Licence 3 Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

Analyse Numérique

Fiche 3 - Polynômes orthogonaux.

Exercice 1 (Polynômes de Legendre.)
On appelle polynômes de Legendre les polynômes définis par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n] \text{ (formule de Rodrigues)}$$

où $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \mapsto f'(x)$ pour $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$.
Montrer les propriétés suivantes :

1. $$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0 \text{ si } i \neq j \text{ avec } i, j \in \mathbb{N}.$$

   (Les polynômes de Legendre sont orthogonaux pour le produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.)

2. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 (x-1)^{n-j}(x+1)^j \text{ et } P_n(1) = 1.$$

   (Définition des polynômes de Legendre sous forme d'une somme.)

3. $$P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 x^{n-j}.$$

4. P_n a même parité que n.

5. $$P_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-(-1)^{n+j}}{\int_{-1}^{1} P_j^2(x)dx} P_j(x).$$

6. Les polynômes P_n satisfont la relation de recurrence à trois termes

   $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

   pour $n \geq 1$ avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$ (c'est la formule de récurrence de Bonnet).

7. $$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

   (Les polynômes de Legendre ne sont pas orthonormaux.)

8. $$\sum_{n \geq 0} P_n(x)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

   (Définition de la suite des polynômes de Legendre par sa fonction génératrice. Le calcul des coefficients de la série de Laurent donne alors : $P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1-2xz+z^2)^{-1/2} z^{-n-1} \mathrm{d}z$ où le contour entoure l'origine et est pris dans le sens trigonométrique.)

Exercice 2 (Polynômes de Legendre.)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

(a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, (.|.))$.

(b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E.

Exercice 3 (Polynômes de Tchebychev)

Les fonctions de Tchebychev de première (T_n) et seconde (U_n) espèces sont définies sur $I = [-1, 1]$ par

$$\begin{cases} T_n(x) &= \cos(n\theta) \\ U_n(x) &= \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases} \quad \text{avec } \theta = \arccos(x).$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. Les fonctions T_n satisfont la relation de récurrence à trois termes
$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$
pour $n \geq 1$ avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.
2. Les fonctions T_n sont des fonctions polynômes.
3. $$T_n'(x) = nU_{n-1}(x).$$
4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes.
5. $$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ si } n \neq m.$$
6. $$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$
7. $$T_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n],$$
pour $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
8. Le coefficient du terme de plus haut degré de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$ et 1 pour $n = 0$.
9. Les polynômes T_n satisfont l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$
10. T_n est proportionnel au polynôme W_n défini par
$$W_n(x) = \sqrt{1-x^2}D^n\left[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$
où $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \mapsto f'(x)$ pour $f \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$.

Exercice 4 (Polynômes de Tchebychev)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice 5 (Polynômes de Laguerre)

Les polynômes de Laguerre L_n^α (où α est réel strictement positif) sont définis comme étant unitaires, de degré n, et solutions de l'équation differentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. Si on pose
$$L_n^\alpha(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

alors

$$a_k = C_n^k (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)}$$

avec $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2. Les polynômes L_n^α satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$L_{n+1}^\alpha(x) + (\alpha + 2n + 1 - x) L_n^\alpha(x) + n(n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $L_0^\alpha(x) = 1$ et $L_1^\alpha(x) = x - (\alpha + 1)$.

3.

$$\int_0^{+\infty} L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)x^\alpha e^{-x}dx = 0, \text{ si } m \neq n.$$

4.

$$\int_0^{+\infty} (L_n^\alpha)^2(x)e^{-x}dx = n!\Gamma(\alpha + n + 1).$$

Exercice 6 (Polynômes d'Hermite)
Les fonctions d'Hermite H_n satisfont

$$G(x, w) = e^{2xw-w^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x)}{n!}w^n,$$

où w est un réel.
Montrer les propriétés suivantes :

1. Les fonctions H_n sont polynomiales, de degré n.
2. $$2nH_{n-1}(x) = H_n'(x).$$
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, w)G(x, \overline{w})e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}e^{2w\overline{w}}$$
4. Les polynômes H_n satisfont
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0 \text{ si } n \neq m.$$
5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!.$$
6. Les polynômes H_n satisfont la relation de récurrence à trois termes
$$H_{n+}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$
pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$.
7. $$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n[e^{-x^2}].$$
8. Les polynômes H_n satisfont l'équation différentielle
$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)}e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
   (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ).

Exercice 8 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, a n racines réelles simples.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ On définit, sur $\mathbb{R}[X]$:

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer rapidement que $< ., . >$ est un produit scalaire.
2. Montrer que l'on peut trouver un polynôme de degré 3 orthogonal à $\mathbb{R}^2[X]$.
3. Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$:

$$\Phi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

   et montrer qu'on peut construire une base orthonormale de vecteurs propres dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que $\Phi + Id$ est une bijection de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$, f non-identiquement nulle sur $[0, 1]$, et φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 f(x)P(x)Q(x)dx.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $deg(P_n) = n$ et que $\forall j, k \in \mathbb{N}, j \neq k, \varphi(P_j, P_k) = 0$.
3. Montrer que $\forall n \geq 1$, P_n est scindé à racines simples dans $[0, 1]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 |t^3 - at^2 - bt - c|^2 dt.$$