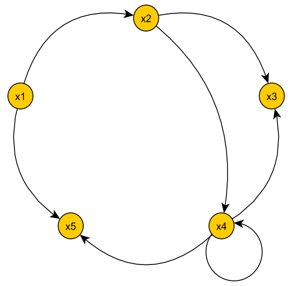
L3 Logistique et Transport - Pôle Lamartine - Dunkerque - 2011/2012

CORRECTION Exercices Optimisation - Chapitre 1

Exercice 1

1. On a le diagramme suivant :



2.,3. La représentation cartésienne et la matrice booléenne sont données respectivement par :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1		$\star$			$\star$
x_2			$\star$	$\star$	
x_3					
x_4			$\star$	$\star$	$\star$
x_5					

et $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

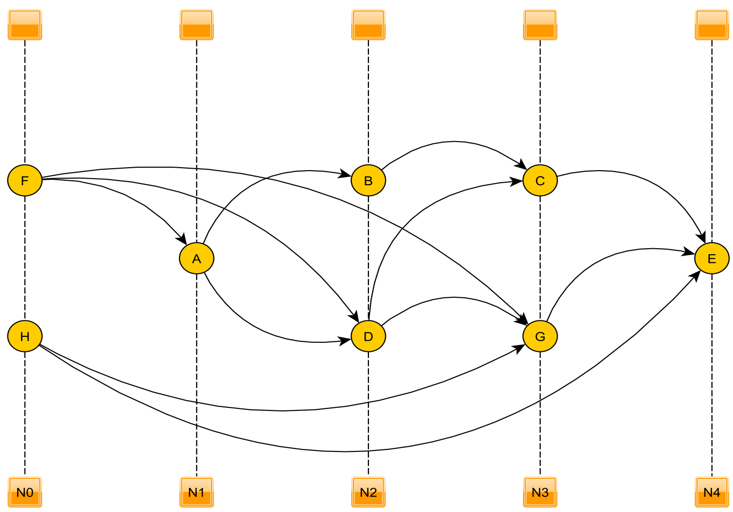
1. On a les dictionnaires suivants :

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$P(x)$	F	A	B,D	A,F	C,G,H	–	D,F,H	–
$S(x)$	B,D	C	E	C,G	–	A,D,G	E	E,G

2. Les niveaux sont :

$$N_0 = \{F, H\},\ N_1 = \{A\},\ N_2 = \{B, D\},\ N_3 = \{C, G\},\ N_4 = \{E\}.$$

3.



Exercice 3

1. Établissons le dictionnaire des précédentset des suivants du graphe :

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$P(x)$	B,G	–	A,B,D	A	A,D	D	E,F	G,I	A,G,J	A,B	B,J
$S(x)$	C,D,E,I,J	A,C,K,J	–	C,E,F	G	G	A,H,I	–	H	I,K	–

2. On remarque rapidement que les seuls circuits du graphe sont (A,E,G,A), (A,D,F,G,A) et (A,D,E,G,A). La présence de circuits dans un graphe interdit l'ordonnancement par niveaux de ce dernier.
3. On élimine l'arc (G,A). Il n'y a donc plus de circuit.
   (a) Le dictionnaire précédent devient alors :

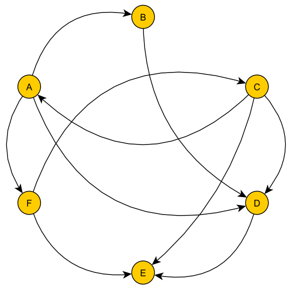
x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$P(x)$	B	–	A,B,D	A	A,D	D	E,F	G,I	A,G,J	A,B	B,J
$S(x)$	C,D,E,I,J	A,C,K,J	–	C,E,F	G	G	H,I	–	H	I,K	–

   (b) L'ordonnancement par niveaux est désormais possible. On a

$$N_0 = \{B\},\ N_1 = \{A\},\ N_2 = \{D, J\},\ N_3 = \{C, E, F\},\ N_4 = \{G\},\ N_5 = \{I\},\ N_6 = \{H\}.$$

Exercice 4

1. (a) Une représentation sagittale du graphe est donnée par :



(b),(c) La représentation cartésienne et la matrice booléenne sont données respectivement par :

	A	B	C	D	E	F
A		⋆		⋆		⋆
B				⋆		
C	⋆			⋆	⋆	
D					⋆	
E						
F			⋆		⋆	

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (A,F,C,A) étant un circuit, le graphe ne peut être ordonnancé par niveaux..
3. (a) Les dictionnaires sont donnés par le tableau

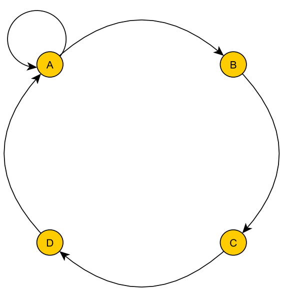
x	A	B	C	D	E	F
$P(x)$	C	A	F	A,B,C	C,D,F	–
$S(x)$	B,D	D	A,D,E	E	–	C,E

   (b) Les niveaux du graphe sont

$$N_0 = \{F\},\ N_1 = \{C\},\ N_2 = \{A\},\ N_3 = \{B\},\ N_4 = \{D\},\ N_5 = \{E\}.$$

Exercice 5

1. On propose $G = \{(A, A), (A, B), (B, C), (C, D), (D, A)\}$.
2. (a)



(b),(c) La représentation cartésienne et la matrice booléenne sont données respectivement par :

	A	B	C	D
A	⋆	⋆		
B			⋆	
C				⋆
D	⋆			

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Les dictionnaires sont donnés par le tableau

x	A	B	C	D
$P(x)$	A,D	A	B	C
$S(x)$	B,A	C	D	A

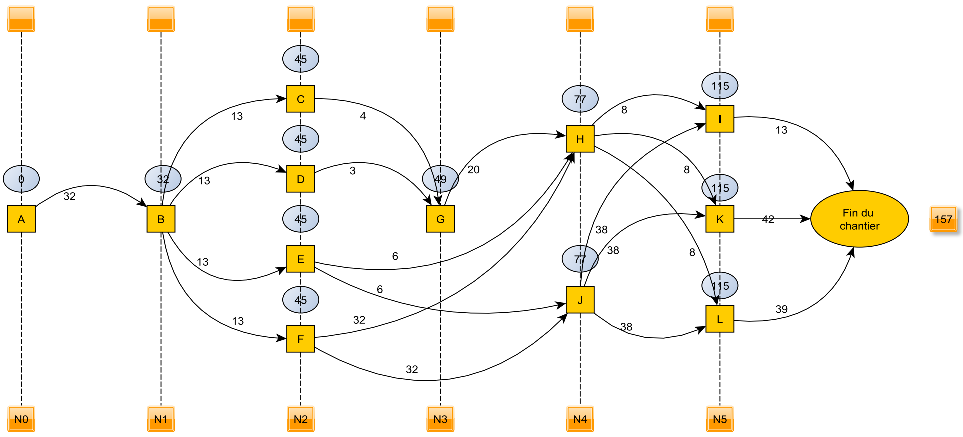
Exercice 6 On met en place tout d'abord le dictionnaire des précédents et des suivants :

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
$P(x)$	–	A	B	B	B	B	C,D	E,F,G	H,J	E,F,G	H,J	H,J
$S(x)$	B	C,D,E,F	G	G	H,J	H,J	H,J	I,K,L	–	I,K,L	–	–

On ordonnance ensuite le graphe par niveaux :

$$N_0 = \{A\},\ N_1 = \{B\},\ N_2 = \{C, D, E, F\},\ N_3 = \{G\},\ N_4 = \{H, J\},\ N_5 = \{I, K, L\}.$$

Il devient alors assez simple de déterminer la durée minimale du projet grâce à l'algorithme de Ford (pour le maximum), qui est de 157 semaines.

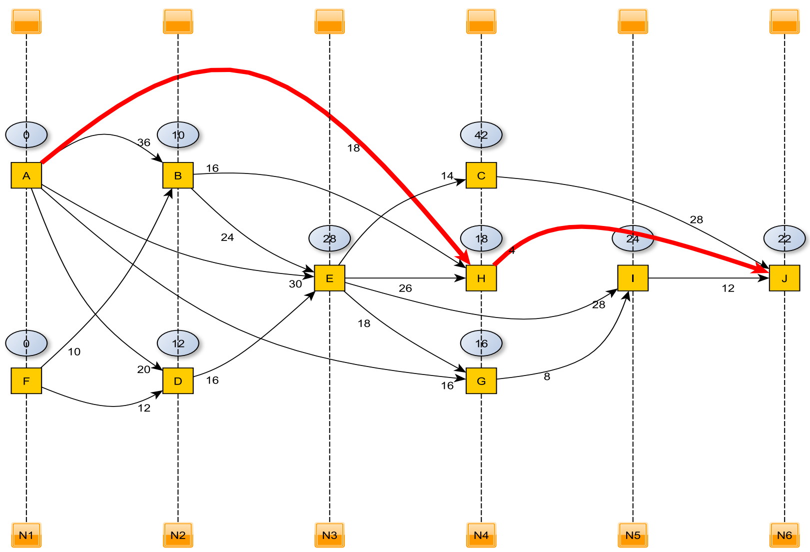


Exercice 7

1. Il suffit afin d'établir le dictionnaire des précédents de lire le tableau selon ses colonnes. On en profite pour donner également le dictionnaire des suivants qu'on obtient en lisant le tableau selon ses lignes.

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$P(x)$	–	A,F	E	A,F	A,B,D	–	A,E	A,B,E	E,G	C,H,I
$S(x)$	B,D,E,G,H	E,H	J	E	C,G,H,I	B,D	I	J	J	–

2. (a) En utilisant la technique des sommets exempts de précédents, on obtient :
$$N_0 = \{A, F\},\ N_1 = \{B, D\},\ N_2 = \{E\},\ N_3 = \{C, H, G\},\ N_4 = \{I\},\ N_5 = \{J\}.$$
   (b) Voir la représentation sagittale du graphe ordonnancé par niveaux ci-après.
3. Le chemin que doit emprunter un employé désirant se rendre du point A au point J en un temps minimal est (A,H,J). La durée minimale est de 22 minutes (on a appliqué l'algorithme de Ford pour le minimum).



Exercice 8 On ordonnance tout d'abord le graphe par niveaux. On donne ci-dessous le dictionnaire des précédents :

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$P(x)$	$-$	x_1	x_1, x_2	x_2	x_2, x_3, x_6	x_3	x_3	x_4, x_5	x_5, x_6, x_7, x_8	x_8, x_9

On a donc les niveaux

$$N_0 = \{x_1\},\ N_1 = \{x_2\},\ N_2 = \{x_3, x_4\},\ N_3 = \{x_6, x_7\},\ N_4 = \{x_5\},\ N_5 = \{x_8\},\ N_6 = \{x_9\},\ N_7 = \{x_{10}\}.$$

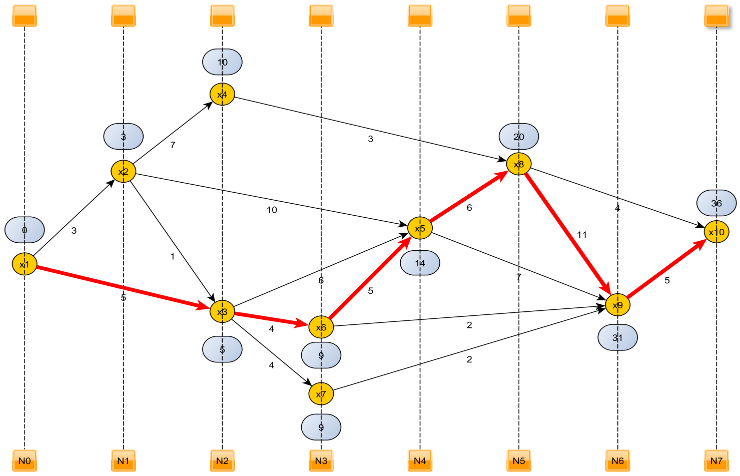
On en déduit la représentation sagittale du graphe ordonnancé ci-après.

1. Le chemin minimal allant de x_1 à x_{10} est obtenu en appliquant l'algorithme de Ford (pour le minimum) à chacun des sommets du graphe soit :

   Initialisation : : $\alpha_1 = 0$
   Boucle : Pour $j = 2, \ldots, 10$,

   $$\alpha_j = \min_{i/x_i \in P(x_j)} (\alpha_i + v_{ij})$$

   On trouve deux chemins minimaux : $(x_1, x_2, x_3, x_6, x_9, x_{10})$ et $(x_1, x_2, x_3, x_7, x_9, x_{10})$, de longueur minimale 15.

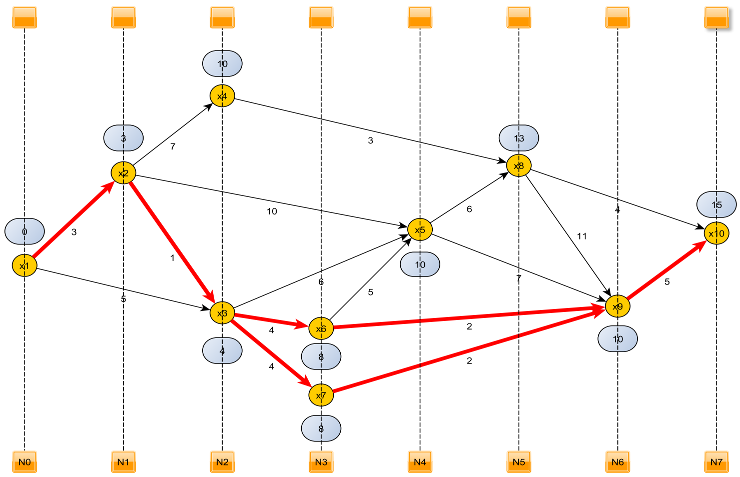


2. Le chemin maximal allant de x_1 à x_{10} est obtenu en appliquant l'algorithme de Ford (pour le maximum) à chacun des sommets du graphe soit :

   Initialisation : : $\alpha_1 = 0$
   Boucle : Pour $j = 2, \ldots, 10$,

   $$\alpha_j = \max_{i/x_i \in P(x_j)} (\alpha_i + v_{ij})$$

   On trouve un chemin maximal : $(x_1, x_3, x_6, x_5, x_8, x_9, x_{10})$, de longueur maximale 36.



Les contextes d'entreprise peuvent être nombreux et variés : on peut minimiser ou maximiser des problèmes de temps de transport, de coûts de transport, de charges maximales. . .

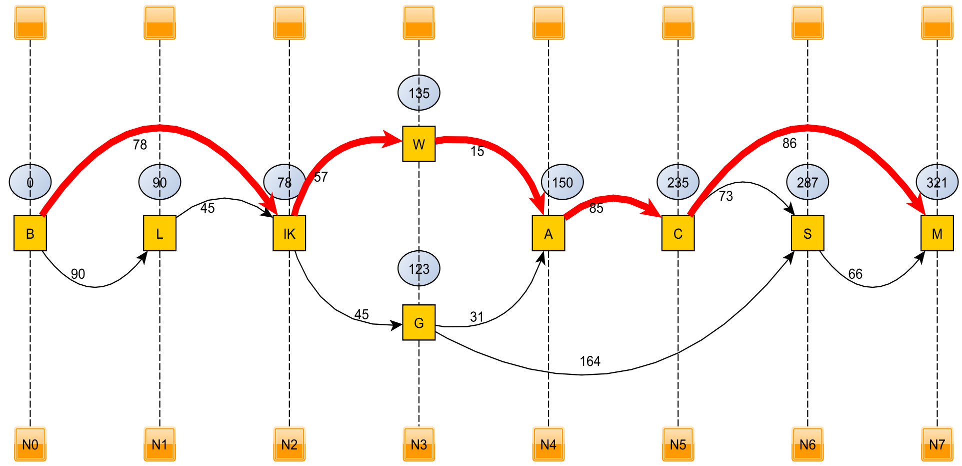
Exercice 9 Ordonnançons le graphe par niveaux. On a le dictionnaire

x	B	L	IK	W	A	G	S	C	M
$P(x)$	–	B	B,L	L,IK	W,G	IK	G,C	A	C,S

Les niveaux sont donc

$$N_0 = \{B\},\ N_1 = \{L\},\ N_2 = \{IK\},\ N_3 = \{W, G\},\ N_4 = \{A\},\ N_5 = \{C\},\ N_6 = \{S\},\ N_7 = \{M\}.$$

On déduit du graphe donné sous sa forme ordonnancée ci-après que l'itinéraire préconisé est (B,IK,W,A,C,M) de longueur 321 km (on a utilisé l'algorithme de Ford pour le minimum).



Exercice 10

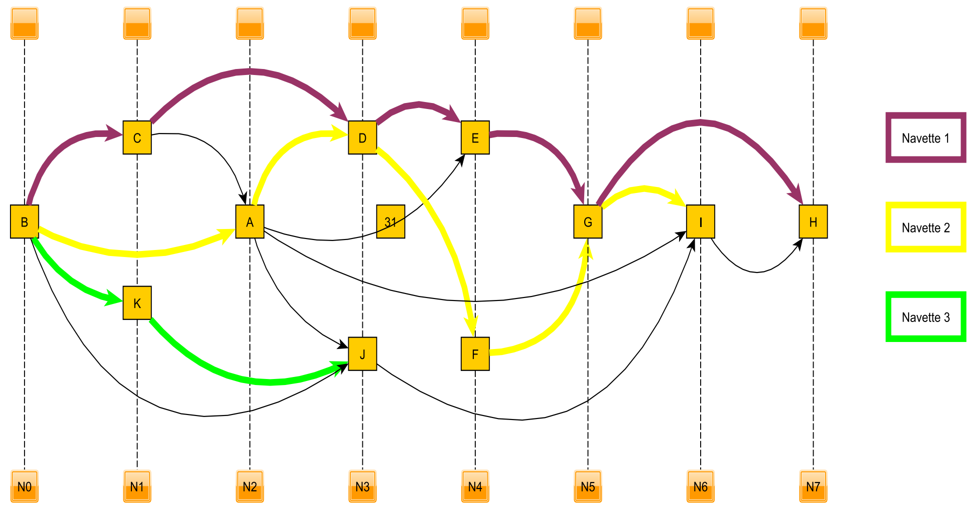
1. Ordonnançons le graphe par niveaux. On a le dictionnaire

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$P(x)$	B,C	–	B	A,C	A,D	D	E,F	G,I	A,G,J	A,B,K	B
$S(x)$	D,E,I,J	A,C,J,K	A,D	E,F	G	G	H,I	–	H	I	J

et les niveaux :

$$N_0 = \{B\},\ N_1 = \{C, K\},\ N_2 = \{A\},\ N_3 = \{D, J\},\ N_4 = \{E, F\},\ N_5 = \{G\},\ N_6 = \{I\},\ N_7 = \{H\}.$$

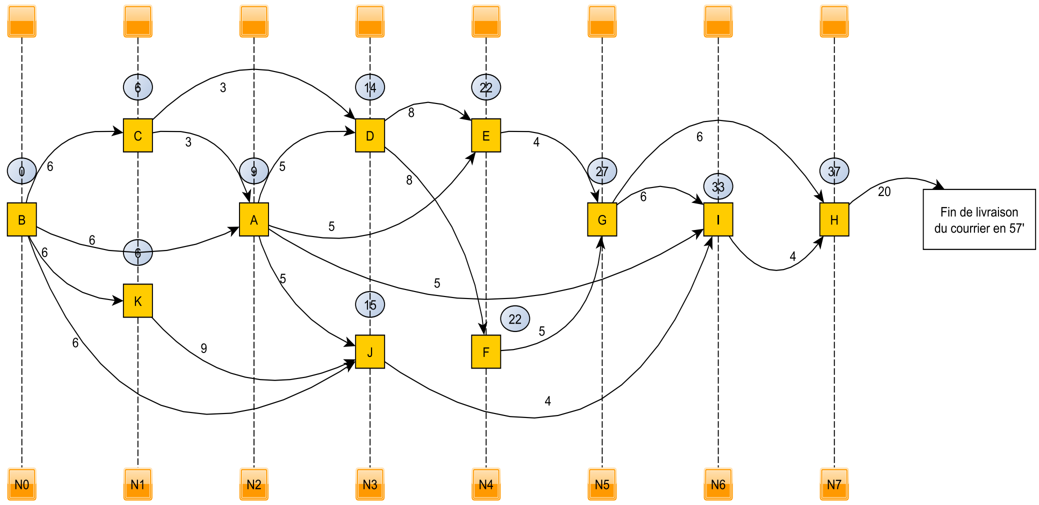
(a) Une fois le graphe représenté sous sa forme ordonnancée, on peut estimer le nombre minimum de chauffeurs permettant d'acheminer le courrier, en l'occurrence 3 :



(b) La navette "1" parcourt 500m, la navette "2" 500m et la navette "3" 200m. La distance totale parcourue est égale à $500 + 500 + 200 = 1200$m.

(c) Les navettes 1 et 2 desservent chacune 6 entrepôts. Les chemins empruntés sont (B,C,D,E,G,H) et (B,A,D,F,G,I).

2. On reprend le graphe précédent auquel on applique l'algorithme de Ford (pour le maximum) :



La durée minimale moyenne de livraison du courrier dans cette entreprise est de 57 minutes.

Exercice 11

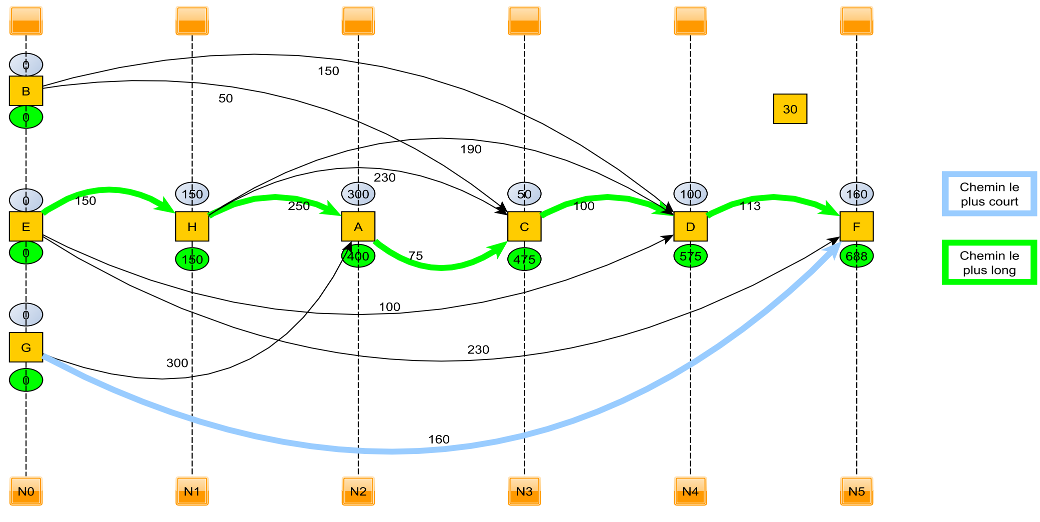
1. On a les dictionnaires

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$P(x)$	G,H	–	A,B,H	B,C,E,H	–	D,E,G	–	E
$S(x)$	C	C,D	D	F	D,F,H	–	A,F	A,C,D

2. Les niveaux sont

$$N_0 = \{B, E, G\},\ N_1 = \{H\},\ N_2 = \{A\},\ N_3 = \{C\},\ N_4 = \{D\},\ N_5 = \{F\}.$$

3. Le graphe sous sa forme ordonnancée est donné par :



4. Le chemin le plus court est (G,F), de longueur 160m.
5. Le chemin le plus long est (E,H,A,C,D,F), de longueur 688m.