LICENCE 1 SEG **Pôle Lamartine - ULCO**

MATHÉMATIQUES 1 30 Septembre 2011 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée.

(Les quatre exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Correction

Exercice 1 *(5 points)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 = 9$
2. $x^2 = -3$
3. $(x-5)^2 = 3$
4. $(2x-1) + x(1-2x) = 4x^2 - 1$
5. $(3x+5)^2 = (x+1)^2$
6. $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$

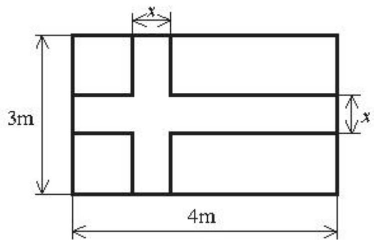
Correction

Aucune des équations à résoudre ne nécessite réellement le calcul du discriminant ni celui des solutions associées. En effet, les équations ont toutes une écriture remarquable (ce qui n'est pas toujours le cas bien-sûr). On peut néanmoins calculer le Δ si on le souhaite et retrouver les solutions ci-dessous.

1. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$ car on reconnaît une identité remarquable. On en déduit que les solutions de l'équation $x^2 = 9$ sont 3 et -3, on écrit $S = \{-3, 3\}$.
2. Un nombre élevé au carré ne pouvant être négatif, il n'y a aucune solution soit $S = \emptyset$.
3. $(x-5)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-5-\sqrt{3})(x-5+\sqrt{3}) = 0$. Par conséquent, $S = \{5-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3}\}$.
4. $(2x-1) + x(1-2x) = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(2x-1) = 0$. On déduit de cette factorisation que $S = \{0, \frac{1}{2}\}$.
5. $(3x+5)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow (3x+5)^2 - (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow ((3x+5)-(x+1))((3x+5)+(x+1)) = 0$. On en déduit que $(3x+5)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow (2x+4)(4x+6) = 0$ et $S = \left\{-\frac{3}{2}; -2\right\}$.
6. $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0 \Leftrightarrow ((5x-4)-(3x+7))((5x-4)+(3x+7)) = 0 \Leftrightarrow (2x-11)(8x+3) = 0$. Ainsi, $S = \{\frac{11}{2}, -\frac{3}{8}\}$.

Exercice 2 *(5 points)*

On considère le drapeau ci-dessous :



Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?

Correction

Supposons que A soit l'aire de la croix. Alors, afin de répondre aux exigences de l'exercice, on doit imposer que $A = 12 - A$. En effet, 12m^2 est l'aire totale du drapeau et $12 - A$ est l'aire du drapeau privée de l'aire de la croix. On a donc bien imposé que l'aire de la croix est égale à l'aire restante du drapeau. Déterminons maintenant l'aire de la croix. L'aire de la croix est égale à l'aire de la bande horizontale plus l'aire de la bande verticale moins l'aire de l'intersection entre les deux bandes.

- L'aire de la bande horizontale : $4x$,
- l'aire de la bande verticale : $3x$,
- l'aire de l'intersection : x^2.

donc $A = 4x + 3x - x^2 = 7x - x^2$. Ainsi,

$$A = 12 - A \Leftrightarrow 2A = 12 \Leftrightarrow A = 6 \Leftrightarrow 7x - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0.$$

On remarque que 1 est une racine évidente donc $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(ax+b)$. On déduit facilement par identification ou par division euclidienne que $a = 1$ et $b = 6$. Finalement,

$$A = 12 - A \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6.$$

Le rectangle faisant 4m de longueur et 3m de largeur, $x = 6$ est à exclure. Finalement, la largeur qu'on doit donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau est égale à 1.

Exercice 3 *(5 points)*

Résoudre les trois inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
2. $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$
3. $\dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3 - 10} > 0$

Correction

1. Déterminons les racines de $-2x^2 + 7x - 5$. On a $\Delta = (7)^2 - 4(-2)(-5) = 9$. Le trinôme admet deux racines distinctes
$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2(-2)} = \frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2(-2)} = 1.$$
Le trinôme est donc du signe de $a = -2$, c'est-à-dire négatif, à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur. Conclusion,
$$-2x^2 + 7x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1] \cup [\tfrac{5}{2}; +\infty[.$$
2. On remarque immédiatement que $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ donc $(x^2 + 2x + 1)^2 = (x+1)^4$. Chercher x vérifiant $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$ revient donc à chercher x tel que $-2 < x + 1 < 2$ car $2^4 = 16$. Finalement,
$$(x^2 + 2x + 1)^2 < 16 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$
3. La dernière inéquation comporte une "coquille". Au dénominateur, on peut lire $x^2 - 3 - 10$ alors qu'on aurait du voir apparaître $x^2 - 3x - 10$. Pour ne pénaliser personne, les deux corrections sont présentes :
On démontre dans un premier temps que $3x^2 + x + 1$ est du signe de $a = 3$, c'est-à-dire positif, car son discriminant est négatif ($\Delta = -11$). Le signe de la fonction dépend donc du dénominateur.
   - avec l'erreur. On a $x^2 - 3 - 10 = x^2 - 13 = (x - \sqrt{13})(x + \sqrt{13})$. Donc le dénominateur est positif (signe de $a = 1$) à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Conclusion,
   $$\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3 - 10} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{13}[\cup]\sqrt{13}; +\infty[.$$
   - sans l'erreur. On a $x^2 - 3x - 10 = (x+2)(x-5)$ ("-2" est une racine évidente) donc le dénominateur est positif (signe de $a = 1$) à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Conclusion,
   $$\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *(5 points)*

1. f est une fonction trinôme du second degré dont la représentation graphique est donnée dans l'annexe ci-contre.
   Déterminer en utilisant les données du dessin l'expression de $f(x)$.
2. Représenter sur le même dessin la représentation graphique de la fonction g définie par
   $$g(x) = 2x^2 - 3x - 1$$
   On expliquera le tracé.

Correction

1. La courbe représentative de f est une parabole donc $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminons a, b, c. On voit que les points $(0;3)$, $(2;5)$ et $(4;3)$ sont sur la courbe donc les coordonnées de ces points vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$. On obtient alors le système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} a(0)^2 + b(0) + c & = & 3 \\ a(2)^2 + b(2) + c & = & 5 \\ a(4)^2 + b(4) + c & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 3 \\ 4a + 2b + c & = & 5 \\ 16a + 4b + c & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c & = & 3 \\ 4a + 2b & = & 2 \\ 16a + 4b & = & 0 \end{array}\right.$$
   De la troisième ligne on déduit que $b = -4a$ et comme $4a + 2b = 2$ on obtient $4a + 2(-4a) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$. Finalement, comme $b = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$,
   $$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3.$$
2. g étant un trinôme du second degré, sa courbe représentative est une parabole. Le coefficient de x étant positif, la parabole est tournée vers le haut. On sait que le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$. Le sommet de notre courbe a donc pour abscisse $x_0 = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$. L'ordonnée du sommet est $g(x_0) = g(\frac{3}{4}) = -\frac{17}{8}$. On place le sommet $S(\frac{3}{4}; -\frac{17}{8})$. On a de plus $g(-1) = 4$, $g(0) = -1$, $g(1) = -2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 8$. La courbe passe donc également par les points de coordonnées $(-1;4)$, $(0;-1)$, $(1;-2)$, $(2;1)$ et $(3;8)$.

NOM	: ....
Prénom	: ....
N° étudiant	: ....
Groupe de TD	: ....