

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Correction

Exercice 1

 (5 points)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $x^2 = 9$
2.  $x^2 = -3$
3.  $(x - 5)^2 = 3$
4.  $(2x - 1) + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$
5.  $(3x + 5)^2 = (x + 1)^2$
6.  $(5x - 4)^2 - (3x + 7)^2 = 0$

Correction

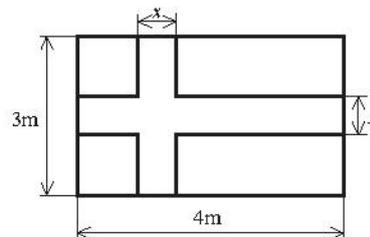
Aucune des équations à résoudre ne nécessite réellement le calcul du discriminant ni celui des solutions associées. En effet, les équations ont toutes une écriture remarquable (ce qui n'est pas toujours le cas bien-sûr). On peut néanmoins calculer le  $\Delta$  si on le souhaite et retrouver les solutions ci-dessous.

1.  $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$  car on reconnaît une identité remarquable. On en déduit que les solutions de l'équation  $x^2 = 9$  sont 3 et  $-3$ , on écrit  $S = \{-3, 3\}$ .
2. Un nombre élevé au carré ne pouvant être négatif, il n'y a aucune solution soit  $S = \emptyset$ .
3.  $(x - 5)^2 = 3 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 5 - \sqrt{3})(x - 5 + \sqrt{3}) = 0$ . Par conséquent,  $S = \{5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}\}$ .
4.  $(2x - 1) + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(2x - 1) = 0$ . On déduit de cette factorisation que  $S = \{0, \frac{1}{2}\}$ .
5.  $(3x + 5)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow (3x + 5)^2 - (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow ((3x + 5) - (x + 1))((3x + 5) + (x + 1)) = 0$ . On en déduit que  $(3x + 5)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow (2x + 4)(4x + 6) = 0$  et  $S = \{-\frac{3}{2}, -2\}$ .
6.  $(5x - 4)^2 - (3x + 7)^2 = 0 \Leftrightarrow ((5x - 4) - (3x + 7))((5x - 4) + (3x + 7)) = 0 \Leftrightarrow (2x - 11)(8x + 3) = 0$ . Ainsi,  $S = \{\frac{11}{2}, -\frac{3}{8}\}$ .

Exercice 2

 (5 points)

On considère le drapeau ci-dessous :



Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?

Correction

Supposons que  $A$  soit l'aire de la croix. Alors, afin de répondre aux exigences de l'exercice, on doit imposer que  $A = 12 - A$ . En effet,  $12\text{m}^2$  est l'aire totale du drapeau et  $12 - A$  est l'aire du drapeau privée de

l'aire de la croix. On a donc bien imposé que l'aire de la croix est égale à l'aire restante du drapeau. Déterminons maintenant l'aire de la croix. L'aire de la croix est égale à l'aire de la bande horizontale plus l'aire de la bande verticale moins l'aire de l'intersection entre les deux bandes.

- L'aire de la bande horizontale :  $4x$ ,
- l'aire de la bande verticale :  $3x$ ,
- l'aire de l'intersection :  $x^2$ .

donc  $A = 4x + 3x - x^2 = 7x - x^2$ . Ainsi,

$$A = 12 - A \Leftrightarrow 2A = 12 \Leftrightarrow A = 6 \Leftrightarrow 7x - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0.$$

On remarque que 1 est une racine évidente donc  $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(ax + b)$ . On déduit facilement par identification ou par division euclidienne que  $a = 1$  et  $b = 6$ . Finalement,

$$A = 12 - A \Leftrightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6.$$

Le rectangle faisant 4m de longueur et 3m de largeur,  $x = 6$  est à exclure. Finalement, la largeur qu'on doit donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau est égale à 1.

### Exercice 3 (5 points)

Résoudre les trois inéquations suivantes :

1.  $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
2.  $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$
3.  $\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3 - 10} > 0$

#### Correction

1. Déterminons les racines de  $-2x^2 + 7x - 5$ . On a  $\Delta = (7)^2 - 4(-2)(-5) = 9$ . Le trinôme admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2(-2)} = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2(-2)} = 1.$$

Le trinôme est donc du signe de  $a = -2$ , c'est-à-dire négatif, à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur. Conclusion,

$$-2x^2 + 7x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 1] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[.$$

2. On remarque immédiatement que  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$  donc  $(x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4$ . Chercher  $x$  vérifiant  $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$  revient donc à chercher  $x$  tel que  $-2 < x + 1 < 2$  car  $2^4 = 16$ . Finalement,

$$(x^2 + 2x + 1)^2 < 16 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

3. La dernière inéquation comporte une "coquille". Au dénominateur, on peut lire  $x^2 - 3 - 10$  alors qu'on aurait du voir apparaître  $x^2 - 3x - 10$ . Pour ne pénaliser personne, les deux corrections sont présentes :

On démontre dans un premier temps que  $3x^2 + x + 1$  est du signe de  $a = 3$ , c'est-à-dire positif, car son discriminant est négatif ( $\Delta = -11$ ). Le signe de la fonction dépend donc du dénominateur.

- avec l'erreur. On a  $x^2 - 3 - 10 = x^2 - 13 = (x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13})$ . Donc le dénominateur est positif (signe de  $a = 1$ ) à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Conclusion,

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3 - 10} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\sqrt{13}[ \cup ]\sqrt{13}; +\infty[.$$

- sans l'erreur. On a  $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$  (" -2" est une racine évidente) donc le dénominateur est positif (signe de  $a = 1$ ) à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Conclusion,

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -2[ \cup ]5; +\infty[.$$

**Exercice 4** (5 points)

- $f$  est une fonction trinôme du second degré dont la représentation graphique est donnée dans l'annexe ci-contre.  
Déterminer en utilisant les données du dessin l'expression de  $f(x)$ .
- Représenter sur le même dessin la représentation graphique de la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = 2x^2 - 3x - 1$$

On expliquera le tracé.

Correction

- La courbe représentative de  $f$  est une parabole donc  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Déterminons  $a, b, c$ .  
On voit que les points  $(0; 3)$ ,  $(2; 5)$  et  $(4; 3)$  sont sur la courbe donc les coordonnées de ces points vérifient l'équation  $y = ax^2 + bx + c$ . On obtient alors le système

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 3 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 5 \\ a(4)^2 + b(4) + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 4a + 2b = 2 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$$

De la troisième ligne on déduit que  $b = -4a$  et comme  $4a + 2b = 2$  on obtient  $4a + 2(-4a) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ . Finalement, comme  $b = -4(-\frac{1}{2}) = 2$ ,

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3.$$

- $g$  étant un trinôme du second degré, sa courbe représentative est une parabole. Le coefficient de  $x$  étant positif, la parabole est tournée vers le haut. On sait que le sommet de la parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  a pour abscisse  $-\frac{b}{2a}$ . Le sommet de notre courbe a donc pour abscisse  $x_0 = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$ . L'ordonnée du sommet est  $g(x_0) = g(\frac{3}{4}) = -\frac{17}{8}$ . On place le sommet  $S(\frac{3}{4}; -\frac{17}{8})$ . On a de plus  $g(-1) = 4$ ,  $g(0) = -1$ ,  $g(1) = -2$ ,  $g(2) = 1$ ,  $g(3) = 8$ . La courbe passe donc également par les points de coordonnées  $(-1; 4)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(2; 1)$  et  $(3; 8)$ .

NOM : .....

Prénom : .....

N° étudiant : .....

Groupe de TD : .....

