CORRECTION Exercices Chapitre 1 - Calcul matriciel.

Exercice 1 *Correction* :

1. On cherche C telle que $C = A - 2B$, i.e.
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2\times 1 & 2-2\times 2 \\ 0-2\times 0 & 4-2\times 1 \\ 1-2\times 1 & -1-2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$
2. On cherche D telle que $D = \frac{1}{4}(A+B+C) = \frac{1}{4}(A+B+A-2B) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B$, i.e.
$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times(-3)-\frac{1}{4}\times 1 & \frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}\times 2 \\ \frac{1}{2}\times 0-\frac{1}{4}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{4}\times 1 \\ \frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{4}\times 1 & \frac{1}{2}\times(-1)-\frac{1}{4}\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Correction* :

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 3\times 2+1\times 3+5\times 0 & 3\times 1+1\times 0+5\times(-5) & 3\times(-1)+1\times 1+5\times 3 & 3\times 0+1\times 8+5\times 4 \\ 2\times 2+7\times 3+0\times 0 & 2\times 1+7\times 0+0\times(-5) & 2\times(-1)+7\times 1+0\times 3 & 2\times 0+7\times 8+0\times 4 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 9 & -22 & 13 & 28 \\ 25 & 2 & 5 & 56 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\times 2 + 0\times(-4) + 5\times(-3) = -21$,
3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-3) & 2\times 0 & 2\times 5 \\ -4\times(-3) & -4\times 0 & -4\times 5 \\ -3\times(-3) & -3\times 0 & -3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 10 \\ 12 & 0 & -20 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *Correction* : Le produit de deux matrices est réalisable lorsque le nombre de colonnes de la matrice à gauche est égal au nombre de lignes de la matrice à droite.

1. Les produits AB et BA sont réalisables (le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours réalisable). Comme $A = B$, on a nécessairement $AB = BA$, il est donc inutile de réaliser les deux produits. On a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = BA$.
2. Les produits AB et BA sont réalisables.
   - $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$,
   - $BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On remarque que les matrices A et B sont les mêmes qu'à la question précédente, on a simplement inversé leur nom. Par conséquent,
   - $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
   - $BA = 6$.
4. Seul le produit BA est réalisable. On a $BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Seul le produit AB est réalisable. On a $AB = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *Correction* : Considérons le tableau de gauche (lecture lignes). Pour fabriquer 1 unité de A, il faut 2 unités de W, 3 unités de X, 1 unité de Y et 1 unité de Z. Considérons le tableau de droite (lecture colonnes). Il faut 5 unités de E (Electricité) pour fabriquer 1 unité de W, 1 unité de E pour fabriquer une unité de X, aucune unité de E pour fabriquer 1 unité de Y, 3 unités de E pour fabriquer 1 unité de Z. Si on réalise le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

on obtient 16. Cela signifie que produire une unité de A nécessite au total 16 unités de E. Finalement, le produit de la matrice de gauche par celle de droite nous indique le nombre total d'unités de E, de P (Pétrôle) et de G (Gaz) pour fabriquer une unité de A et une unité de B. Le produit est égal à :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 19 \\ 25 & 12 & 30 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

- les caractéristiques relatives aux matières ont disparu,
- le produit de la matrice de droite par celle de gauche n'est pas réalisable et n'a - de toute façon - pas de signification économique.

Exercice 5 *Correction* : Les tableaux ne sont pas disposés de manière propice à la multiplication matricielle. Il faut "transposer" la matrice de gauche et la multiplier par celle de droite. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 15 & 14 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *Correction* : On remarque aisément que le système est équivalent au produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 *Correction* : On donne la matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ associée au graphe, l'élément a_{ij} étant égal à 1 s'il existe un arc allant du sommet i au sommet j et 0 sinon. On a dans notre cas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, quand on multiplie A par A, on obtient tous les chemins de longueur 2.

- Pour déterminer le nombre de chemins de longueur 7 allant de 1 à 3 dans le graphe, il faut tout d'abord multiplier la matrice A par elle même 7 fois
$$A^7 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{7 \text{ fois}} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 13 & 13 \\ 7 & 10 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$
puis s'intéresser au coefficient situé à la 1-ère ligne et à la 3-ième colonne soit 13. Il y a 13 chemins de longueur 7 allant du sommet 1 au sommet 3.
- On a $A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui permet d'affirmer qu'il y a en tout 47 chemins de longueur 5.

Exercice 8 *Correction* : On cherche B telle que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 5b_{31} & 5b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 3b_{12} & 5b_{13} \\ b_{21} & 3b_{22} & 5b_{23} \\ b_{31} & 3b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}.$$

Il faut donc que $\begin{cases} b_{11} = b_{11} \\ b_{12} = 3b_{12} \\ b_{13} = 5b_{13} \\ 3b_{21} = b_{21} \\ 3b_{22} = 3b_{22} \\ 3b_{23} = 5b_{23} \\ 5b_{31} = b_{31} \\ 5b_{32} = 3b_{32} \\ 5b_{33} = 5b_{33} \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$

Exercice 9 *Correction* : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On procède par étapes :

1. La multiplication de A à droite par $E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

   Cela signifie que la multiplication de A **à droite** par $E_{1,3}$ isole dans la 3-ième colonne de la matrice résultante les éléments de la 1ère colonne de A. Plus généralement la multiplication d'une matrice A à droite par une matrice de type $E_{i,j}$ isole dans la j-ième colonne de la matrice résultante la i-ième colonne de A. On verra plus tard que la multiplication de A **à gauche** par une matrice de type $E_{i,j}$ isole dans la i-ième ligne de la matrice résultante la j-ième ligne de A.
2. Afin de récupérer la 1ère colonne multipliée par 3 dans la 3-ième colonne de la matrice résultante, on multiplie la matrice A par $3E_{1,3}$.
3. On additionne A et $A(3E_{1,3})$, on obtient

$$A + A(3E_{1,3}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 3d \\ 0 & 0 & 3g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c+3a \\ d & e & f+3d \\ g & h & i+3g \end{pmatrix}$$

   qui est bien le résultat attendu. Cependant, $A + A(3E_{1,3})$ n'est pas écrite sous la forme d'un produit de matrices (comme demandé dans l'énoncé), il faut donc remarquer que

$$A + A(3E_{1,3}) = A(I_3 + 3E_{1,3})$$

   et $I_3 + 3E_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice recherchée.

Exercice 10 *Correction* :

1. Faux. (On peut prendre $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ et $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, AB est défini contrairement à BA.)
2. Faux. (Ça n'est vrai que pour les matrices carrées.)
3. Vrai. (On a $(AB)^T = B^T A^T$ donc, si AB est défini, $(AB)^T$ l'est aussi.)
4. Vrai. (A et B étant nécessairement de même dimension, AB^T est défini.)
5. Faux. (Si $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ et $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, AB et BA sont définis mais pas $A + B$.)
6. Vrai. (A et B^T sont nécessairement de même format.)
7. Vrai. (Si AB et $B^T A$ sont définis, A est nécessairement carrée.)
8. Faux. (Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, AB et $B^T A$ sont définis mais $A + B^T$ ne l'est pas.)
9. Faux. (Si $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ et $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $AA^T \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ et $BB^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.)

10. Vrai. (A^TA et BB^T ont nécessairement la même taille.)

Exercice 11 *Correction* : Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+8c & 2b+8d \end{pmatrix} \text{ et } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il faut que

$$\begin{cases} a+3c &= 1 \\ b+3d &= 0 \\ 2a+8c &= 0 \\ 2b+8d &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 *Correction* : Il suffit de multiplier les deux matrices entre-elles et de vérifier que le produit donne l'identité I_2.

Exercice 13 *Correction* : On a

$$\begin{cases} 3x_1+x_2 &= y_1 \quad (L_1) \leftarrow (L_1)+(L_2) \\ x_1-x_2 &= y_2 \quad (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 &= y_1+y_2 \quad (L_1) \leftarrow \frac{1}{4}(L_1) \\ x_1-x_2 &= y_2 \quad (L_2) \leftarrow -(L_2)+\frac{1}{4}(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{4}y_1+\frac{1}{4}y_2 \\ x_2 &= \frac{1}{4}y_1-\frac{3}{4}y_2 \end{cases}$$

Matriciellement nous avons donc écrit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est donné par $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 *Correction* :

1. On trouve par la méthode de son choix $A^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 26 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.
2. On trouve par la méthode de son choix $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 *Correction* :

1. $A+4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4(1) & 1+4(0) & 1+4(0) \\ 1+4(0) & -3+4(1) & 1+4(0) \\ 1+4(0) & 1+4(0) & -3+4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$
2. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3B.$
3. $B^2 = 3B \Leftrightarrow (A+4I_3)^2 = 3(A+4I_3) \Leftrightarrow A \times A + A \times (4I_3) + (4I_3) \times A + (4I_3) \times (4I_3) = 3A + 12I_3 \Leftrightarrow A^2 + 8A + 16I_3 = 3A + 12I_3 \Leftrightarrow A^2 + 5A = -4I_3 \Leftrightarrow A\left[-\frac{1}{4}(A+5I_3)\right] = I_3.$
4. On sait qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \times C = I_3$, C étant dans ce cas l'inverse de A. D'après la question précédente, si on pose $C = -\frac{1}{4}(A+5I_3)$, on a $A \times C = I_3$ ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = C = -\frac{1}{4}(A+5I_3)$ soit

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que, grâce à des relations matricielles spécifiques, il est possible de déterminer l'inverse d'une matrice sans le calculer.

Exercice 16 *Correction* :

1. • $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,
   • $A^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=A\times\left(A\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=A\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,
   • On va prouver par récurrence la relation
   $$(\mathcal{P}_n) : A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
   $(\mathcal{P}_1)$ est vraie d'après le premier calcul, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on vérifie que de ce fait, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie :
   $$A^{n+1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=A\left(A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\overset{(\mathcal{P}_n)}{=}A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\overset{(\mathcal{P}_1)}{=}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
   La relation est vraie au rang $n+1$ donc la relation $(\mathcal{P}_n)$ est vraie quel que soit $n\in\mathbb{N}$.
   • $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$,
   • $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\times\left(A\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=A\times\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$,
   • On va prouver par récurrence la relation
   $$(\mathcal{P}_n) : A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$
   $(\mathcal{P}_1)$ est vraie d'après le premier calcul, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on vérifie que de ce fait, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie :
   $$A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\left(A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)\overset{(\mathcal{P}_n)}{=}A\times2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^n\times A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\overset{(\mathcal{P}_1)}{=}2^n\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$
   La relation est vraie au rang $n+1$ donc la relation $(\mathcal{P}_n)$ est vraie quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

2. Cherchons $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x&=&b\\y&=&a+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a&=&y-2x\\b&=&x\end{cases}$.
   Finalement,
   $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(y-2x)\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+x\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

3. • D'après la question précédente, $A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A^n\left(((0)-2(1))\times\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+(1)\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$. Par conséquent,
   $$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A^n\left((-2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=(-2)A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n\\-2+2^{n+1}\end{pmatrix}.$$
   • Toujours d'après la question précédente, $A^n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(y-2x)\times A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+x\times A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Ainsi,
   $$A^n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(y-2x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+2^nx\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^nx\\y-2x+2^{n+1}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^{n+1}-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$
   ce qui implique que $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^{n+1}-2&1\end{pmatrix}$.

Exercice 17 *Correction* :

1. Faux. (On peut prendre $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $AA^T=\begin{pmatrix}5&11\\11&25\end{pmatrix}\neq A^TA=\begin{pmatrix}10&14\\14&20\end{pmatrix}$.)
2. Vrai. (Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. Donc $\det(AA^T)=\det(A)\det(A^T)=\det(A^2)=\det(A)^2$. Ainsi, $\det(AA^T)\neq0\Leftrightarrow\det(A)=0$.)
3. Faux. (On peut prendre $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Donc A est inversible mais $A+A^T=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ne l'est pas.)
4. Vrai. ($A=I\times I\times A$ donc A est équivalente à I car A et I sont inversibles.)
5. Faux. (Si A est semblable à I, il existe P inversible telle que $A=PIP^{-1}=I$ ce qui est absurde.)

Exercice 18 *Correction* :

1. Faux. ($\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ est diagonale mais non inversible.)
2. Vrai. (La transposition n'affecte pas les éléments diagonaux d'un matrice carrée.)
3. Vrai. (Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses termes diagonaux.)
4. Faux. (Si D est semblable à I, il existe P inversible telle que $D=PIP^{-1}=I$ ce qui est absurde.)
5. Faux. (Cette affirmation est vraie si D est une matrice diagonale inversible, ce qui n'est pas une propriété requise ici.)

Exercice 19 *Correction* : Notons $y : x \mapsto \text{tr}(A)$, on a $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Une brève étude de la fonction montre que

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \pm\infty$,
- $y'(x) = 6(x^2 + x - 2)$,
- y est croissante pour $x < -2$ et $x > 1$, décroissante pour $-2 < x < 1$,

par conséquent on a un maximum local pour $x = -2$ et un minimum local pour $x = 1$.

Exercice 20 *Correction* :

1. La trace d'une matrice (carrée) est la somme des éléments diagonaux de la matrice.
   - On sait que $AB = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{1\leq i,j\leq n}$. Les éléments diagonaux de AB sont donc obtenus pour $i = j$ ce qui implique donc que $tr(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$.
   - De la même manière on montre que, puisque $BA = (\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj})_{1\leq i,j\leq n}$, $tr(BA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$.

   Il est évident que par commutativité, $tr(AB) = tr(BA)$.
2. On rappelle que deux matrices (carrées) sont semblables si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On a
$$tr(A) = tr(PBP^{-1}) = tr((P)(BP^{-1})) \overset{1.}{=} tr((BP^{-1})(P)) = tr(B(P^{-1}P)) = tr(B.I) = tr(B).$$
3. En utilisant la définition du produit matriciel rappelée dans 1., $tr(AA^T) = tr(A^TA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \geq 0$

Exercice 21 *Correction* : On a $\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} =$

$$((t+3)\times(t-3)\times(t+4)+5\times(-6)\times1+6\times(-1)\times1)-(1\times(t-3)\times6+1\times(-6)\times(t+3)+(t+4)\times(-1)\times5)=t^3+4t^2-4t-16=(t+4)(t-2)(t+2).$$

La matrice est donc inversible pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-4,-2,2\}$.

Exercice 22 *Correction* : On rappelle que le **rang** d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul.

1. A étant de taille 4×3, on a $rg(A) \leq 3$. Déterminons si le rang de A est égal à 3. On a
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$
donc $rg(A) < 3$. Ensuite, on remarque aisément que $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible donc $rg(A) = 2$.
2. A est encore ici de taille 4×3 donc on a $rg(A) \leq 3$. Déterminons si le rang de A est égal à 3.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
donc $rg(A) < 3$. On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible donc $rg(A) = 2$.
3. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $rg(A) < 4$. Mais on remarque que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, on a $rg(A) = 3$.

Exercice 23 *Correction* :

1. Faux. (Si deux matrices A et B soient équivalentes, elles ont nécessairement le même format. Or une matrice de rang r n'est pas nécessairement de même format que I_r.)
2. Vrai. (Le rang de A est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes d'une matrice.)

3. Vrai. (Le rang de A est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes d'une matrice.)
4. Faux. ($\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 2 mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1.)
5. Vrai. (On sait que r colonnes (au moins) de A sont linéairement indépendantes donc il peut exister une $r+1$-ième colonne (voire plus) de A qui soit elle aussi indépendante des r premières et $rg(A) \geq r$.)
6. Vrai. (Quelle que soit la matrice carrée extraite de 0, son déterminant est égal à 0. C'est la seule matrice qui ait cette propriété.)
7. Faux. ($A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ admet deux lignes qui ne sont pas proportionnelles et pourtant son rang est égal à 3.)
8. Faux. ($A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ admet deux lignes proportionnelles et son rang est égal à 1, qui n'est pas strictement inférieur au nombre de colonnes de A.)
9. Vrai. (Une matrice carrée de $\mathcal{M}_r$ n'est pas nécessairement la matrice carrée de plus grande taille extraite de A qui soit inversible donc $rg(A) \geq r$.)
10. Vrai. (C'est la définition même du rang d'une matrice.)
11. Faux. (Il peux exister une matrice carrée extraite de A, de taille $> r$, qui soit inversible.)