\}) \cap [1, 100] = \{3, 12, 21, 30\}$.
4. On remarque par exemple que $g(27) = g(17) = 7$ donc g n'est pas injective.
5. Soit $y \in \mathbb{N}$. Il est évident que g est surjective lorsque $y \in \{0, \ldots, 9\}$. Mais si $y \geq 10$, y ne représente plus un chiffre mais un nombre ; par conséquent g n'est pas surjective sur $\{y \in \mathbb{N}/y \geq 10\}$. On conclut donc que g n'est pas surjective.
6. $g(\mathbb{N}) = \{0, \ldots, 9\}$ puisqu'on travaille dans la base décimale.
7. – On sait que "$g_o f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ". Il suffit alors d'utiliser la contraposée de cette implication c'est-à-dire "g non surjective $\Rightarrow g_o f$ non surjective" pour affirmer que dans notre cas $f_o g$ n'est pas surjective.
   – Étudions la surjectivité de $f_o g$. On sait que si f et g sont surjectives alors $f_o g$ est surjective mais également que si $f_o g$ est surjective alors f est surjective. On note donc que la surjectivité de f est une condition nécessaire mais pas toujours suffisante pour que $f_o g$ soit surjective. Prenons par exemple $y = 6$ alors, il existe $z \in \mathbb{N}$ ($z = 15$ par exemple) tel que $f(z) = 6$. Mais comme g n'est pas surjective pour $z \geq 10$, $\nexists x \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) = 15$ ce qui signifie $\nexists x \in \mathbb{N}$ tel que $f_o g(x) = y$. Donc $f_o g$ n'est pas surjective.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1], g(x) = f(x)$ est une bijection.

Correction :

1. f n'est pas injective car $f(2) = f(1/2) = 4/5$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent. En effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x) = y$ est équivalente à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions ssi $y \in [-1, 1]$. Ainsi on a exactement $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Soit $y \in [-1, 1]$. Les solutions possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$ ou $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$. La deuxième solution n'appartient pas à $[-1, 1]$. D'autre part, $x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \dfrac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$ est dans $[-1, 1]$. L'équation $g(x) = y$ admet donc une unique solution avec $x \in [-1, 1]$ ce qui prouve que g est une bijection.

Exercice 20 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tous A,B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Correction :

- Montrons que 1. $\Rightarrow$ 2. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $y \in f(A)$ puisque $y = f(x)$ avec $x \in A$. De même $y \in f(B)$. On en déduit donc que $y \in f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$ alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais puisque f est injective, on a $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$.
- Montrons que 2. $\Rightarrow$ 1. Soient a et b tels que $f(a) = f(b) = y$. Prenons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Remarquons que $f(A) = f(B) = \{y\}$. En particulier, $A \cap B \neq \emptyset$ et donc $a = b$.

Exercice 21 (*non corrigé*) Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$
2. $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto -n$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$

Exercice 22 (*non corrigé*) Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$
2. $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$
3. $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$

Exercice 23

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star$.
2. Déterminer une bijection de $\left\{\frac{1}{n}; n \geq 1\right\}$ dans $\left\{\frac{1}{n}; n \geq 2\right\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Correction :

1. On pose $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star$ définie par $f(n) = n+1$ et on remarque que f est bien à image dans $\mathbb{N}^\star$. Il reste à prouver que f est bijective : si $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $f(k) = n \Leftrightarrow k+1 = n \Leftrightarrow k = n-1$, l'équation $f(k) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{N}$ ce qui permet d'affirmer que f est bijective.
2. On pose $g : \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\} \to \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\}$ définie par $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$. On remarque que l'ensemble d'arrivée est bien cohérent avec l'ensemble de départ. On verifie aisément que g est bijective.
3. Écrivons $[0,1] = \left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\} \cup A$ où A est le complémentaire de $\left\{\frac{1}{n}, n \geq 1\right\}$ dans $[0,1]$. On définit h de la manière suivante :
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \text{ si } x = \dfrac{1}{n} \\ x \text{ si } x \in A \end{cases}$$
Alors h est bijective. Prouvons tout d'abord qu'elle est injective : si $h(x) = h(x')$, on peut distinguer 3 cas :

– si $x \in A$ et $x' \in A$ alors $h(x) = x$ et $h(x') = x'$ ce qui implique $x = x'$,
– si $x \in A$ et $x' \notin A$ (ou $x \notin A$ et $x' \in A$), en écrivant $x' = \dfrac{1}{k}$ on a $x = h(x) = h(x') = \dfrac{1}{k+1}$ ce qui implique $x \notin A$, ce qui est impossible,
– si $x \notin A$ et $x' \notin A$, en écrivant $x = \dfrac{1}{k}$ et $x' = \dfrac{1}{n}$ on a $\dfrac{1}{k+1} = h(x) = h(x') = \dfrac{1}{n+1}$ ce qui entraîne $k+1 = n+1$ et par suite $x = x'$.

Dans tous les cas possibles on trouve $x = x'$ et h est injective.
Prouvons maintenant que h est surjective. Choisissons $y \in [0,1]$. Si $y \in A$, en particulier $y \neq 1$, on a $h(y) = y$. Si $y \notin A$, $y = \dfrac{1}{n}$ où n est un entier strictement plus grand que 1 puisque $y \neq 1$. On a alors $h(\dfrac{1}{n-1}) = y$. Dans tous les cas, y possède un antécédent, ce qui prouve la surjectivité de h.

4. Rappelons que tout entier peut s'écrire $2k$ s'il est pair et $2k+1$ s'il est impair. On pose $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k$. Il reste alors à vérifier que f est bijective ce qui est aisé.

Exercice 24 Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a $f_o g = f_o h \Rightarrow g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a $g_o f = h_o f \Rightarrow g = h$.

Correction :

1. Supposons que f soit injective. Soient $g : Z \to X$ et $h : Z \to X$ telles que $f_o g = f_o h$. Alors, pour tout z de Z on a $f(g(z)) = f(h(z)) \Rightarrow g(z) = h(z)$ puisque f est injective. On a donc bien $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z = \{0\}$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$. Alors on a $f_o g(0) = f_o h(0)$ soit $f(x) = f(y)$ alors que $g \neq h$.
2. Supposons que f soit surjective. Soient $g : Y \to Z$ et $h : Y \to Z$ telles que $g_o f = h_o f$. Soit $y \in Y$, il existe alors $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On en déduit que $g(y) = g_o f(x) = h_o f(x) = h(y)$ ce qui prouve $g = h$.
Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$. On considère alors $Z = \{0,1\}$, g définie sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h définie sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y. On a bien $g_o f = h_o f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.

Exercice 25 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E), on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A).

Correction :

– Pour l'implication directe, on suppose que f est bijective. Prenons A un élément de $\mathcal{P}(E)$. On doit montrer une double inclusion : soit d'abord x dans $f(\overline{A})$ alors $x = f(y)$ où $y \in \overline{A}$. Supposons que $x \in f(A)$ alors $x = f(z)$ où $z \in A$. Alors, $f(x) = f(z)$ et par injectivité de f on a $y = z$. Comme $y \in \overline{A}$ et $z \in A$, cette égalité est impossible et donc $x \notin f(A)$ c'est-à-dire qu'on a prouvé que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Prouvons maintenant l'autre inclusion. Soit $x \in \overline{f(A)}$. Puisque f est surjective, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Mais $y \notin A$ car sinon $x \in f(A)$ ce qui n'est pas vrai. Donc $y \in \overline{A}$ et $x \in f(\overline{A})$.
– Étudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire qu'on suppose que pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Prouvons tout d'abord que ceci implique f injective. En effet, pour tous x, y tels que $f(x) = f(y)$, supposons que $x \neq y$. Posons $A = \{x\}$, on a $y \in \overline{A}$ et donc $f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Or, $f(A) = \{f(x)\}$ et donc $f(y) \neq f(x)$ d'où une contradiction. Prouvons enfin que f est surjective. Par hypothèse appliquée à $A = E$, on sait que $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$. Mais $f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$ et donc $\overline{f(E)} = \emptyset$ ce qui, en prenant le complémentaire, se traduit par $f(E) = F$ c'est-à-dire que f est surjective.

Exercice 26 Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E. On définit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

<u>*Correction*</u> :

1. Pour démontrer le sens direct, on raisonne par contraposée : si $A \cup B \neq E$, on prend $x \in E \backslash (A \cup B)$ et $X = \{x\}$. Alors, $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$ car x n'appartient ni à A ni à B. D'autre part, $f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$. Donc, $f(X) = f(\emptyset)$ alors que $X \neq \emptyset$: f n'est pas injective.
   Pour la réciproque, montrons que pour tout $X \subset E$, puisque $A \cup B = E$, on a
   $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B).$$
   Ainsi, si $X, X' \subset E$ sont tels que $f(X) = f(X')$ c'est-à-dire $X \cap A = X \cap A'$ et $X \cap B = X \cap B'$ on a
   $$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'$$
   Donc f est injective.
2. Supposons d'abord que f est surjective et prenons $x \in A$ alors il existe $X \subset E$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$. Alors on a $X \cap B = \emptyset$ et $x \in X \cap A$. Ainsi, $x \in X$ et donc $x \notin B$ donc $A \cap B = \emptyset$.
   Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$, prenons $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$. Donc $f(X) = (A', B')$ et f est surjective.
3. D'après les questions précédentes, on a f bijective ssi $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire si (A, B) est une partition de E). La bijection réciproque a été établie à la question précédente et est donnée par $(A', B') \mapsto A' \cup B'$.

1.3.3 Relations d'équivalence

Définition 1.3.15 *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation binaire.*
- *La relation $\mathcal{R}$ est dite* ***réflexive*** *si $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$.*
- *La relation $\mathcal{R}$ est dite* ***symétrique*** *si $\forall (x, y) \in E \times E$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$.*
- *La relation $\mathcal{R}$ est dite* ***antisymétrique*** *si $\forall (x, y) \in E \times E$, $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$.*
- *La relation $\mathcal{R}$ est dite* ***transitive*** *si $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$, $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.*

Définition 1.3.16 *On appelle* ***relation d'équivalence sur un ensemble*** *E toute relation binaire sur E réflexive, transitive et symétrique.*

Exemple 1.3.6 L'équivalence de deux fonctions au voisinage d'un point, l'égalité de deux objets sont des relations d'équivalence.

Définition 1.3.17 *On dit que deux ensembles E et F sont* ***équipotents*** *s'il existe une bijection de E sur F. Cette "relation" est réflexive, symétrique et transitive. Mais, en toute rigueur, ce n'est pas une relation d'équivalence car l'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble.*

Définition 1.3.18 *Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence. Si x est un élément de E, on appelle* ***classe d'équivalence*** *de x, et on note $cl(x)$, l'ensemble des éléments y de E tels que $x \mathcal{R} y$. On note $E/\mathcal{R}$ (E* ***modulo*** *$\mathcal{R}$) l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E.*

Proposition 1.3.4 *L'ensemble des classes d'équivalence forme une **partition** de l'ensemble E.*

$E/\mathcal{R}$ est également appelé **ensemble quotient**. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E. L'ensemble quotient peut aussi être désigné comme "l'ensemble E quotienté par $\mathcal{R}$" ou "l'ensemble E considéré modulo $\mathcal{R}$". L'idée derrière ces appellations est de travailler dans l'ensemble quotient comme dans E, mais sans distinguer entre eux les éléments équivalents selon $\mathcal{R}$.

Exemple 1.3.7

- La relation de congruence modulo n, due à Karl Friedrich GAUSS (1777-1855), notée $x \equiv y$ modulo $n \Leftrightarrow x - y$ est multiple de n est une relation d'équivalence. Ses classes, ensembles des entiers donnant le même reste dans la division par n constituent n sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ que l'on note généralement x (ou x surmonté d'un point, voire simplement x') avec $x = 0, 1, \ldots, n-1$. Ce sont les classes résiduelles modulo n (ou encore les classes de congruence). Muni de l'addition induite par $\mathbb{Z}$, cet ensemble de classes "modulo n" est appelé **groupe quotient** de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence et noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des entiers relatifs peut être muni de la relation "a le même signe que" (comprise au sens strict). Il y a trois classes d'équivalence :
  . l'ensemble des entiers strictement positifs,
  . l'ensemble des entiers strictement négatifs,
  . le singleton $\{0\}$.

  On peut noter ces trois classes par, respectivement, $(+)$, $(-)$ et (0).

  On connaît la "règle des signes" pour le produit de deux entiers relatifs : elle montre que si on sait dans quelle classe d'équivalence se trouvent x et y, le produit xy se trouve dans une classe bien déterminée. Par exemple, si x est dans $(+)$ et y dans (0), alors xy est dans (0). Formellement, on peut le noter $(+).(0) = (0)$. De même $(+).(-) = (-)$, ou encore $(+).(+) = (+)$, $(-).(-) = (+)$ etc. Ceci est un exemple simple de loi-quotient.

  Mais avec cet exemple on ne peut pas "faire passer au quotient" la loi $+$: que dire de la somme d'un élément de $(+)$ et d'un élément de $(-)$? Pour savoir si les lois et les propriétés de structure sont compatibles avec le passage au quotient, il est utile d'introduire le concept de surjection canonique.

Proposition 1.3.5 *Il existe une surjection canonique s de E dans l'ensemble quotient, qui à chaque élément de E associe sa classe d'équivalence :*

$$\begin{array}{rcl} s : E & \to & E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto & cl(x) \end{array}$$

s est une application puisque tout élément de E appartient à une et une seule classe d'équivalence ; s est surjective puisqu'aucune classe d'équivalence n'est vide.
s n'est pas en général injective, mais on a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, [s(x) = s(y)] \Leftrightarrow [\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)] \Leftrightarrow [x\mathcal{R}y]$$

Cette surjection est ainsi une bijection ssi la relation d'équivalence concernée n'est autre que la relation d'égalité.

Grâce à la surjection s, si E est muni d'une structure, il est possible de transférer cette dernière à l'ensemble quotient, sous réserve que la structure soit compatible avec la relation d'équivalence, c'est-à-dire que deux éléments de E se comportent de la même manière vis-à-vis de la structure s'ils appartiennent à la même classe d'équivalence. L'ensemble quotient est alors muni de la structure quotient de la structure initiale par la relation d'équivalence.

Définition 1.3.19 *On dit qu'une relation d'équivalence, notée $\mathcal{R}$, définie dans une structure algébrique S (voir chapitre suivant), est **compatible** avec les lois de S lorsque les résultats des opérations effectuées sur des éléments équivalents demeurent équivalents. Plus précisément :*

- *Cas d'une loi interne comme l'addition : si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$, alors $(x+y)\mathcal{R}(x'+y')$*
- *Cas d'une loi externe (multiplication par un scalaire) : si $x\mathcal{R}x'$ et si a est un scalaire, alors $ax\mathcal{R}ax'$*

Exercice 27 On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Correction :

1. Il suffit de remarquer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ avec $f : x \mapsto x^2 - x$. Il est alors aisé de vérifier en appliquant la définition que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments y de $\mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$. On doit donc résoudre l'équation $x^2 - y^2 = x - y$. Elle se factorise en $(x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y) \times (x+y-1) = 0$. La classe de x est donc égale à $\{x, 1-x\}$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. Dans ce cas, elle est égale à $\{1/2\}$.

Exercice 28 (*non corrigé*) Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble est dite **circulaire** si pour tout $(a, b, c) \in E^3$,

$$(a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$$

Montrer qu'une relation circulaire et réflexive est une relation d'équivalence.

1.3.4 Relations d'ordre

Définition 1.3.20 *On appelle **relation d'ordre sur un ensemble** E toute relation binaire sur E réflexive, transitive et antisymétrique.*

Exemple 1.3.8

- La relation "inférieur ou égal à" dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre :
  . quel que soit x : $x \leq x$ (réflexivité)
  . si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$ (antisymétrie)
  . si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ (transitivité)
- Dans l'ensemble des mots français par exemple (un mot est une suite finie de lettres de l'alphabet), l'ordre alphabétique ou lexicographique est une relation d'ordre. Cette relation existe dans de nombreux langages de programmation :

  "$ABBC \leq ABC$" est vrai
  "$ABCC \leq ABB$" est faux

La structure d'**ensemble ordonné** (ensemble muni d'une relation d'ordre) a été mise en place dans le cadre de la théorie des nombres par Cantor et Richard DEDEKIND (1831-1916).

Définition 1.3.21 *Soit $\mathcal{R}$ un ordre sur E. On dit que E est ordonné par $\mathcal{R}$. Deux éléments x et y de E tels que $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$ sont dits **comparables**.*
*Il se peut, en effet que l'on ait ni $x\mathcal{R}y$, ni $y\mathcal{R}x$: on parle alors d'**ordre partiel**. Sinon, l'**ordre** est **total**.*

Comme son nom l'indique, une relation d'ordre sert à établir une hiérarchie parmi les éléments de E. Si $x \leq y$, x sera le plus souvent considéré comme plus petit que y (la convention inverse aurait pu également être prise). $x\mathcal{R}y$ doit être compris comme une phrase du type "x est plus petit que y", ou bien "x est avant y" (et éventuellement, $x = y$). Du fait de l'antisymétrie et de la transitivité, il est impossible d'avoir un cycle d'éléments distincts vérifiant $x_1\mathcal{R}x_2$, $x_2\mathcal{R}x_3$,...,$x_{n-1}\mathcal{R}x_n$, $x_n\mathcal{R}x_1$.

Remarque 1.3.3 Si on définit une relation $\leq$ dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, il n'en est pas de même dans $\mathbb{C}$. Pourquoi ? Les relations définies sur les ensembles de nombres présentent une certaine compatibilité avec les lois $+$ et $\times$ définies sur ces ensembles. En particulier, on a : $a \geq 0$ et $b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 0$ et $ab \geq 0$. Si l'on avait, sur $\mathbb{C}$, une relation du type $i \geq 0$, alors, en effectuant le produit de i par lui-même, on obtiendrait $-1 \geq 0$. De même si $i \leq 0$. Cela ne veut pas dire qu'il est impossible de définir une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, mais que cette relation ne présentera aucun caractère de compatibilité avec les lois $+$ et $\times$.

Exemple 1.3.9
- Si E possède au moins deux éléments, l'ensemble P des parties de E est partiellement ordonné par la relation d'inclusion $\subset$.
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont totalement ordonnés par la relation usuelle $\leq$.
- La relation $<$, souvent dite d'ordre strict, n'est pas une relation d'ordre car non réflexive. L'antisymétrie n'est cependant pas en défaut puisque les inégalités $a < b$ et $b < a$ ne peuvent avoir lieu conjointement.

Exercice 29 (*non corrigé*) Vérifier que, dans $\mathbb{N}$, la relation "a divise b", souvent notée $|$, définie par $a|b$ ssi $b = ka$ avec $k \in \mathbb{N}$, est un ordre partiel.

Définition 1.3.22 *Dans un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$, on parle d'**intervalle** $[a, b]$ pour désigner l'ensemble des éléments x de E vérifiant la "double inégalité" : $a \leq x \leq b$. On parle aussi d'**encadrement** de x.*

Définition 1.3.23 *Si $\mathcal{R}$ est un ordre sur E et F une partie de E, la restriction à F de la relation $\mathcal{R}$ est un ordre sur F, dit **ordre induit** par $\mathcal{R}$ dans F.*

Définition 1.3.24 *On munit $\mathbb{Z}$ de la relation "a divise b " définie par : $a|b \Leftrightarrow b = k \times a$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Restreinte à $\mathbb{N}$, cette relation est une relation d'ordre (partiel). Dans $\mathbb{Z}$, elle est réflexive et transitive mais n'est pas symétrique ni antisymétrique : on parle de **relation de préordre**.*

Exercice 30 (*non corrigé*) On munit $\mathbb{N}$ de l'ordre partiel "a divise b " défini par : $a|b \Leftrightarrow b$ est multiple de a. Montrer que la restriction de cet ordre à $F = \{n \in \mathbb{N}, n = 2p, p \in \mathbb{N}\}$ est un ordre total dans F.

Exercice 31 (*non corrigé*) On considère les relations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin x \leq \sin y$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$

Pour chacune de ces relations, a t-on une relation d'ordre ? Une relation d'équivalence ?

Exercice 32 (*non corrigé*) On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^\star,\ m\mathcal{R}n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^\star, m^k = n)$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

1.3.5 Majorant, minorant, bornes supérieure et inférieure, ensemble borné

Définition 1.3.25 *Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné et F une partie de E. S'il existe un élément m de E tel que $x \prec m$ pour tout x de F, on dit que m est un* ***majorant*** *de F dans E ou encore que F est* ***majorée*** *par m. Si l'on a, au contraire, $m \prec x$ pour tout x de F, on parle de* ***minorant*** *et* ***partie minorée****. F sera dit* ***borné*** *s'il admet un majorant et un minorant.*

Propriété 1.3.1 *Si, dans l'ensemble ordonné $(E, \prec)$, un majorant (respectivement minorant) d'une partie F est élément de F, il est le seul à posséder cette propriété : on l'appelle le plus grand (respectivement plus petit) élément de F pour la relation.*

Preuve : En effet, supposons par exemple l'existence de deux majorants : on aurait, dans F, $x \prec m$ et $x \prec m'$ pour tout x de F et en choisissant $x = m$ puis $x = m'$, on obtient $m = m'$ par antisymétrie.
■
On peut aussi énoncer : s'il existe un élément m de E inférieur (respectivement supérieur) à tous les éléments de E (au sens de la relation $\prec$), on dit que m est le plus petit (respectivement plus grand) élément de E. De tels éléments sont uniques.

Exemple 1.3.10
- Dans $\mathbb{N}$, muni de la relation d'ordre usuel, l'intervalle $I = [1, 100]$ admet un plus petit élément 1 et un plus grand élément 100. De même si $I =]0, 101[$.
- Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0, 1[$ est borné. Son plus petit élément est 0, il n'y a pas de plus grand élément.
- Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de l'ordre partiel "a divise b" $(a|b)$, b est un multiple de a ($b = k \times a$ avec $k \in \mathbb{Z}$). Au sens de cette relation, 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ et 0 en est le plus grand. On remarque ainsi qu'il faut toujours préciser l'ordre auquel on se réfère.
- Soit F la partie de $\mathbb{N}$ définie par $F = \{2, 3, 5, 7, 8, 10\}$ muni de l'ordre ci-dessus. Au sens de cette relation, le plus petit des majorants de F est 840 (soit le PPMC de ses éléments) et F ne contient aucun de ses majorants. Le seul minorant de F est 1.
- Si on considère $G = \{3, 9, 27, 243\}$ muni de l'ordre précédent, 243 et ses multiples sont ses majorants. 243 est le plus petit : c'est le plus grand élément de G. Les minorants de G sont 1 et 3. Ce dernier est son plus petit élément.

Définition 1.3.26 *Lorsqu'une partie F est majorée (respectivement minorée), le plus petit des majorants (respectivement le plus grand des minorants), s'il existe, est appelé* ***borne supérieure*** *(respectivement* ***borne inférieure****) de F.*

Exemple 1.3.11 L'ensemble F des valeurs de la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est majoré par 1 et par tout nombre supérieur à 1. Le nombre 1 est le plus petit des majorants : c'est la borne supérieure de F. On note $\sup(F) = 1$. On remarque que 1 n'est pas élément de F. On a $f(x) \geq 0$ et $f(0) = 0$: 0 est la borne inférieure de F (le plus grand des minorants) et puisque 0 est élément de F, on dit que 0 est le plus petit élément de F : on note $\inf(F) = 0$.

Proposition 1.3.6 *Un ensemble peut être borné sans pour autant admettre une borne supérieure ou une borne inférieure.*

Exemple 1.3.12 Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (fractions $\frac{a}{b}$, a et b entiers, b non nul) muni de l'ordre usuel, la partie $F = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, x^2 \leq 2\}$ manifestement majorée (par 3/2, 2,...) n'admet pas de borne supérieure. En effet, supposons l'existence d'une borne supérieure m pour F. m est rationnel, il est le plus petit des majorants de F. On peut donc écrire :

1. $\forall x \in F$, $x \leq m$ et
2. $\forall M$ majorant de F, $m \leq M$

2. permet d'affirmer que $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$, $\exists x_0 \in F/m - \epsilon < x_0 \leq m$. Il s'ensuit que pour tout rationnel ϵ vérifiant $0 < \epsilon \leq m$, on a $(m-\epsilon)^2 < 2$ et, par conséquent $\epsilon^2 - 2m\epsilon + m^2 - 2 < 0$ pour tout ϵ de l'intervalle rationnel $]0, m]$. Si nous résolvons cette équation dans $\mathbb{R}$, on voit qu'elle n'admet des solutions que si $m \leq \sqrt{2}$. Or on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, ainsi m est un rationnel vérifiant $m < \sqrt{2}$. En tant que partie de $\mathbb{R}$, les majorants M de F vérifient l'inégalité $M \geq \sqrt{2}$ et les majorants de F dans $\mathbb{Q}$ sont alors les rationnels vérifiant $M > \sqrt{2}$ et en particulier $m > \sqrt{2}$. Les inégalités $m < \sqrt{2}$ et $m > \sqrt{2}$ étant incompatibles, F n'admet pas de borne supérieure.

Définition 1.3.27 *Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné. S'il existe dans E un élément m tel que tout x de E, comparable à m (et autre que m), lui soit inférieur (respectivement supérieur) au sens de la relation $\prec$, on dit que m est un* ***élément maximal*** *(respectivement* ***minimal****).*

Lorsque l'ordre de E n'est pas total, il peut exister plusieurs éléments maximaux ou minimaux.

Exemple 1.3.13 On munit l'intervalle $I = [1, 100]$ de $\mathbb{N}$ (nombres entiers de 1 à 100) de l'ordre partiel "a divise b" : $a|b$ ssi a est un diviseur de b (a inférieur à b), ssi b est multiple de a (b supérieur à a). Tout $n \geq 51$ est maximal et 1 est le seul élément minimal. C'est le plus petit élément. Si $I = [0, 100]$ alors 0, étant multiple de tout nombre, est le plus grand élément au sens de la relation "divise" et devient l'unique élément maximal.

Proposition 1.3.7 *Si $(E, \prec)$ admet un plus petit (respectivement grand) élément m, alors m est l'unique élément minimal (respectivement maximal) de E.*

1.3.6 Ordre produit et ordre réciproque

Définition 1.3.28 *Si $\mathcal{R}$ est un ordre sur E, la relation $\mathcal{R}'$ (souvent notée $\mathcal{R}^{-1}$) définie par :*

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

est un ordre sur E, dit ***ordre réciproque*** *de $\mathcal{R}$.*

Exemple 1.3.14
- L'ordre réciproque de l'ordre usuel $\leq$ est l'ordre noté $\geq$.
- L'ordre réciproque de l'ordre "x divise y" dans $\mathbb{N}$ est l'ordre "x est multiple de y".

Remarque 1.3.4 On ne confondra pas l'ordre réciproque de $\mathcal{R}$ et la négation $\neg\mathcal{R}$ d'un ordre $\mathcal{R}$, laquelle serait définie par $x\neg\mathcal{R}y$ ssi non ($y\mathcal{R}x$). La négation de la relation d'ordre usuel (inférieur ou égal) est la relation $>$ (supérieur et différent). C'est un ordre "strict".

Définition 1.3.29 *Si (E, O) et (F, O') sont deux ensembles ordonnés par les relations notées O et O', on peut ordonner le produit cartésien $E \times F$ par l'ordre T dit* ***ordre produit*** *de O et O' :*

$$(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow (aOc \text{ et } bO'd)$$

Exemple 1.3.15 Si on applique cet ordre à $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}$ est muni de l'ordre total usuel, $O = O' = $ " $\leq$", on obtient un ordre partiel. Par exemple, les couples $(1, 2)$ et $(2, -3)$ ne sont pas comparables.

1.3.7 Cardinal d'un ensemble

Définition 1.3.30 *Soient E et F deux ensembles.*
- *On dit que E et F ont même cardinal, et on note $Card(E) = Card(F)$, s'il existe une bijection de E sur F et on parle dans ce cas d'ensembles* ***équipotents****. Sinon on note $Card(E) \neq Card(F)$.*
- *On dit que le cardinal de E est inférieur ou égal au cardinal de F, et on note $Card(E) \leq Card(F)$, s'il existe une injection de E dans F. Si de plus $Card(E) \neq Card(F)$, on note $Card(E) < Card(F)$.*

– *On dit que le cardinal de E est supérieur ou égal au cardinal de F, et on note $Card(E) \geq Card(F)$, s'il existe une surjection de E dans F. Si de plus $Card(E) \neq Card(F)$, on note $Card(E) > Card(F)$.*

Remarque 1.3.5 On utilise parfois les notations $|E|$ et $\#E$ pour exprimer $Card(E)$.

Théorème 1.3.1 *(Cantor-Bernstein) Soient E et F deux ensembles.*

$$\boxed{Card(E) = Card(F) \Leftrightarrow (Card(E) \leq Card(F) \text{ et } Card(F) \leq Card(E))}$$

Remarque 1.3.6 Ces relations se comportent comme une relation d'ordre, mais cette "relation" n'est à priori pas définie sur un ensemble. Les résultats suivants vont nous en convaincre.

Théorème 1.3.2 *(Cantor) Soit E un ensemble non vide alors*

$$\boxed{card(E) < card(\mathcal{P}(E))}$$

Corollaire 1.3.2 *Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.*

Définition 1.3.31 *Soit E un ensemble. On dit que E est **fini** s'il n'est en bijection avec aucune de ses parties propres. Dans le cas contraire, on dit que E est **infini**.*
*Si E est un ensemble infini, on dit que E est **dénombrable** s'il existe une bijection de E sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Dans le cas contraire, on dit que E est **indénombrable**.*

Remarque 1.3.7 Un ensemble fini est un ensemble dont le cardinal est un entier naturel. On retrouve là les cardinaux connus. Toutefois, cette notion n'est pas intuitive, en fait, elle a été utilisée par Cantor pour définir rigoureusement les nombres entiers naturels.

Proposition 1.3.8 *Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.*

Caractérisation : Un ensemble infini E est dénombrable si et seulement si E est l'ensemble-image d'une suite.

Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par $Card(A)$ le nombre d'éléments de A et par $Card(B)$ le nombre d'éléments de B, on aura

$$\boxed{Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)}$$

En effet le nombre de couples du type (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$ est obtenu en faisant correspondre à tout élément de $a \in A$ tous les éléments de B soit $Card(B)$ éléments. Ceci devra être répété autant de fois qu'il y a d'éléments dans A.

On vérifiera aisément que

$$\boxed{Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)}$$

$$\boxed{Card(A^n) = (Card(A))^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^\star}$$

$$\boxed{Card(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card(E)}}$$

Exercice 33 (*non corrigé*) Dénombrer les parties d'un ensemble contenant n éléments.

Exercice 34 (*non corrigé*) Soit l'ensemble E possédant n éléments. Quel est le nombre d'éléments de E^p ? Quel est le nombre de parties de E^p ?