ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

MATHÉMATIQUES - Colle 1 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. Un polynôme est une combinaison linéaire de monômes c'est-à-dire de termes de la forme $ax^{n_1}y^{n_2}\dots$ où $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$. Par conséquent, les fonctions désignées par 1.,2.,3. sont des polynômes contrairement à 4. qui se réécrit $3(x-5)^{-1}$ et qui donc fait intervenir des exposants négatifs.
2. Le degré d'un polynôme est le plus grand exposant rencontré : on en déduit que le degré du polynôme est 5.
3. Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ sont deux polynômes, il est facile de prouver que $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ et $f(x) \times g(x)$ sont encore des polynômes. Ce n'est pas le cas pour $\frac{f(x)}{g(x)}$; en effet, si on prend le contre-exemple très simple suivant : $f(x) = 1$ et $g(x) = x$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} = x^{-1}$ n'est pas un polynôme.
4. 1. admet 4 termes, 2. est de degré 3, 4. est de degré 2. Par conséquent, le polynôme recherché est celui désigné par 3..

Exercice 2 *Correction* :

1. (a) Soit $f(x) = 2x^2+4x-30$ (1). Déterminons les racines de f : on a $\Delta = (4)^2-4(2)(-30) = 256 = 16^2 > 0$, ce qui nous permet de déduire que $x_1 = \frac{-(4)-\sqrt{16^2}}{2(2)} = -5$ et $x_2 = \frac{-(4)+\sqrt{16^2}}{2(2)} = 3$ sont solutions de $f(x) = 0$. On a donc $f(x) = 2(x-(-5))(x+3) = 2(x+5)(x-3)$ (2). La seconde expression (3) désigne la forme canonique de $f(x)$.

   (b) Par évaluation directe, on obtient $f(0) = -30$ (dans (1)), $f(3) = 0$ (dans (2)), $f(-5) = 0$ (dans (2)), $f(-1) = -32$ (dans (3)) et $f(-2) = -30$.
2. (a) Soit $g(x) = x^2+4x+5$. On a $\Delta = (4)^2-4(1)(5) = -4 < 0$. Donc le trinôme n'admet pas de racines (dans $\mathbb{R}$). On peut néanmoins réécrire $g(x)$ sous sa forme canonique $g(x) = (x+2)^2+1$.

   (b) $g(x)$ est une somme de deux carrés donc positive.

   (c) Non, puisque g n'admet pas de racines (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3 *Correction* :

En utilisant les règles usuelles de dérivation, on obtient :

1. $f'(x) = (2x^3+4x^2-5x+7)' = 6x^2+8x-5$
2. $g'(x) = ((-x+7)^4)' = 4(-1)(-x+7)^{4-1} = -4(-x+7)^3$
3. $h'(x) = ((2x^2+5x-7)^9)' = 9(4x+5)(2x^2+5x-7)^{9-1} = 9(4x+5)(2x^2+5x-7)^8$

Exercice 1 *Correction* :

1. $y^2 + 3y = y(y+3)$
2. $4xy - xy^2 + 27x^2y = xy(4 - y + 27x)$
3. On calcule $\Delta = (12)^2 - 4(-6)(-6) = 144 - 144 = 0$. On en déduit que le trinôme admet une racine double à savoir $x_0 = -\frac{-(12)}{2(-6)} = 1$ et donc $-6x^2 + 12x - 6 = -6(x-1)^2$.
4. $9xy - 27xy^3 + 54x^2y = 9xy(1 - 3y^2 + 6x)$
5. $25x^2 - y^2 = (5x - y)(5x + y)$ (identité remarquable)
6. $36y^4 - 6x^2 = (6y^2 - \sqrt{6}x)(6y^2 + \sqrt{6}x)$ (identité remarquable)

Exercice 2 *Correction* :

1. Le polynôme $(x-1)(x-2)(x-\frac{3}{4})$ admet pour racines $x = 1$, $x = 2$ et $x = \frac{3}{4}$.
2. Le polynôme $(x+1)(x-3)x$ admet pour racines $x = -1$, $x = 3$ et $x = 0$.
3. On remarque que $x = 1$ est une racine évidente. Donc $f(x) = (x-1)(x+2)$.
4. On a d'après l'énoncé $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - a) = (x^2 - 3)(x - a)$ où a est à déterminer. Par identification avec le terme constant, on trouve aisément que $a = -1$ et finalement, $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 1)$.

Exercice 3 *Correction* :

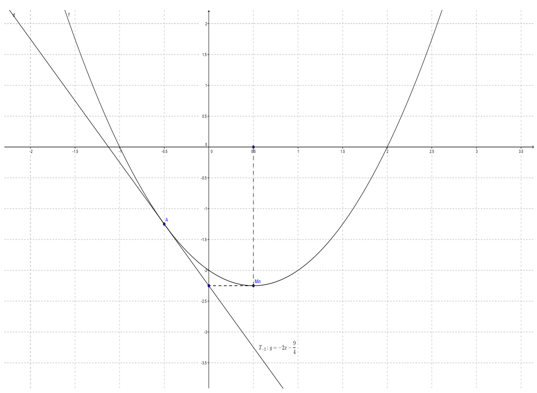
1. $f(x)$ est une fonction polynomiale donc dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2x - 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

   D'après le tableau de variations, f possède un minimum en $(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$.

2. Résolvons l'équation $f'(x) = -2$. $f'(x) = -2 \Leftrightarrow 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Le point A de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f (dans un repère orthonormal) en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur -2 est $(-\frac{1}{2}; f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en A admet pour équation $y = -\frac{5}{4} - 2(x - (-\frac{1}{2})) = -2x - \frac{9}{4}$.

3.



$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ <u>*Correction*</u> :

1. $2^{-4} = (2^4)^{-1} = 16^{-1} = \frac{1}{16}$ (réponse 3.)
2. $((\sqrt{2})^{10/3})^3 = \sqrt{2}^{10} = (2^{\frac{1}{2}})^{10} = 2^5$ (réponse 1.)
3. $2^(- 2) + (-2)^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ (réponse 4.)

ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

MATHÉMATIQUES - Colle 3 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. L'expression $3x^2 + 3x^4 + 4^{(-1)} + xy$ est un polynôme (réponse 4.)
2. Le degré du polynôme est indéfini. En effet, $0 = 0 \times x^0 = 0 \times x^1 = 0 \times x^2 = \ldots$ (réponse 4.)
3. Le degré du polynôme multivariable $3x^2y^6 + 4xy^8 + 2x^4y^5$ est $\max(2+6, 1+8, 4+5) = 9$ (réponse 4.)
4. L'expression $4xy + 2x^{2y} + 3xy^{-4}$ n'est pas un polynôme car y est élevé à la puissance -4 (réponse 1.)

Exercice 2 *Correction* :

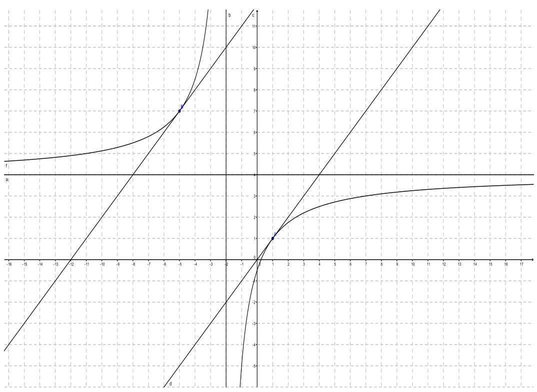
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. • $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(1-\frac{1}{4x})}{x(1+\frac{2}{x})} = 4.$
   • $\displaystyle\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = (4(-2)-1) \times \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$
   • $\displaystyle\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = (4(-2)-1) \times \lim_{x \overset{>}{\to} -2} \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$

   La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale déquation $y = 4$ et une asymptote verticale d'équation $x = -2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{4(x+2) - (4x-1)1}{(x+2)^2} = \dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$. On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
signe $f'(x)$	$+$	‖	$+$
variations f	$4 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9}{(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow x+2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$.
4. On peut déterminer les équations des deux tangentes :
   • $T_A : y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (1)(x-1) = x$
   • $T_B : y = f(-5) + f'(-5)(x-(-5)) = 7 + (1)(x-(-5)) = x + 12$



Exercice 3 *Correction* :

On a d'après l'énoncé $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$ (car $P(1) = 0$). Comme $P(0) = 1$, on obtient aisément

$P(0) = (0-1)(a(0)^2+b(0)+c) = -c = 1 \Leftrightarrow c = -1$ ce qui permet d'écrire que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx-1)$. Ensuite, comme $P(-1) = ((-1)-1)(a(-1)^2 + b(-1) - 1) = (-2)(a-b-1) = -2 \Leftrightarrow a - b = 2$ et $P(2) = ((2)-1)(a(2)^2 + b(2) - 1) = 4a + 2b - 1 = 4 \Leftrightarrow 4a + 2b = 5$, on est amené à résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} a - b = 2 \\ 4a + 2b = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$. Finalement, le polynôme recherché s'écrit :

$$P(x) = (x-1)(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Correction* :

On considère le polynôme

$$P(x) = x^5 + 6x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 51x - 26.$$

1. On a $P(-1) = P(2) = 0$ donc -1 et 2 sont racines de P. On rappelle qu'une racine x_0 d'un polynôme $P(x)$ est d'ordre de multiplicité α ($\alpha \in \mathbb{N}$) si et seulement si $P^{(k)}(x_0) = 0, \forall 0 \leq k \leq n$. On a $P'(x) = P^{(1)}(x) = 5x^4 + 24x^3 + 30x^2 - 40x - 51$ et $P'(-1) = 0$ tandis que $P'(2) \neq 0$. Donc 2 est une racine de multiplicité 1 alors que -1 est une racine de multiplicité au moins égale à 2. Ensuite $P''(x) = P^{(2)}(x) = 20x^3 + 72x^2 + 60x - 40$ et $P''(-1) \neq 0$ donc -1 est une racine de multiplicité 2.
2. $P(x) = (x-(-1))^2(x-2)(ax^2+bx+c) = (x+1)^2(x-2)(ax^2+bx+c) = (x^3-3x-2)(ax^2+bx+c)$. Par identification, on trouve que $P(x) = (x+1)^2(x-2)(x^2+6x+13)$.

Exercice 1 *Correction* :

1. Les points $A(3;0)$ et $B(0;1)$ semblent être sur la droite dont on souhaite déterminer la pente. On a donc $:= \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{1-0}{0-3} = -\frac{1}{3}$.
2. Puisque A et B sont sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, leurs coordonnées vérifient le système $\left\{\begin{array}{l} 0 = 3a + b \\ 1 = 0a + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} \\ b = 1 \end{array}\right.$ Donc $\mathcal{D} : y = -\frac{1}{3}x + 1$ est la courbe représentative de la fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$. On a $f'(x) = -\frac{1}{3}$, on retrouve bien la pente de la question 1.
3. La dérivée d'une fonction affine est égale à la pente de sa représentation graphique qui est une droite.

Exercice 2 *Correction* :

On sait qu'un trinôme du second degré s'écrivant $P(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de "a" à l'extérieur de ses racines et du signe de "$-a$" à l'intérieur.

1. On remarque que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$ (identité remarquable), on en déduit que l'inéquation est toujours vérifiée.
2. Résolvons $-3x^2 + 5x - 2 = 0$. On a $\Delta = (5)^2 - 4(-3)(-2) = 1 > 0$ donc le trinôme précédent admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(5)-\sqrt{1}}{2(-3)} = 1$ et $x_2 = \frac{(-5)+\sqrt{1}}{2(-3)} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, le trinôme est négatif ou nul si $x \in]\frac{2}{3};1[$.
3. $x(2x-5) \geqslant x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 6 \geqslant 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4(2)(6) = 36 - 48 = -12 < 0$. Le trinôme dans ce cas est toujours du signe de $a = 2 > 0$. L'inéquation est donc toujours vérifiée.

Exercice 3 *Correction* :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{3x^2+4x+5})' = (6x+4)e^{3x^2+4x+5}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $((x+3)(x-1)(x+2)^2)' = (x-1)(x+2)^2 + (x+3)(x+2)^2 + 2(x+3)(x-1)(x+2)$,
3. $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 3 \neq 0\}$, $\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 3}\right)' = \dfrac{(2x-1)(x^2-3x+3) - (2x-3)(x^2-x+1)}{(x^2-3x+3)^2}$.

Exercice 4 *Correction* :

1. Un trinôme admet une unique racine (double) si et seulement si $\Delta = (m-1)^2 - 4(4)(1) = m^2 - 2m - 15 = 0$. Le discriminant de cette seconde équation est $\Delta' = (-2)^2 - 4(1)(-15) = 64 = 8^2$. Les valeurs de m pour lesquelles l'équation de départ admet une unique solution sont $m_1 = \frac{-(-2)-8}{2(1)} = -3$ et $m_2 = \frac{-(-2)+8}{2(1)} = 5$.
2. La solution est donnée par $x_0 = -\frac{(m_1-1)}{2(4)} = -\frac{1}{2}$ si on considère l'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ et $x_0 = -\frac{(m_2-1)}{2(4)} = \frac{3}{4}$ si on travaille avec l'équation $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Exercice 5 *Correction* :

1. $P(x) = (x-3)(x+2)(x-4)$ admet comme racines $3, -2, 4$,
2. $P(x) = (x-2)^2(x+3)(x-4)^3$ admet comme racines 2 (multiplicité 2), -3, 4 (multiplicité 3),
3. $P(x) = (x+1)^3(x-4)$ admet comme racines -1 (multiplicité 3), 4,
4. $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)^2$ admet comme racines $1, -1, 3, -2$ (multiplicité 2).

Exercice 1 *Correction* :

1. $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$.
2. La tangente passe par les points $(-2; 5)$ et $(-1; 1)$ donc pente$= \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} = \dfrac{1-5}{-1-(-2)} = \dfrac{-4}{1} = -4$.
3. $T : y = f(-2) + f'(-2)(x - (-2)) = 5 + (-4)(x + 2) = -4x - 3$.
4. Si $T(x) = -4x - 3$, on trouve aisément $T'(x) = -4$.
5. On retrouve la pente de la tangente de deux façons différentes.

Exercice 2 *Correction* :

1. $f'(x) = (-5 + 3x - 2x^3)' = 3 - 6x^2$,
2. $f'(x) = (\sqrt{5x^2 + 3x - 4})' = \dfrac{10x + 3}{2\sqrt{5x^2 + 3x - 4}}$,
3. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 + 3x + 5}{2x + 5}\right)' = \dfrac{(2x + 3)(2x + 5) - 2(x^2 + 3x + 5)}{(2x + 5)^2}$
4. $f'(x) = (e^{2x^2 - 4x + 6})' = (4x - 4)e^{2x^2 - 4x + 6}$
5. $f'(x) = ((5x - 6)^4(3x + 8))' = 20(5x - 6)^3(3x + 8) + 3(5x - 6)^4$

Exercice 3 *Correction* :

Les fonctions désignées par 1. et 3. sont polynomiales. La fonction désignée par 2. ne l'est pas car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. La fonction désignée par 4. n'est pas polynomiale car e^x n'est pas un monôme.

Exercice 4 *Correction* :

P admet un zéro double en x_0 si et seulement si $P(x_0) = P'(x_0) = 0$. Comme $P'(x) = 3x^2 - 3$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + \lambda = 0 \\ 3x_0^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3x_0 - x_0^3 \\ x_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3x_0 - x_0 = 2x_0 \\ x_0^2 = 1 \end{cases}.$$

Finalement, $P(x) = x^3 - 3x + \lambda$ admet un zéro double en x_0 (vérifiant l'équation $x_0^2 = 1$) si et seulement si $\lambda = 2x_0$.
Comme $x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$, on a $(\lambda; x_0) = (2; 1)$ ou $(\lambda; x_0) = (-2; -1)$, $P(x)$ étant factorisable par $(x - 1)^2$. Par division euclidienne, on trouve aisément que

- si $(\lambda; x_0) = (2; 1)$, $P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$
- si $(\lambda; x_0) = (-2; -1)$, $P(x) = x^3 - 3x - 2 = (x - 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$

ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

MATHÉMATIQUES - Colle 6 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

Soient $y_1(x) = 3x^2 + 2$ et $y_2(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 1$.

1. On obtient en utilisant les règles de dérivation usuelles $y_1'(x) = 6x$ et $y_2'(x) = \dfrac{3}{2}x^2$.
2. Les pentes recherchées sont $y_1'(1) = 6$ et $y_2'(1) = \dfrac{3}{2}$.
3. On obtient à l'aide de la définition :
   - $T_1 : y = y_1(1) + y_1'(1)(x-1) = 5 + 6(x-1) = 6x - 1$
   - $T_2 : y = y_2(1) + y_2'(1)(x-1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}(x-1) = \dfrac{3}{2}x - 2$

Exercice 2 *Correction* :

1. On vérifie aisément que $P(2) = 0$ ce qui permet d'écrire que $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$ où a, b, c sont à déterminer. Par division euclidienne, on montre que $P(x) = (x-2)(x^2+x+1)$.
2. Déterminons les racines du trinôme $x^2 + x + 1$. On a $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$ donc le trinôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. Il est du signe de "$a = 1$".
3. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	

4. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
5. On a $\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 16 = 4^2 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2(3)} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2(3)} = 1$ et se factorise de fait sous la forme $P(x) = 3(x + \dfrac{1}{3})(x-1)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de P	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{49}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 *Correction* :

1. Soit $f(x) = 2x - 5$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2h-5)-(-5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 = 2.$
2. Soit $f(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h-3}{h-4} - \frac{-3}{-4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{h-3}{h-4} - \frac{3}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{4(h-3)-3(h-4)}{4(h-4)}}{h}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{4h(h-4)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{4(h-4)} = -\dfrac{1}{16}.$
3. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-\sqrt{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h} \times \left(\dfrac{\sqrt{h+1}+1}{\sqrt{h+1}+1}\right)$
$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h+1)-1}{h(\sqrt{h+1}+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \dfrac{1}{2}.$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Correction* :

1. Comme $(3x+2)(2x-1)+(2x+3)(2x-1)=0 \Leftrightarrow ((3x+2)+(2x+3))(2x-1)=0 \Leftrightarrow (5x+5)(2x-1)=0$, les solutions de l'équation sont $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$.
2. On a $(2x+3)(x-7)-(x-7)(3x-2)=0 \Leftrightarrow (x-7)((2x+3)-(3x-2))=0 \Leftrightarrow (x-7)(5-x)=0$ donc les solutions de l'équation sont $x=7$ et $x=5$.
3. Comme $\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{2}{x-3} \Leftrightarrow (x-3)=-2(x+1) \Leftrightarrow 3x-1=0$, la solution de l'équation est $x=\dfrac{1}{3}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ *Correction* :

Le polynôme $P(x)$ admet un zéro double en x_0 si et seulement si $P(x_0)=P'(x_0)=0$. Comme $P'(x)=3x^2-16x+13-\lambda$, on se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} x_0^3-8x_0^2+(13-\lambda)x_0-6-2\lambda=0 \\ 3x_0^2-16x_0+13-\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3-8x_0^2+(13-\lambda)x_0-6-2\lambda=0 \\ \lambda=3x_0^2-16x_0+13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3-8x_0^2+(13-(3x_0^2-16x_0+13))x_0-6-2(3x_0^2-16x_0+13)=0 \\ \lambda=3x_0^2-16x_0+13 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0^3+2x_0^2+32x_0-32=0 \\ \lambda=3x_0^2-16x_0+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)(-2x_0^2+32)=0 \\ \lambda=3x_0^2-16x_0+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ \lambda=0 \end{cases}.$$

Conclusion, $P(x)$ admet un zéro double en $x_0=1$ si $\lambda=0$.

ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

MATHÉMATIQUES - Colle 7 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable solution du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$
2. La fonction *exp*, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
3. La fonction *exp* est l'unique fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ transformant une somme en produit, c'est-à-dire vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall u, v \in \mathbb{R},\ f(u+v) = f(u)f(v)$ et prenant la valeur e en 1.
4. (facultatif) On peut définir l'application exponentielle exp comme la somme d'une série entière de rayon de convergence infini : $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, où $n!$ est la factorielle de n.

La fonction exponentielle en pratique est utilisée pour modéliser des phénomènes dans lesquels une différence constante sur la variable conduit à un rapport constant sur les images.

Exercice 2 *Correction* :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) = ((x^3+2x)\sqrt{x})' = (3x^2+2)\sqrt{x} + (x^3+2x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{4}\right\},\ f'(x) = \left(-\dfrac{x+1}{4x+7}\right)' = -\left(\dfrac{x+1}{4x+7}\right)' = -\dfrac{1(4x+7)-4(x+1)}{(4x+7)^2} = -\dfrac{3}{(4x+7)^2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^\star$,
$f'(x) = ((x+1)(\sqrt{x}-1)(\dfrac{1}{x}+4))' = 1(\sqrt{x}-1)(\dfrac{1}{x}+4) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)(\dfrac{1}{x}+4) - \dfrac{1}{x^2}(x+1)(\sqrt{x}-1)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^\star - \{1,-1\},\ f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2x}{x^2-1}\right)' = \dfrac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2)(x^2-1) - 2x(\sqrt{x}+2x)}{(x^2-1)^2}$
5. $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}, 2x^4+2x-1>0\},\ f'(x) = (\sqrt{2x^4+2x-1})' = \dfrac{8x^3+2}{2\sqrt{2x^4+2x-1}}$
6. $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{3} \text{ et } x \neq \sqrt{3}\},\ f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3x-1}}{-x^2+3}\right)' = \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}(-x^2+3) - (-2x)(\sqrt{3x-1})}{(-x^2+3)^2}$

Exercice 3 *Correction* :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 6x+6$. On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	-5		1		3
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	38	↘	2	↗	38

2. D'après le tableau de variations précédent, le minimum et le maximum de f sont atteints sur $[-5;3]$ respectivement en $x=1$ et $x=-5$ ou $x=3$.
3. (a) D'après le tableau de variations, $f(x)$ ne peut atteindre -10, l'équation n'admet donc pas de solution (on pourra cependant vérifier par le calcul que $f(x) = -10 \Leftrightarrow 3x^2+6x-7 = -10 \Leftrightarrow 3x^2+6x+3 = 3(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$).

(b) D'après le tableau, l'équation $f(x) = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0$ admet deux solutions distinctes. Comme $\Delta = (6)^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(6) - \sqrt{18^2}}{2(3)} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-(6) + \sqrt{18^2}}{2(3)} = 2$.

(c) $f(x) < 17 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 24 < 0$. Comme le trinôme est du signe de "$-a$"$= -3 < 0$ à l'intérieur des racines, l'inéquation est vérifiée si et seulement si $x \in]-4; 2[$.

(d) D'après le tableau, l'inégalité $f(x) > -20$ est toujours vérifiée dans $[-5; 3]$ (et même dans $\mathbb{R}$). On peut le vérifier par le calcul : comme $f(x) = 3x^2 + 6x - 7 > -20 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 13 > 0$ et que $\Delta = (6)^2 - 4(3)(13) = -120 > 0$, le trinôme est toujours du signe de "a"$= 3 > 0$ et l'inégalité est toujours vérifiée.

Exercice 4 *Correction* :

1. $\log(x^2) - \log(xy) + 4\log y = 2\log x - (\log x + \log y) + 4\log y = \log x + 3\log y$
2. $\ln(8x)^{\frac{1}{2}} + \ln(4x^2) - \ln(16x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(2^2 \times 2x) + \ln((2x)^2) - \frac{1}{2}\ln(2^3 \times 2x) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2x) + 2\ln(2x) - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2x) = -\frac{1}{2}\ln 2 + 2\ln(2x)$
3. $e^6 e^{-6} = e^{6+(-6)} = e^{6-6} = e^0 = 1$
4. $12e^7 \div 6e^2 = \frac{12}{6}e^{7-2} = 2e^5$
5. $\ln e^2 = 2\ln e = 2 \times 1 = 2$
6. $\ln(e^2 \ln e^3) = \ln(e^2 \times 3\ln e) = \ln(3e^2) = \ln 3 + \ln(e^2) = \ln 3 + 2\ln e = \ln 3 + 2$

ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

MATHÉMATIQUES - Colle 8 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. $4^x = 16^{2x-2} \Leftrightarrow 4^x = (4^2)^{2x-2} = 4^{2(2x-2)} \Leftrightarrow x = 2(2x-2) = 4x-4 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$
2. $2^{x^3} = 0.25 = \dfrac{1}{4} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$
3. $3^{2x} - 6 \times 3^x - 27 = 0$. Si on pose $y = 3^x$, l'équation s'écrit : $y^2 - 6y - 27 = 0$. On a alors $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-27) = 144 = 12^2 > 0$ et le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $y_1 = \dfrac{-(-6)-\sqrt{12^2}}{2(1)} = -3$ et $y_2 = \dfrac{-(-6)+\sqrt{12^2}}{2(1)} = 9$. On rejette la racine $y_1 < 0$. Conclusion, puisque $y_1 = 9 = 3^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = 2$, l'équation initiale admet une unique solution qui est $x_1 = 2$.

Exercice 2 *Correction* : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^3$.

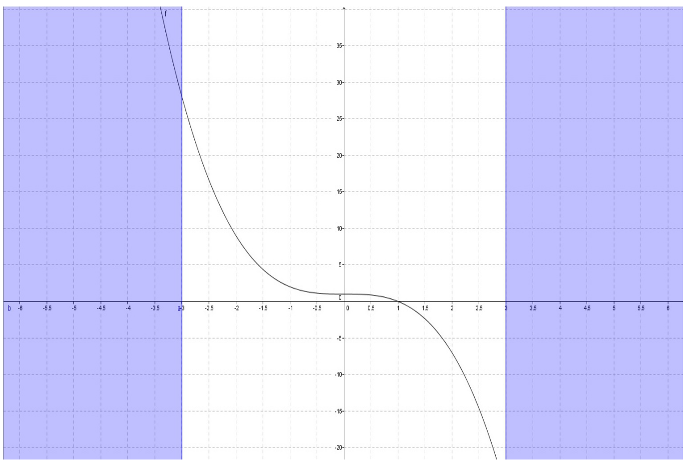
1. On obtient aisément $f(2) = 1 - 2^3 = -7$ et $f(-2) = 1 - (-2)^3 = 9$.
2. On résout dans un premier temps $f(x) = 1 - x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. On résout ensuite $f(x) = 1 - x^3 = -1 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.
3. $f(x)$ s'annulant pour $x = 1$, on peut écrire que $f(x) = 1 - x^3 = (x-1)(ax^2+bx+c)$ où a, b, c sont à déterminer. Par division euclidienne, on trouve que $f(x) = (x-1)(-x^2-x-1) = (1-x)(x^2+x+1)$.
4. À l'aide de l'énoncé, on peut affirmer que le signe de $f(x)$ dépend de celui de $x-1$. On déduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x^2+x+1			$+$		
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

5. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 < 0$. On en déduit le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

6. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in [-1;3]$, $f(3) \leq f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow -8 \leq f(x) \leq 2$.
7.



Exercice 3 *Correction* :

1. Le polynôme recherché est de degré 2. ($x^3 - 17x^2 + 54x - 8 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.)
2. Le polynôme recherché est de degré 1. Le coefficient de x est 3. ($3x^2 + 13x + 4 = (x+4)(3x+b)$.)
3. Le coefficient de x est 2. ($2x^2 + 5x + 2 = (x+2)(2x+b)$.)
4. Le produit de deux polynômes de degré 2 est nécessairement de degré 4.

Exercice 4 *Correction* :

1. Réponse (a) : si $a \in]0;1[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
2. Réponse (c) : $\forall x \in]0;+\infty[$, $(x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
3. Réponse (a) : $e^{-2\ln 5} = e^{\ln 5^{-2}} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$.

Exercice 1 *Correction* :

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$
2. $x^3 - 7x - 6 = (x+2)(x^2 - 2x - 3)$
3. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = (x+1)(2x^2 + 5x + 2)$
4. $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = (x+4)(3x^2 - 5x - 2)$

Exercice 2 *Correction* :

1. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x + 2 \geq 0\} = [-2; +\infty[$.
2. On obtient par évaluation $f(7) = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ et $f(\frac{1}{3}) = \sqrt{\frac{1}{3} + 2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.
3. On résout dans un premier temps $f(x) = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -3$. Une racine carrée étant un nombre positif, la première équation d'admet pas de solution. On résout ensuite l'équation $f(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 5 = \sqrt{25}$. La fonction "racine carrée" étant injective (c'est-à-dire que $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$), $f(x) = 5 \Rightarrow x + 2 = 25 \Leftrightarrow x = 23$.
4. La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, (on a $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} > 0$), $\frac{1}{4} \leq x \leq 7 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) \leq f(x) \leq f(7) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 3$ de $[\frac{1}{4}; 7]$
5. Une méthode parmi d'autres consiste à déterminer le signe de $f(x) - \sqrt{x}$. Comme $f(x) - \sqrt{x} = \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})\dfrac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} = \dfrac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} > 0$ (utilisation de l'expression conjuguée), on en déduit que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, se situe au-desssus de celle de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3 *Correction* :

1. Soit f définie par $f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x + 2$. Comme $f(-2) = 0$, $x = -2$ est une racine de $f(x)$ qui est donc factorisable par $(x+2)$. On trouve aisément que $f(x) = (x+2)(x^2 + 5x + 1)$. Le trinôme $x^2 + 5x + 1$ admet pour discriminant $\Delta = 21 > 0$ et, consécutivement, pour racines distinctes $x_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$. Finalement, $f(x) = (x+2)(x - x_1)(x - x_2)$.
2. Soit g définie par $g(x) = 2x^3 + 11x^2 - 2x - 35$. Comme $g(-5) = 0$, $x = -5$ est une racine de $g(x)$ qui est donc factorisable par $(x+5)$. On trouve alors que $g(x) = (x+5)(2x^2 + x - 7)$. Le trinôme $2x^2 + x - 7$ admet pour discriminant $\Delta = 57 > 0$ et, consécutivement, pour racines distinctes $x_1 = \frac{-1-\sqrt{57}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{57}}{4}$. Finalement, $g(x) = 2(x+5)(x - x_1)(x - x_2)$.
3. Soit $h(x) = x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 8x + 4$. On vérifie aisément que $h(1) = h(2) = 0$, ce qui permet d'affirmer que $(x-1)$ et $(x-2)$ sont des facteurs de $h(x)$. On obtient $h(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + 7x + 2)$. Le trinôme $x^2 + 7x + 2$ admet pour discriminant $\Delta = 41 > 0$ et, consécutivement, pour racines distinctes $x_1 = \frac{-7-\sqrt{41}}{2}$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{41}}{2}$. Finalement, $h(x) = (x-1)(x-2)(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice 4 *Correction* :

1. Réponse (b). En effet, on a $e^x = \dfrac{16}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = 16 \Leftrightarrow 2x = \ln 16 = \ln 4^2 = 2\ln 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$.
2. Réponse (b). On a $x\ln(0,2) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x\ln(0,2) \geq 5 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{\ln(0,2)}$ (l'inégalité a changé de sens car $\ln(0,2) < 0$). Par conséquent, $x\ln(0,2) - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \dfrac{5}{\ln(0,2)}\right]$
3. Réponse (c). On a $x^3 + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$ donc $\ln(x^3 + 1) = \ln((x-1)(x^2 + x - 1)) = \ln(x-1) + \ln(x^2 + x - 1)$.

Exercice 1 *Correction* :

1. $\ln 14 - \ln 7 = \ln(2 \times 7) - \ln 7 = \ln 2 + \ln 7 - \ln 7 = \ln 2$
2. $\ln \frac{5}{2} + \ln \frac{2}{5} = \ln \frac{5}{2} + \ln(\frac{5}{2})^{-1} = \ln \frac{5}{2} - \ln \frac{5}{2} = 0$
3. $\frac{\ln 100}{\ln 10} = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = 2\frac{\ln 10}{\ln 10} = 2$
4. $\ln 8 - \ln 12 + \ln 15 = \ln \frac{8 \times 15}{12} = \ln 10$
5. $\ln 10000 + \ln 0,01 = \ln 10^4 + \ln 10^{-2} = 4\ln 10 - 2\ln 10 = 2\ln 10$
6. $\ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}) = \ln((3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})) = \ln(3^2 - (2\sqrt{2})^2) = \ln(9 - 8) = \ln 1 = 0$

Exercice 2 *Correction* :

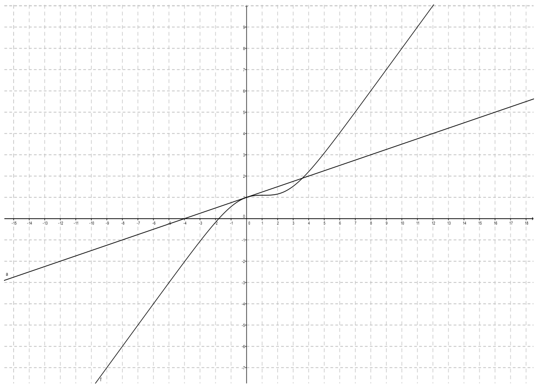
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ y' = ((x+2)^3(x - \frac{1}{2})^2)' = 3(x+2)^2(x - \frac{1}{2})^2 + 2(x+2)^3(x - \frac{1}{2})$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ y' = \left(\frac{x^2 + 3x - 7}{x^4 + x^2 + 1}\right)' = \frac{(2x+3)(x^4 + x^2 + 1) - (4x^3 + 2x)(x^2 + 3x - 7)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3;3\},\ y' = \left(\frac{7}{(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}}}\right)' = (7(x^2-9)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{7}{2}(2x)(x^2 - 9)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{7x}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}$
4. On a $y = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x}} = \sqrt{x + \frac{2}{x}}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ y' = \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2\sqrt{x + \frac{2}{x}}}$.

Exercice 3 *Correction* :

1. On a
   - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}) = -\infty$ car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$.
   - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 4$.
2. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}\right)' = 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - 4e^x(e^x)}{(e^x + 3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x + 3)^2}$.
   On peut écrire ensuite que
   $$f'(x) = 1 - \frac{12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x + 3)^2 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 = (\varphi(x))^2.$$
   (b) Comme $f'(x) \geq 0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3. l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 admet pour équation :
   $$T : y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{4}(x - 0) = \frac{1}{4}x + 1.$$
   On donne pour compléter la colle les différents graphes associés :

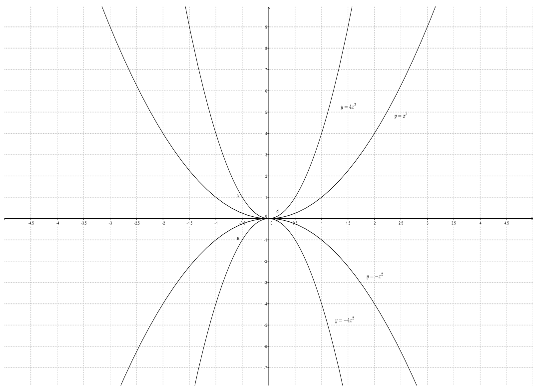


Exercice 4 *Correction* :

1. Une fonction polynomiale est une fonction de la forme suivante :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{1}$$

2. les fonctions décrites par (a), (c) et (f) sont des polynômes car elles s'écrivent sous la forme (1). La fonction décrite par (b) n'est pas polynomiale car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. (d) ne décrit pas un polynôme car la fonction sinus ne peut s'écrire sous la forme (1). Enfin, (e) ne décrit pas un polynôme car $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.
3. (a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x$ (c) $f(x) = x^4$ (d) $f(x) = x^2$
4.



Exercice 1 *Correction* :

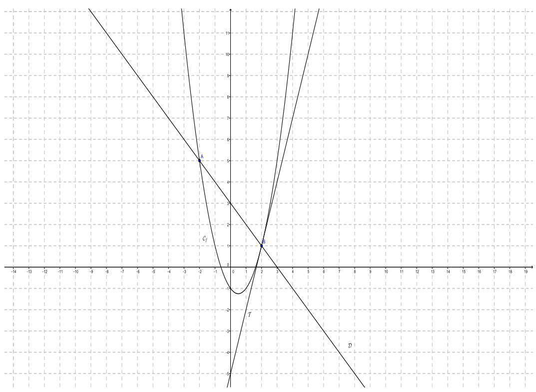
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (4x^2 - 3x + 1)' = 8x - 3$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = ((2x+3)(3x-7))' = 2(3x-7) + 3(2x+3) = 12x - 5$
3. $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\},\ h'(x) = \left(\dfrac{2x+4}{3x-1}\right)' = \dfrac{2(3x-1) - 3(2x+4)}{(3x-1)^2} = \dfrac{-14}{(3x-1)^2}$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = ((2x^2+3x+1)^5)' = 5(4x+3)(2x^2+3x+1)$

Exercice 2 *Correction* :

1. $\log x^2 - \log xy + 4\log y = 2\log x - (\log x + \log y) + 4\log y = \log x + 3\log y$
2. $\ln(8x)^{\frac{1}{2}} + \ln(4x^2) - \ln(16x)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln(2^3 \times x) + (\ln(2^2) + \ln x^2) - \dfrac{1}{2}\ln(2^4 \times x) = \dfrac{3}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln x + 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln x = 2\ln x + \dfrac{3}{2}\ln 2$
3. $e^6 e^{-6} = e^{6+(-6)} e^{6-6} = e^0 = 1$
4. $12e^7 \div 6e^2 = 2e^{7-2} = 2e^5$
5. $\ln e^2 = 2\ln e = 2$
6. $\ln(e^2 \ln e^3) = \ln(e^2 \times 3\ln e) = \ln(3e^2) = \ln 3 + \ln e^2 = \ln 3 + 2\ln e = \ln 3 + 2$

Exercice 3 *Correction* :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 1.$
2. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$ est donnée par :
$$T : y = f(2) + f'(2)(x-2) = 1 + 3(x-2) = 3x - 5.$$
3. Comme $g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$, l'équation $f(x) = g(x)$ admet pour solutions $x = 2$ et $x = -2$.
4. Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ s'obtiennent lorsque $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire aux points $A(-2, f(-2) = g(-2)) = A(-2, 5)$ et $B(2, f(2) = g(2)) = B(2, 1)$.
5.



Exercice 4 *Correction* :

1. On trouve aisément que le volume de la boîte est donné par $V(x) = x(20-2x)(20-2x) = x(20-2x)^2$.
2. Si $x = 4$ (inches), on trouve un volume $V(4) = 4(20-4)^2 = 1024$ inches ^{2}.

Exercice 1 *Correction* :

1. On a $2x^2-5x=12 \Leftrightarrow 2x^2-5x-12=0$. Le discriminant associé au trinôme est égal à $\Delta=(-5)^2-4(2)(-12)=121=11^2>0$. L'équation admet donc deux racines distinctes $x_1=\dfrac{-(-5)-\sqrt{11^2}}{2(2)}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-5)+\sqrt{11^2}}{2(2)}=4$.
2. Comme $9x(4x+2)-10x=8x+25 \Leftrightarrow 36x^2-25=0 \Leftrightarrow (6x-5)(6x+5)=0$, l'équation admet deux racines disctinctes qui sont $x_1=\dfrac{5}{6}$ et $x_2=-\dfrac{5}{6}$.
3. Puisque $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x=0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}\right)=0$, on en déduit que l'équation admet deux racines distinctes $x_1=0$ et $x_2=-\dfrac{4}{3}$.
4. On a tout simplement $2x(x+5)+3=2x^2-5x+1 \Leftrightarrow 15x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{15}$.

Exercice 2 *Correction* :
La surface du cadre seul est la différence entre la surface du cadre incluant la photo et celle de la photo. L'expression recherchée est :

$$\mathcal{A}=(8+2x)(10+2x)-8\times 10=4x^2+36x=4x(x+9).$$

Exercice 3 *Correction* :
Question préliminaire : on remarque que 1 est une racine de P donc $P(x)=(x-1)(ax+b)$. Par identification, on trouve facilement que $P(x)=(x-1)(x+3)$.

1. On rappelle qu'
   – une fonction est paire si et seulement si $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $-x\in\mathcal{D}_f$ et $f(-x)=f(x)$ (la courbe représentative de f sera alors symétrique par rapport à l'axe des abscisses),
   – une fonction est impaire si et seulement si $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $-x\in\mathcal{D}_f$ et $f(-x)=-f(x)$ (la courbe représentative de f sera alors symétrique par rapport à l'origine)
   - Comme $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=-2(-x)^2+1=-2x^2+1=f(x)$ et on en déduit que f est paire.
   - Comme $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $g(-x)=(-x)^3-3(-x)+1=-x^3+3x+1$ et on en déduit que g n'est ni paire ni impaire.
2. - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+1=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$
3. - $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-4x$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

   - $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

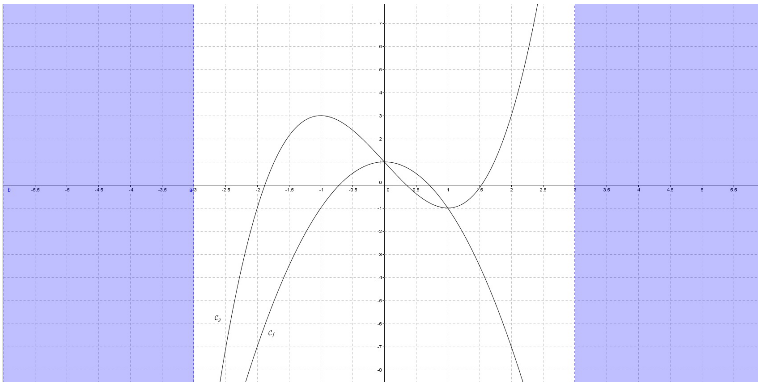
4. On déduit des tableaux précédents les variations de f et g.
   -

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

   -

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
variations de g			3				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-1		

5. On a les représentations graphiques suivantes :



6. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow -2x^2+1 \leq x^3-3x+1 \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x+3) \geq 0$ d'après la question préliminaire. On a alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x(x-1)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4 *Correction* :

1. $\log_4 x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln 4} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\ln 4 = \ln 4^2 = \ln 16 \Leftrightarrow x = 16$
2. $\log_{\frac{1}{3}} x = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4\ln\dfrac{1}{3} = \ln\dfrac{1}{3^4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{81}$
3. $\log_{10}(2x+1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(2x+1)}{\ln 10} = 2 \Leftrightarrow \ln(2x+1) = 2\ln 10 = \ln 10^2 \Leftrightarrow 2x+1 = 100 \Leftrightarrow x = \dfrac{99}{2}$
4. $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 = x$
5. $\log_b 81 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 81}{\ln b} = 4 \Leftrightarrow \ln 81 = \ln 3^4 = 4\ln b = \ln b^4 \Leftrightarrow b = 3.$

Exercice 1 *Correction* :

1. Comme
$$f(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}\right) = 1,$$
la fonction f est donc bien constante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) $e^{2x} \times e^{1-2x} = e^{2x+1-2x} = e^1 = e$
   (b) $\frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} = e^{2x+3-(x-1)} = e^{x+4}$
   (c) $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x} + 2$
   (d) $e^{-2x} - \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} = \frac{e^{-2x}e^{2x} - e^{2x} - 1}{e^{2x}} = -1$

Exercice 2 *Correction* :

1. • $AC = \frac{TC}{Q} = \frac{120}{Q} + 45 - Q + 0.4Q^2$,
   • $FC = 120$,
   • $VC = 45Q - Q^2 + 0.4Q^3$,
   • $AVC = \frac{VC}{Q} = 45 - Q + 0.4Q^2$,
   • $AFC = \frac{120}{Q}$.
2. On a les quelques valeurs suivantes :

Q	0	0.3	1	3	5	8	10	12	15
TC	120	133	164	257	370	621	870	1207	1920
AC	–	445	164	86	74	78	87	101	128
AFC	–	400	120	40	24	15	12	10	8

3.

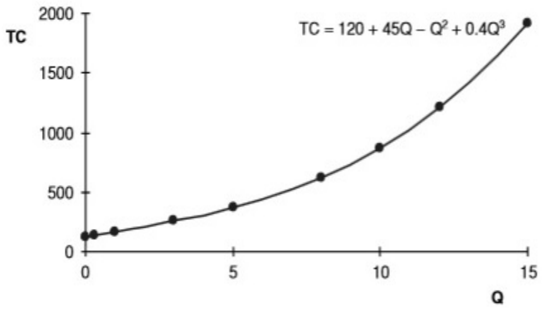
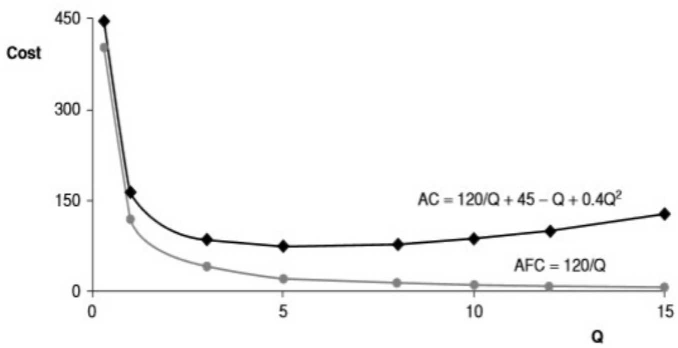


Figure 1.10



Exercice 3 *Correction* :

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2 = 2(x-1)$.
   (b) On a $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
   (c) On déduit du tableau précdent les variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$

   Le minimum de f est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) = 2$.

2. (a) Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est donnée par :
$$T : y = f(2) + f'(2)(x-2) = 3 + 2(x-2) = 2x - 1.$$
   (b) L'erreur absolue commise si on utilise cette approximation affine de f pour $x = 1,8$ est égale à $ea = |2,6 - 2,64| = 0,04 = 4 \times 10^{-2}$.
   (c) L'erreur relative correspondante est égale à $er = \dfrac{|2,6 - 2,64|}{2,64} = 0,0151 = 1,51\%$ à 10^{-4} près par défaut.

Exercice 4 *Correction* :

1. $100 = 50e^{-x} \Leftrightarrow 2 = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$
2. $\dfrac{1}{4} = 5^{2t-1} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln 4 = (2t-1)\ln 5 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\ln 4}{\ln 5}\right)$
3. $\ln(2x+5) = 0$. Cette équation ne peut être résolue car $\forall y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln y \neq 0$.
4. $\log_x 6 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 6}{\ln x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\ln 6 = \ln 6^3 = \ln x \Leftrightarrow x = 6^3 = 216$

Exercice 1 *Correction* :

1. $20 = e^{x-3} \Leftrightarrow x - 3 = \ln 20 \Leftrightarrow x = 3 + \ln 20 = 6,00$ à 10^{-2} près par excès.
2. $-4 = e^x - 9 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 = 1,61$ à 10^{-2} près par excès.
3. $23 = 0.9^x + 9 \Leftrightarrow 0,9^x = 14 \Leftrightarrow x \ln 0,9 = \ln 14 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 14}{\ln 0,9} = -25,05$ à 10^{-2} près par excès.
4. $10 = e^x + 7 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 = 1,10$ à 10^{-2} près par excès.

Exercice 2 *Correction* :

1. On a
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \simeq \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2} \simeq \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2}{(x+1)^2} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2} \simeq \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2}{(x+1)^2} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \simeq \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

   On déduit des 2e et 3e limites que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.
2. On rappelle que
   – La droite Δ d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
   – La droite Δ d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

   Comme
   $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2} - (x+1)\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+5x+5-(x+1)^3}{(x+1)^2}$$
   $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+4}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x(1+\frac{2}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x})^2} \simeq \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0,$$
   la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ de f.
3. Étudions le signe de $f(x) - (x+1)$: d'après la question précédente, $f(x) - (x+1) = \dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$ donc le signe de $f(x) - (x+1)$ dépend de celui du numérateur $2x + 4$ car $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $(x+1)^2 > 0$.
   On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
signe de $f(x) - (x+1)$		$-$	0	$+$	||	$+$	

   Par conséquent, $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$ si $x \in]-2;-1[\cup]-1;+\infty[$ et en dessous sinon.
4. $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x) = \left(\dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}\right)' = \dfrac{(3x^2+6x+5)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+3x^2+5x+5)}{(x+1)^4}$
   $$= \frac{x^4+4x^3+4x^2-4x-5}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}.$$
5. Comme $x^2 + 4x + 5 > 0$ $(\Delta = -4 < 0)$, on a le tableau de signes suivant :

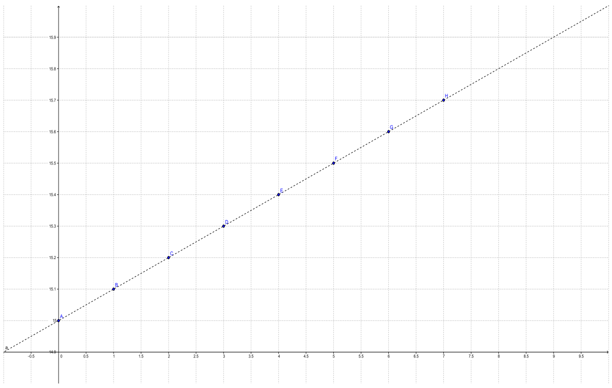
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x^2+4x+5		$+$		$+$		$+$	
signe de $(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

6. On déduit de la question précédente le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		$\parallel$		$\frac{7}{2}$		

Exercice 3 *Correction* :

1.



2. On trouve facilement que $y = 0,1x + 15$.
3. Soit C_M le coût moyen. On alors $C_M(x) = 0,1 + \dfrac{15}{x}$. Lorsqu'un petit nombre d'unités est utilisé, le coût moyen s'apparente au coût marginal.

Exercice 4 *Correction* :

1. (a) $A = \ln 8 = \ln(2^3) = 3\ln 2$
   (b) $B = \dfrac{1}{\ln 16} = \dfrac{1}{\ln(2^4)} = \dfrac{1}{4\ln 2}$
   (c) $C = \dfrac{1}{2}\ln 16 = \dfrac{1}{2}\ln(2^4) = 2\ln 2$
   (d) $D = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\ln(2^{-2}) = -\ln 2$
2. (a) $a = \ln 24 = \ln(2^3 \times 3) = 3\ln 2 + \ln 3$
   (b) $b = \ln 144 = \ln(2^4 \times 3^2) = 4\ln 2 + 2\ln 3$
   (c) $c = \ln\dfrac{8}{9} = \ln\dfrac{2^3}{3^2} = \ln(2^3 \times 3^{-2}) = 3\ln 2 - 2\ln 3$

Exercice 1 *Correction* :

1. Quand $Q = 0$, $TC = 200$ donc les coûts fixes sont égaux à 200, soit 200000\$.
2. Les coûts variables sont égaux à $VC = 55(100) = 550$, soit 5500000\$.
   Les coûts variables moyens sont égaux dans ce cas à $TVC = \dfrac{5500}{100} = 55$, soit 55000\$.
3. Avec des coûts variables moyens constants, les coût marginaux sont égaux à 55, soit 55000\$.
4. À $Q = 100$, les coûts fixes moyens sont égaux à $TFC = \dfrac{200}{100} = 2$, soit 2000\$.

Exercice 2 *Correction* :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = (-7x^2 + 5\sqrt{x})' = -14x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = ((x^2-3)\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + (x^2-3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^\star - \{-1\}$, $f(x) = \left(\dfrac{2}{x^2+x}\right)' = -\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$
4. $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)' = \dfrac{1(x-3) - 1(x+1)}{(x-3)^2} = -\dfrac{4}{(x-3)^2}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{2x^2+3}\right)' = \dfrac{1(2x^2+3) - (4x)(x+1)}{(2x^2+3)^2} = \dfrac{-2x^2-4x+3}{(2x^2+3)^2}$
6. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

Exercice 3 *Correction* :

1. $e^{x+1} - e^x = 1 \Leftrightarrow e^1e^x - e^x = e^x(e-1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1}{e-1}\right) = -\ln(e-1)$
2. $2^{x+2} - 6 \times 2^{x+1} = -64 \Leftrightarrow 4 \times 2^x - 12 \times 2^x = -64 \Leftrightarrow -8 \times 2^x = -64 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$
3. $4^{x+2} = (4e)^x \Leftrightarrow 16 \times 4^x = (4e)^x \Leftrightarrow 16 = \left(\dfrac{4e}{4}\right)^x = e^x \Leftrightarrow x = \ln 16 = 4\ln 2$
4. On pose $y = e^x$ alors $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$. Comme $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 = 4^2$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $y_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{4^2}}{2(1)} = -1$ et $y_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{4^2}}{2(1)} = 3$.
   Comme l'équation $-1 = e^x$ n'admet pas de solution, l'équation de l'énoncé admet une unique solution vérifiant l'égalité $e^x = 3$ c'est-à-dire $x = \ln 3$.

Exercice 4 *Correction* :

1. On résout l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$. Comme $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 = 3^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{3^2}}{2(2)} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{3^2}}{2(2)} = 1$.
   La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
2. • $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x-1}{x^2+x} \simeq \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^2+x} = +\infty$
   • $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+x-1}{x^2+x} \simeq \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2+x} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2(1+\frac{x}{2x^2}-\frac{1}{2x^2})}{x^2(1+\frac{x}{x^2})} \simeq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

  La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote (verticale) en $x=0$.

3. f est dérivable sur sur $\mathcal{D}_f = [-\frac{1}{2};0[\cup]0;+\infty[$ (car dérivable sur $\mathbb{R}^\star - \{-1\}$), en tant que rapport de fonctions dont le dénominateur s'annule en $x=0$ (et $x=-1$). On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(\frac{(4x+1)(x^2+x)-(2x+1)(2x^2+x-1)}{(x^2+x)^2}\right)' = \frac{x^2+2x+1}{(x^2+x)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x(x+1))^2} = \frac{1}{x^2}$$

4. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	

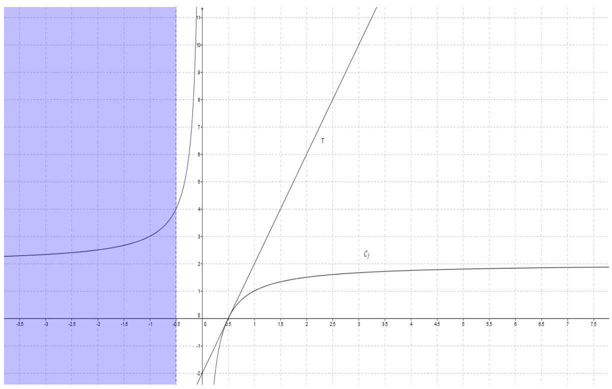
5. On déduit de la question précédente le tableau de variations de f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
variations de f	4	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2

6. Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est donné par :

$$T : y = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = 0 + 4(x-\frac{1}{2}) = 4x-2.$$

   On a le graphe suivant :



ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

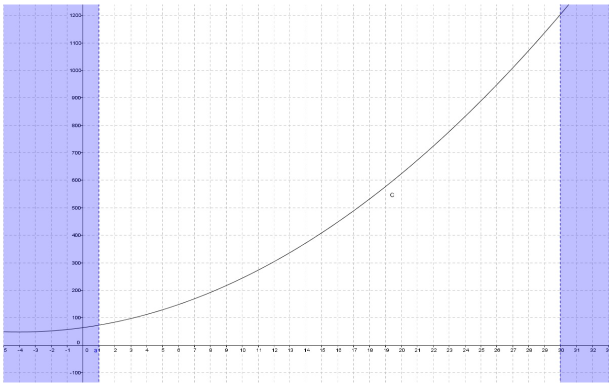
MATHÉMATIQUES - Colle 16 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. $\forall q \in [1;30]$, $C'(q) = (q^2+8q+64)' = 2q+8 = 2(q+4) > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

q	1	30
signe de $C'(q)$	$+$	
variations de C	$73 \nearrow$	1204

On a le graphique suivant :



2. Le coût total est minimal pour $q = 1$ (soit 100 unités produites) et maximal pour $q = 30$ (soit 3000 unités produites).
3. On résout l'équation $C(q) = 624 \Leftrightarrow q^2+8q+64 = 624 \Leftrightarrow q^2+8q-560 = 0$. Comme $\Delta = (8)^2 - 4(1)(-560) = 2304 = 48^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(8)-\sqrt{48^2}}{2(1)} = -28 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-(8)+\sqrt{48^2}}{2(1)} = 20$. Par conséquent, il faut produire 2000 unités pour que le coût associé soit égal à 624K€.
4. On a $\forall q \in [1;30]$, $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{q^2+8q+64}{q} = q+8+\dfrac{64}{q}$.
5. $\forall q \in [1;30]$, $C'_M(q) = 1-\dfrac{64}{q^2} = 1-\left(\dfrac{8}{q}\right)^2 = \left(1-\dfrac{8}{q}\right)\left(1+\dfrac{8}{q}\right)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

q	1		8		30
signe de $C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
variations de C_M	73	$\searrow$	24	$\nearrow$	$\frac{602}{15}$

6. Le coût moyen minimal est obtenu pour $q = 8$ et vaut $C_M(8) = 24$ (K€).
7. On résout $C_M(q) \leqslant 28 \Leftrightarrow q+8+\dfrac{64}{q} \leqslant 28 \Leftrightarrow q+\dfrac{64}{q}-20 \leqslant 0 \Leftrightarrow q^2-20q+64 \leqslant 0$ car $q > 0$. Comme $\Delta = (-20)^2 - 4(1)(64) = 144 = 12^2$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-20)-\sqrt{12^2}}{2(1)} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-(-20)+\sqrt{12^2}}{2(1)} = 16$$

et est négatif ou nul à l'intérieur des racines c'est-à-dire dans l'intervalle $[4;16]$.
Conclusion, $C_M(q) \leqslant 28 \Leftrightarrow 4 \leqslant q \leqslant 16$.

Exercice 2 *Correction* :

1. $\log_6 216 = \log_6(6^3) = 3\log_6 6 = 3$
   $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \dfrac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2^2}{\ln 2^{-1}} = \dfrac{2\ln 2}{-\ln 2} = -2$
2. $2^{x-1} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{3x} = \left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{3x} = \dfrac{1}{2^{9x}} \Leftrightarrow 2^{10x-1} = 1 \Leftrightarrow 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{10}$
3. $\log_3 7 + \log_3 2 - 2\log_3 5 = \log_3 7 + \log_3 2 - \log_3 5^2 = \log_3\left(\dfrac{7\times 2}{5^2}\right) = \log_3 \dfrac{14}{25}$.
4. $2^{3x+1} = 5^{x+6} \Leftrightarrow \ln 2^{3x+1} = \ln 5^{x+6} \Leftrightarrow (3x+1)\ln 2 = (x+6)\ln 5 \Leftrightarrow x(3\ln 2 - \ln 5) = 6\ln 5 - \ln 2$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{6\ln 5 - \ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$.

Exercice 3 *Correction* :

1. $v(t) = s'(t) = (4t^5)' = 20t^4$
2. On a $v(1) = 20$, $v(2) = 320$ et $v(-4,7) = 9759,362$ (l'unité étant ici le “miles per hour”).
3. $a(t) = v'(t) = (20t^4)' = 80t^3$
4. On a $a(1) = 80$, $a(2) = 640$ et $a(-4,7) = -8305,84$ (l'unité ici étant le ”miles per hour square”).

Exercice 4 *Correction* :

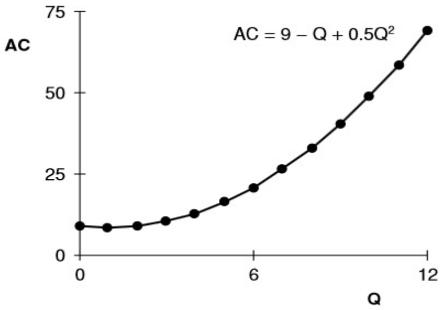
La fonction bénéfice est définie par :

$$B(Q) = P(Q)Q - TC(Q) = (240 - 20Q)Q - (120 + 45Q - Q^2 + 0,4Q^3) = -0,4Q^3 - 19Q^2 + 195Q - 120.$$

Exercice 1 *Correction* :

1. On a les valeurs et le graphique suivant :

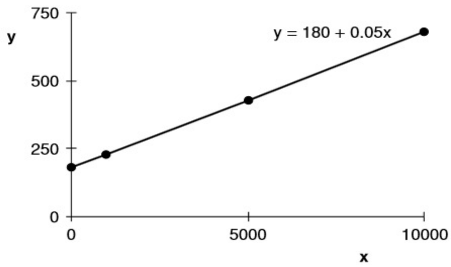
Q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
AC	9	8.5	9	10.5	13	16.5	21	26.5	33	40.5	49	58.5	69



2. On a les valeurs et le graphique suivant :

$y = 180 + 0.05x$

x	0	1000	5000	10,000
y	180	230	430	680



Exercice 2 *Correction* :

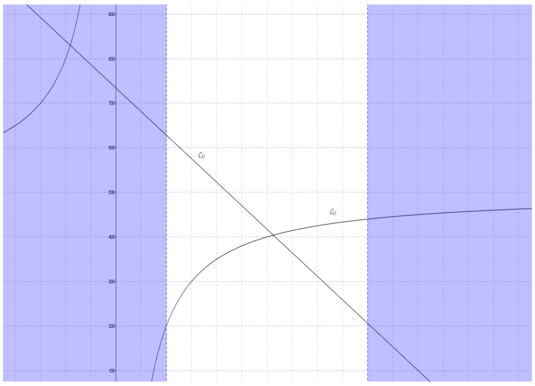
1. • $\forall x \in [2;10]$, $D'(x) = (-52,8x + 734)' = -52,8$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	2	10
signe de $D'(x)$	$-$	
variations de D	$628,4$ ↘	206

• $\forall x \in [2;10]$, $O'(x) = \left(-\dfrac{600}{x} + 500\right)' = \dfrac{600}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	2	10
signe de $O'(x)$	$+$	
variations de O	200 ↗	440

On a les graphiques suivants :



2. On lit sur le graphique un prix d'équilibre approximativement égal à 6,3. Par le calcul, on cherche à résoudre l'équation $D(x) = O(x)$. Puisque $x \neq 0$, on a

$$D(x) = O(x) \Leftrightarrow -52,8x+734 = -\frac{600}{x}+500 \Leftrightarrow -52,8x+234+\frac{600}{x} = 0 \Leftrightarrow -52,8x^2+234x+600 = 0.$$

Comme $\Delta = (234)^2-4(-52,8)(600) = 181476 = 426^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-(234)-\sqrt{426^2}}{2(-52,8)} = 6,25$ et $x_2 = \dfrac{-(234)+\sqrt{426^2}}{2(-52,8)} \simeq -1,82 < 0$. On en déduit que le prix d'équilibre est égal à $x = 6,25$.

Exercice 3 *Correction* :

1. OUI. La fonction f étant polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. OUI. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-10;0]$, en tant que fonction polynomiale.
3. OUI. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-10;0]$, en tant que fonction polynomiale.
4. OUI. On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{i(x+h)-i(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4x^2h^3+h^4}{h} = \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4x^2h^2+h^3) = 4x^3.$$

Exercice 4 *Correction* :

1. $\forall x \in [0,5;8]$,

$$f'(x) = (20(x-1)e^{-0,5x})' = 20(e^{-0,5x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{-0,5x}) = 20(1-\frac{1}{2}(x-1))e^{-0.5x})$$
$$= 10(2-(x-1))e^{-0,5x} = 10(-x+3)e^{-0,5x}.$$

2. L'expression de $f'(x)$ trouvée à la question précédente nous permet de dresser le tableau de variations suivant :

x	$0,5$		3		8
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-10e^{-0,25} \simeq -7,78$	$\nearrow$	$40e^{-1,5} \simeq 8,93$	$\searrow$	$180e^{-4} \simeq 3,30$

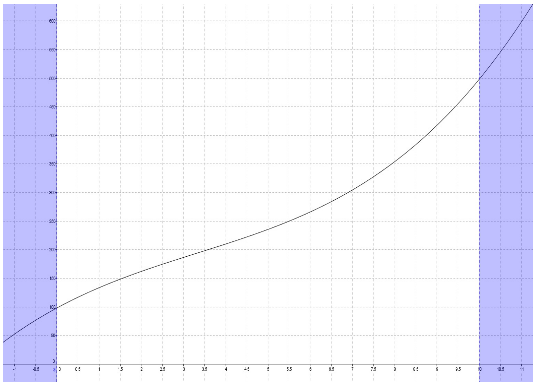
3. On calcule $f(2,20) = 20(2,20-1)e^{-0,5\times 2,20} = 7,989$. Conclusion, si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise bien ce mois-là un bénéfice de 7989 euros.

Exercice 1 *Correction* : Une entreprise fabrique de la soupe. Le coût total, exprimé en euros, est donné par la fonction C_T :

$$C_T(q) = 0,5q^3 - 5q^2 + 40q + 98,$$

où q est la quantité exprimée en hectolitres. L'entreprise peut produire entre 0 et 10 hl de soupe dans la journée.

1. Les coûts fixes sont ceux que l'entreprise supporte même si la production est nulle. Nous avons $C_T(0) = 98$. Donc, les coûts fixes sont de 98 euros.
   Le coût total qui correspond à la production maximale est donné par $C_T(10) = (0,5 \times 10^3) - (5 \times 10^2) + (40 \times 10) + 98 = 498$. Il coûte 498 euros de produire 10 hl de soupe. Ci-dessous, la courbe représentative de f, réalisée sur GeoGebra.



   Nous remarquons que la fonction C_T est strictement croissante sur son domaine de définition, ce qui est logique dans la mesure où les coûts s'accroissent avec la production. La configuration de la courbe est typique d'une évolution de coûts en milieu industriel : on remarque l'importance des coûts fixes, un accroissement sensible dès les premiers produits fabriqués, puis une augmentation moins marquée qui coïncide avec une plage de production "normale" et enfin une sorte de surchauffe lorsque les capacités productives commencent à être saturées.

2. Nous avons $C_m(q) = C_T'(q) = 1,5q^2 - 10q + 40$ et $C_m'(q) = 3q - 10$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0 $\quad \frac{10}{3} \quad$ 10
signe de $C_m'(q)$	$+$
variations de C_m	$40 \nearrow 90$

3. Le coût moyen est le coût total divisé par la quantité. On a donc

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q} = \frac{0,5q^3 - 5q^2 + 40q + 98}{q} = 0,5q^2 - 5q + 40 + \frac{98}{q}.$$

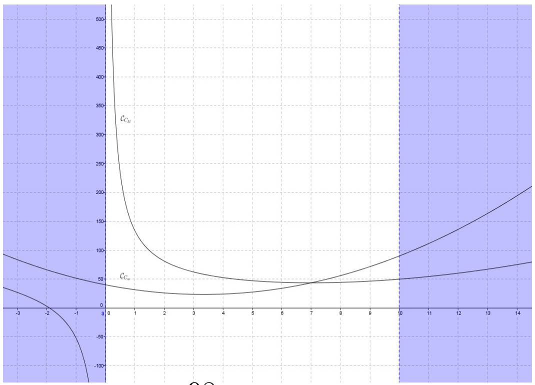
   Donc, $\forall q \in]0;10]$,

$$C_M'(q) = \left(\frac{0,5q^3 - 5q^2 + 40q + 98}{q}\right)' = \frac{(1,5q^2 - 10q + 40)q - (0,5q^3 - 5q^2 + 40q + 98)}{q^2}$$
$$= \frac{q^3 - 5q^2 - 98}{q^2} = \frac{(q-7)(q^2 + 2q + 14)}{q^2},$$

   car $q = 7$ est une racine du polynôme $q^3 - 5q^2 - 98$. On remarquera que $\forall q \in]0;10]$, $q^2 + 2q + 14 > 0$ et $q^2 > 0$. À l'aide de la forme factorisée de $C_M'(q)$, on déduit aisément les variations de C_M :

x	0		7		10
signe de $C_M(q)$	||	$-$	0	$+$	
variations de C_M	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{609}{14}=43,5$	$\nearrow$	$\frac{249}{5}=49,8$

4. On obtient les courbes suivantes :



5. On a $C_M(q)=C_m(q)\Leftrightarrow 0,5q^2-5q+40+\dfrac{98}{q}=1,5q^2-10q+40\Leftrightarrow q^2-5q-\dfrac{98}{q}=0$. Cette dernière égalité est vérifiée si et seulement si $q^3-5q^2-98=0$ donc si et seulement si $q=7$ (numérateur de $C'_M(q)$). On a donc bien vérifié que le niveau de production pour lequel le coût moyen est égal au coût marginal correspond au coût moyen minimal.

Exercice 2 *Correction* :

1. $2^{x+5}=32\Leftrightarrow 2^{x+5}=2^5\Leftrightarrow x+5=5\Leftrightarrow x=0$
2. $5^{2x+2}=\dfrac{1}{125}\Leftrightarrow 5^{2x+2}=5^{-3}\Leftrightarrow 2x+2=-3\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$
3. $64^{y+1}=16^{2y+5}\Leftrightarrow (2^6)^{y+1}=(2^4)^{2y+5}\Leftrightarrow 2^{6y+6}=2^{8y+20}\Leftrightarrow 6y+6=8y+20\Leftrightarrow y=-7$
4. $3^{9x-2}=27\Leftrightarrow 3^{9x-2}=3^3\Leftrightarrow 9x-2=3\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{9}$
5. $81^{k+2}=27^{k+4}\Leftrightarrow (3^4)^{k+2}=(3^3)^{k+4}\Leftrightarrow 3^{4k+8}=3^{3k+12}\Leftrightarrow 4k+8=3k+12\Leftrightarrow$

Exercice 3 *Correction* :

1. Comme $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=3(x-2)(x+\dfrac{1}{3})=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$, les points du graphe de $y=f(x)$ où la tangente est horizontale sont $A(2;f(2))=(2;-5)$ et $B(-\frac{1}{3};f(-\frac{1}{3}))=(-\frac{1}{3};\frac{73}{54})$
2. La tangente à la courbe au point P admet pour équation $T:y=f(1)+f'(1)(x-1)=-\frac{5}{2}-4(x-1)=-4x-\frac{3}{2}$.
3. Comme $f'(x)=10\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=10\Leftrightarrow 3x^2-5x-12=0\Leftrightarrow 3(x-3)(x+\frac{4}{3})=0$, les points du graphe de $y=f(x)$ où la tangente est de pente 10 sont $C(3;-\frac{1}{2})$ et $D(-\frac{4}{3};-\frac{85}{27})$.

Exercice 4 *Correction* :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=(-4x^3+2x^2-3x+1)'=-12x^2+4x-3$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\left(\dfrac{3x^2-4x}{2}\right)'=3x-2$
3. $\forall x\in\mathbb{R}^\star,\ f'(x)=((\sqrt{x}+1)(x^2-2))'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-2)+2x(\sqrt{x}+1)$
4. $\forall x\in\mathbb{R}^\star,\ f'(x)=((2x-\sqrt{x})(x+4))'=\left(2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x+4)+(2x-\sqrt{x})$
5. $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{4}\right\},\ f'(x)=\left(\dfrac{1}{1-4x}\right)'=-\dfrac{-4}{(1-4x)^2}=\dfrac{4}{(1-4x)^2}$

Exercice 1 *Correction* : Une PME fabrique et vend des têtes de poupées en plastique. Le coût total de x têtes en euros est :

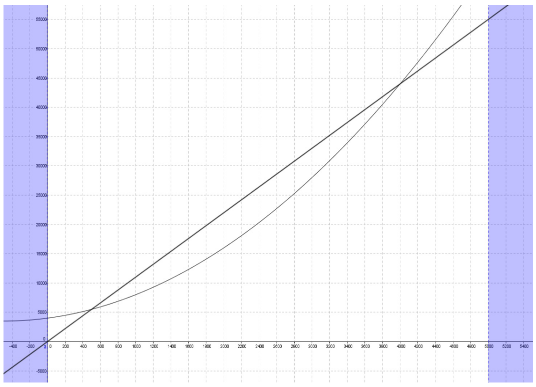
$$C(x) = 0,002x^2 + 2x + 4000$$

avec x compris entre 0 et 5000. Chaque tête est vendue 11 euros.

1. (a) On obtient $C(5000) = 64000$. Le coût total occasioné par la production de 5000 têtes de poupées est de 64000€.
   (b) On a $C(x) = 8000 \Leftrightarrow 0,002x^2 + 2x + 4000 = 8000 \Leftrightarrow 0,002x^2 + 2x - 4000 = 0$. Comme $\Delta = (2)^2 - 4(0,002)(-4000) = 36 = 6^2 > 0$, le trinôme admet deux racines disctinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{6^2}}{2(0,002)} = -2000 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{6^2}}{2(0,002)} = 1000$. Conclusion, le nombre de poupées produites occasionnant un coût total de 4000€ est égal à 1000.
2. (a) $\forall x \in [0,5000]$, $C'(x) = (0,002x^2 + 2x + 4000)' = 0,004x + 2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	5000
signe de $C'(x)$	+	
variations de C	4000 $\nearrow$	64000

   (b)



3. (a) D'après l'énoncé, $\forall x \in [0;5000]$, $R(x) = 11x$.
   (b) Voir graphique ci-dessus.
   (c) On doit déterminer les valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative de la fonction recette est au-dessus de celle de la fonction coût total. On trouve $x \in [500;4000]$.
4. (a) Par définition, $B(x) = R(x) - C(x) = 11x - (0,002x^2 + 2x + 4000) = -0,002x^2 + 9x - 4000$.
   (b) Étudions les variations de la fonction B : on a $\forall x \in [0;5000]$, $B'(x) = -0,004x + 9$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		2250		5000
signe de $B'(x)$		+	0	−	
variations de B	−4000	$\nearrow$	6125	$\searrow$	−9000

Conclusion, la quantité x_0 qui permet un bénéfice maximum est $x_0 = 2250$, et $B(x_0) = 6125$.

(c) On cherche x tel que $B(x) > 0 \Leftrightarrow -0,002x^2 + 9x - 4000 > 0$. Comme $\Delta = 49 = 7^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-(9) - \sqrt{7^2}}{2(-0,002)} = 4000$ et $x_2 = \dfrac{-(9) + \sqrt{7^2}}{2(-0,002)} = 5000$. Le trinôme étant du signe de $-a = 0,002 > 0$ à l'intérieur de ses racines, on en déduit que la plage de production assurant un profit à cette entreprise (c'est-à-dire un bénéfice positif) est décrite par l'intervalle $[500; 4000]$, ce qui corrobore le résultat de la question 4.(a).

Exercice 2 *Correction* :

(a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(b) $\ln e = 1$

(c) $3^{2x-10} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x-10} = 3^2 \Leftrightarrow 2x - 10 = 2 \Leftrightarrow x = 6$

(d) $\ln(x+3) = \ln 8 \Leftrightarrow x + 3 = 8 \Leftrightarrow x = 5$

(e) $1 + \log 1 = 1$

(f) $\log_2 16x - \log_2 x = \log_2 \left(\dfrac{16x}{x}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

(g) $\log_{12}(x-4) = 1 - \log_{12} x \Leftrightarrow \log_{12}(x-4) + \log_{12} x = 1 \Leftrightarrow \log_{12}((x-4)x) = \log_{12} 12 \Leftrightarrow (x-4)x = 12 \Leftrightarrow x = 6$ (la solution $x = -2 < 0$ étant exclue)

(h) $\dfrac{\ln 2^2}{\ln 2} = 2\dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 2$

(i) $f(f^{-1}(6)) = 6$

(j) $\ln e^4 = 4 \ln e = 4$

(k) $\log_7 7^5 = 5$

(l) $e^0 = 1$

(m) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

(n) $\log 100 = \log 10^2 = 2 \log_{10} = 2$

On a alors la grille suivante :

6	5	a 3	4	2	b 1
4	2	1	c 6	d 5	3
e 1	f 4	5	3	g 6	h 2
3	i 6	2	1	j 4	k 5
5	l 1	m 4	2	3	6
n 2	3	6	5	1	4

Exercice 1 *Correction* :
Soit P_n la population mondiale estimée en avril $n + 2006$:

1. $P_4 = P_0 \times \left(1 + \frac{1,4}{100}\right)^4 = 6,872$ milliards d'habitants en avril 2010.
2. On cherche n tel que
$$13 = P_0 \times \left(1 + \frac{1,4}{100}\right)^n = 6,5(1,014)^n \Leftrightarrow (1,014)^n = 2 \Leftrightarrow \ln(1,014)^n = \ln 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,014} \simeq 50.$$
Il faudra approximativement 50 années à la population mondiale pour doubler.

Exercice 2 *Correction* : Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total de fabrication de x unités est donné par la fonction :
$$C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x$$
On suppose que l'entreprise est en situation de monopole, ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant le prix de vente p et la demande x (en unités) est :
$$p(x) = -\frac{45x}{8} + 2750$$
(autrement dit, quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$).

1. La recette totale pour la vente de x unités, est définie par $R(x) = p(x) \times x = -\frac{45}{8}x^2 + 2750x$.
2. On résout l'équation $r_m(x) = C_m(x)$ où C_m définit le coût marginal : on a
$$r_m(x) = C_m(x) \Leftrightarrow \left(-\frac{45}{8}x^2 + 2750x\right)' = \left(\frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x\right)'$$
$$\Leftrightarrow -\frac{90}{8}x + 2750 = \frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^2 - \frac{150}{8}x - 250 = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 1500x - 20000 = 0.$$
Comme $\Delta = (-1500)^2 - 4(8)(-20000) = 1700^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes disctinctes $x_1 = \frac{-(-1500) - \sqrt{1700^2}}{2(8)} = -\frac{25}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{-(-1500) + \sqrt{1700^2}}{2(8)} = 200$. Finalement, la valeur de x pour laquelle la recette marginale est égale au coût marginal est égale à 200.

Exercice 3 *Correction* :

1. Utilisons les hypothèses de l'exercice :
   – si le prix est fixé à 2 alors l'offre vaut 13,929 : $Q(2) = K2^\alpha = 13,929$,
   – si le prix est fixé à 5 alors l'offre vaut 72,748 : $Q(5) = K5^\alpha = 72,748$.
   On résout donc le système
$$\begin{cases} K2^\alpha = 13,929 \\ K5^\alpha = 72,748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{K2^\alpha}{K5^\alpha} = \frac{13,929}{72,748} \\ K5^\alpha = 72,748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^\alpha = 0,192 \\ K5^\alpha = 72,748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \ln\frac{2}{5} = \ln 0,192 \\ K5^\alpha = 72,748 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1,801 \\ K = 4 \end{cases}$$
   La fonction d'offre s'écrit alors $Q(p) = 4p^{1,801}$.
2. $p = 5,03 \Rightarrow Q(5,03) = 73,381$ à 10^{-3} près par défaut.

Exercice 4 *Correction* :

1. Comme $\ln X$ est définie pour tout $X \in \mathbb{R}_+^\star$, on a les domaines de définition suivants :

- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x+3>0\} =]-\dfrac{3}{2};+\infty[$
- $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} / -5x+4>0\} =]-\infty;\dfrac{4}{5}[$
- $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} / -7x+2>0\} =]-\infty;\dfrac{2}{7}[$

2. $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h =]-\frac{3}{2};\frac{2}{7}[$,

$$\begin{aligned}\ln(2x+3)+\ln(-5x+4)=\ln(-7x+2) &\Leftrightarrow \ln((2x+3)(-5x+4))=\ln(-7x+2)\\ \Leftrightarrow (2x+3)(-5x+4)=-7x+2 &\Leftrightarrow 10x^2-10=0 \Leftrightarrow 10(x-1)(x+1)=0.\end{aligned}$$

Conclusion, l'équation est vérifiée pour $x=-1$ (on notera que $x=1 \notin]-\frac{3}{2};\frac{2}{7}[$).

Exercice 1 *Correction* :

1. $\log 3 + \log 5 = \log(3 \times 5) = \log 15$
2. $\log 16 - \log 2 = \log\left(\frac{16}{2}\right) = \log 8$
3. $3\log 4 = \log 4^3 = \log 64$
4. $2\log 3 - 3\log 2 = \log 3^2 - \log 2^3 = \log\left(\frac{9}{8}\right)$
5. $\log 236 + \log 1 = \log 236$
6. $\log 236 - \log 1 = \log 236$

Exercice 2 *Correction* :

1. Puisque p décrit un prix, $p \geq 0$. Ensuite, x décrit un nombre de places donc $x \geq 0 \Leftrightarrow 300 - 12p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 25$.
2. Par définition, $b(p) = R(p) - C(p)$ où R est la recette et C le coût total. Comme $R(p) = p \times x(p) = p(300 - 12p) = -12p^2 + 300p$ et $C(p) = C(0) = 1632$, on obtient finalement $b(p) = -12p^2 + 300p - 1632$.
3. Le bénéfice est rentable lorsque $b(p) > 0$. Déterminons les racines de b afin d'en déduire le signe de $b(p)$. Comme $\Delta = (300)^2 - 4(-12)(-1632) = 11664 = 108^2 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes qui sont $p_1 = \dfrac{-(300) - \sqrt{108^2}}{2(-12)} = 17$ et $p_2 = \dfrac{-(300) + \sqrt{108^2}}{2(-12)} = 8$. On a finalement $b(p) > 0 \Leftrightarrow p \in [8; 17]$.
4. Étudions les variations de b. $\forall p \in [0; 25]$, $b'(p) = -24p + 300$ et $b'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{25}{2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

p	0		$\frac{25}{2}$		25
signe de $b'(p)$		$+$	0	$-$	
variations de b	-1632	$\nearrow$	243	$\searrow$	-1632

Le bénéfice maximum est atteint pour $p = \frac{25}{2} = 12,5$€ et vaut $b(12,5) = 243$€, le nombre de spectateurs étant égal dans ce cas à $x(12,5) = 150$.

Exercice 3 *Correction* :

1. $Q_d = Q_s \Leftrightarrow 66 - 3P = -4 + 2P \Leftrightarrow 70 = 5P \Leftrightarrow P = 14$. Cela implique $Q_d(14) = Q_s(14) = 24$.
2. La taxe sur les ventes va réduire le prix proposé par les vendeurs à $P - t$. La fonction d'offre devient alors : $Q_s = -4 + 2(P - t)$. On résout ensuite à nouveau l'équation $Q_d = Q_s$. On a $Q_d = Q_s \Leftrightarrow 66 - 3P = -4 + 2(P - t) \Leftrightarrow -5P = -70 - 2t \Leftrightarrow P = 14 + \frac{2}{5}t$. Cela implique $Q_d(14 + \frac{2}{5}t) = 66 - 3(14 + \frac{2}{5}t) = 24 - \frac{6}{5}t$. Le prix d'équilibre a augmenté de $\frac{2}{5}t$. Cela implique que le vendeur absorbe $\frac{3}{5}$ de la taxe et vendra ses marchandises au prix $P - \frac{3}{5}t$. Le consommateur paiera $\frac{2}{5}$ de la taxe. La quantité d'équilibre sera diminuée de $\frac{6}{5}t$.
3. Si $t = 5$, $Q_s = -4 + 2(P - 5) = -4 + 2P - 10 = -14 + 2P$. À l'équilibre, $Q_d = Q_s \Leftrightarrow 66 - 3P = -14 + 2P \Leftrightarrow -5P = -14 - 66 = -80 \Leftrightarrow P = 16$. Le prix d'équilibre est donc égal à 16 et implique une quantité échangée égale à $Q_d = Q_s = 66 - 3(16) = 18$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Correction* :

1. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ((2x-1)e^x + 3) = 2\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + \lim\limits_{x\to-\infty} (-e^x+3) = 3.$

   (b) On déduit du résultat précédent que la droite déquation $y = 3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x.$

   (b) La tangente admet pour équation $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x + 2.$

   (c) On a tout d'abord $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	3	$\searrow$	$-2e^{-\frac{1}{2}}+3$	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) À l'aide du tableau de variations, on constate que le minimum de $f(x)$ est atteint en $-\frac{1}{2}$ et vaut $f(-\frac{1}{2}) = -2e^{-\frac{1}{2}} + 3 = 1,79$ à 10^{-2} près par excès.

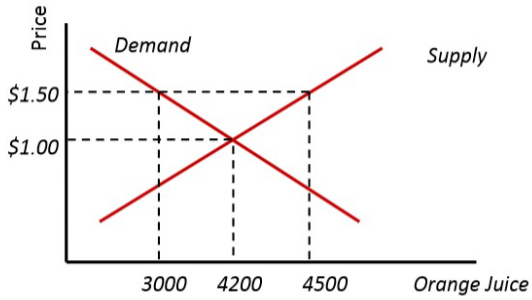
Exercice 1 *Correction* :

Si C_n dénote le montant du compte après n années d'épargne, on a la formule très simple suivante $C_n = 10000(1 + \frac{4,75}{100})^n$.

1. (a) $C_1 = 10000(1 + \frac{4,75}{100}) = 10475$
   (b) $C_2 = 10000(1 + \frac{4,75}{100})^2 = 10972,56$
   (c) $C_3 = 10000(1 + \frac{4,75}{100})^3 = 11493,76$
   (d) $C_{10} = 10000(1 + \frac{4,75}{100})^{10} = 15905,24$
2. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que
   $$C_n = 10000(1 + \frac{4,75}{100})^n = 2 \times 10000 = 20000 \Leftrightarrow 1,0475^n = 2 \Leftrightarrow n \log(1,0475) = \log 2 \Leftrightarrow n \simeq 14,94.$$
   Il faut donc attendre 15 années avant de doubler la somme de départ.

Exercice 2 *Correction* :

1. On a les graphes suivants :



2. L'élasticité du prix par rapport à la demande est défini par
   $$e[D](p) = \frac{\text{variation de la quantité demandée (en \%)}}{\text{variation du prix (en \%)}} = \frac{\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1 + Q_0}}{\frac{P_1 - P_0}{P_1 + P_0}} = \frac{\frac{3000-4200}{3000+4200}}{\frac{1,50-1,00}{1,50+1,00}} = -\frac{0,167}{0,2} = -0,835.$$
   Comme $E[D](p) < 1$, la demande de jus d'orange est inélastique.
3. Les facteurs qui influencent le plus l'élasticité de la demande de jus d'orange sont la disponibilité des produits alternatifs, et le temps. Par exemple, s'il y a des produits de substitution comme du jus de pomme ou du jus de mangue, les consommateurs souhaiteront peut-être s'y tourner si le prix de jus d'orange augmente. Le prix élasticité de la demande de jus d'orange augmentera alors.

Exercice 3 *Correction* :

1. (a) On a $x^2 + x^3 = x^2(x + 1)$. Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^2 + x^3$ est le même que celui de $x + 1$ et est décrit à l'aide du tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $x^2 + x^3$		$-$	0	$+$	

   (b) Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, résoudre (E) sur $]-\infty; -1]$ revient à égaliser une quantité positive (à gauche) et une quantité négative (à droite), ce ui est impossible. On en déduit donc que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.
   (c) Comme $(e^0 = 1) \neq (3(0^2 + 0^3) = 0)$, 0 n'est pas solution de (E).
2. Pour tout $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, on a

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(3x^2(1+x)) = x \Leftrightarrow 3x^2(1+x) = e^x$$
$$\Leftrightarrow e^x = 3(x^2 + x^3) : (E).$$

3. (a)

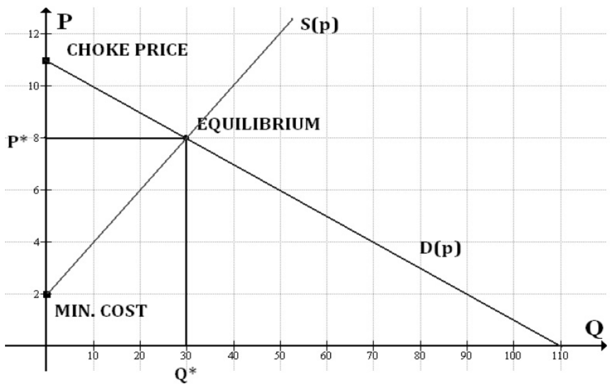
   (b) Pour tout $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, on a
$$h'(x) = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{2x(1+x) + x^2 - x^2(1+x)}{x^2(1+x)} =$$
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

   (c) Déterminer les variations de la fonction h.

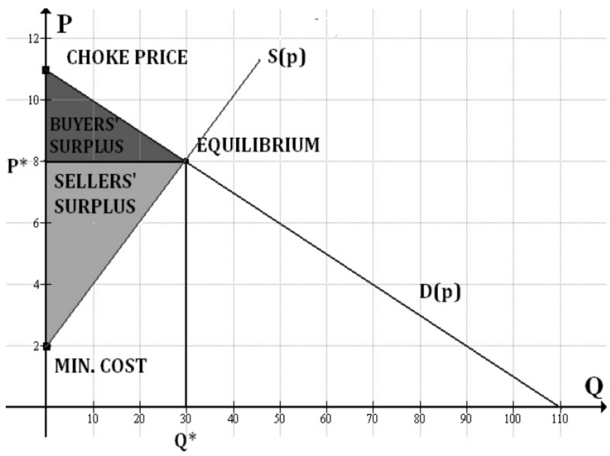
   (d) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

Exercice 4 *Correction* :

1. À l'équilibre, la demande est égale à l'offre : on a donc
$$110 - 10p = 5p - 10 \Leftrightarrow 120 = 15p \Leftrightarrow p = 8.$$
2. Il suffit de remplacer p par 8 dans la fonction offre ou la fonction demande. On a
$$Q = 110 - 10 \times 8 = 30.$$
3. On a les courbes suivantes :



4. Le surplus de l'acheteur (B) est égal à l'aire désignée par le triangle supérieur (en gris foncé). Le surplus du vendeur (S) est égal quant à lui à l'aire désignée par le triangle inférieur (en gris clair) :



   On a
$$B = \tfrac{1}{2}(30)(11-8) = 45 \text{ et } S = \tfrac{1}{2}(30)(8-2) = 90.$$

ISCID-CO - Prépa 1 **ULCO**

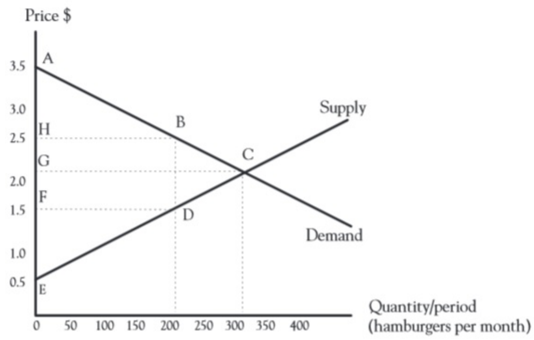
MATHÉMATIQUES - Colle 23 Année universitaire 2014/2015 **Semestre 1**

Exercice 1 *Correction* :

1. Le résultat du placement le jeudi matin est égal à :
$$10000(1+\tfrac{12}{100})(1-\tfrac{11}{100}) = 9968 \text{ €}.$$
Il est donc positif.
2. Le résultat du placement le jeudi matin est égal à :
$$10000(1-\tfrac{11}{100})(1+\tfrac{12}{100}) = 9968 \text{ €}.$$
Il est donc positif. Les résultats sont identiques car la multiplication est commutative.

Exercice 2 *Correction* :

1. D'après le graphique, le prix d'équilibre est égal à $p_e = 2\$$. La quantité d'équilibre est égale à $q_e = 300$ hamburgers.
2. Le surplus de l'acheteur (B) est égal à l'aire du triangle ECG. Le surplus du vendeur (S) est égal quant à lui à l'aire ACG :



On a
$$B = \tfrac{1}{2}(300)(2-0.5) = 225 \text{ et } S = \tfrac{1}{2}(300)(3.5-2) = 225.$$
Le surplus social est égal à $225 + 225 = 450$.
Calculate consumer surplus, producer surplus and social surplus.
3. Suppose the quantity supplied is restricted by government regulation to 200 units per month. Calculate the new price, the consumer surplus, producer surplus and social surplus.

Exercice 3

1. On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$
   (a) Étudier le sens de variation de g.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On considère ensuite la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

(b) Déterminer sur $]0;+\infty[$ la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.
Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point que l'on déterminera.

(c) Étudier le sens de variation de f.

(d) Montrer qu'il existe un point B et un seul, appartenant à la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ), et préciser ses coordonnées.

(e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,34 < \alpha < 0,35$.

(f) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Non corrigé pour l'instant