Méthodes d'Optimisation

Licence Professionnelle Logistique

Université du Littoral - Côte d'Opale, Pôle Lamartine

Laurent SMOCH

(smoch@lmpa.univ-littoral.fr)

Septembre 2011

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Méthodes d'Optimisation

Licence Professionnelle Logistique

Ce dont le cours traite :

- l'algorithme de Ford (algorithmes de plus court et de plus long chemin),
- les modèles d'ordonnancement, la méthode MPM et la méthode PERT, les diagrammes de Gantt,
- l'algorithme de Ford-Fulkerson (optimisation du transport de marchandises sur un réseau routier)
- la méthode du simplexe (gestion des disponibilités, des besoins, des coûts unitaires de transfert),
- la méthode du coin nord-ouest,
- l'algorithme du stepping-stone.

Ce dont le cours ne traite pas :

- l'organisation de tournées,
- la programmation dynamique.

Table des matières

Chapitre 1

Quelques rappels sur les graphes

1.1 Initiation à la théorie des graphes

1.1.1 Vocabulaire

(a) Produit cartésien. Carré cartésien

On appelle *produit cartésien* de E par F, l'ensemble noté

$$\boxed{E \times F = \{(x, y)/x \in E,\ y \in F\}}$$

On appelle *carré cartésien* de E, l'ensemble noté

$$\boxed{E \times E = E^2 = \{(x, y)/x \in E,\ y \in E\}}$$

(b) Relation de E dans F

On appelle *relation* $\mathcal{R}$ *de* E *dans* F toute correspondance qui à certains éléments de E associe certains éléments de F. "x est en relation avec y" $(x \in E, y \in F)$ est noté

$$\boxed{x\mathcal{R}y}$$

L'ensemble des couples (x, y) de $E \times F$ tels que $x\mathcal{R}y$ est appelé *graphe* de la relation. On note

$$\boxed{G = \{(x, y) \in E \times F/x\mathcal{R}y\}}$$

On remarque que $G \subset E \times F$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation de E dans F, la *relation réciproque* $\mathcal{R}^{-1}$ est une relation de F dans E définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$$

(c) Relation binaire

Définition 1.1.1 *Une relation binaire* définie sur E est une relation de E dans E qui est dite :

- *réflexive* si :
$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$$
- *symétrique* si :
$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$
- *transitive* si :
$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

(d) Caractérisation de la relation binaire

Une relation binaire est caractérisée

1. par son *graphe*

   Exemple 1.1.1 Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. On se donne
   $$G = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_3)\}$$

2. par sa *représentation sagittale*

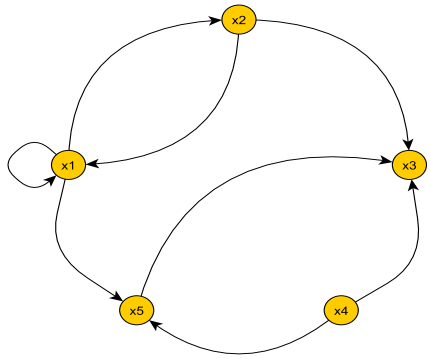


FIGURE 1.1 – Représentation sagittale du graphe

3. par sa *représentation cartésienne*

départ \ arrivée	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\star$	$\star$			$\star$
x_2	$\star$		$\star$		
x_3					
x_4			$\star$		$\star$
x_5			$\star$		

4. par sa *matrice booléenne*

départ \ arrivée	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1
x_5	0	0	1	0	0

5. par son *dictionnaire des sommets*

   (a) des *suivants* ou des *successeurs*

x	$S(x)$
x_1	x_1, x_2, x_5
x_2	x_1, x_3
x_3	
x_4	x_3, x_5
x_5	x_3

Dans le cas où $x\mathcal{R}y$, y est le suivant ou le successeur de x.

(b) des *précédents*

x	$P(x)$
x_1	x_1, x_2
x_2	x_1
x_3	x_2, x_4, x_5
x_4	
x_5	x_1, x_4

Dans le cas où $x\mathcal{R}y$, x est le précédent de y.

Remarque 1.1.1 La relation $\mathcal{R}^{-1}$ est définie par le graphe

$$G' = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_5, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_4), (x_3, x_5)\}$$

En effet, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$. Elle est également définie par sa matrice booléenne

arrivée / départ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0
x_5	1	0	0	1	0

Remarque 1.1.2 Les matrices de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$ ont leurs termes symétriques par rapport à la diagonale principale.

(e) Vocabulaire particulier à la théorie des graphes

Soit X un ensemble de cardinal n, ensemble de points appelés *sommets* tel que

$$X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur X.

(a) Cette relation binaire est caractérisée par son graphe, sa relation sagittale, sa représentation cartésienne, sa matrice booléenne, le dictionnaire des suivants ou des précédents. On note

$$\boxed{G = (X, \mathcal{R})}$$

(b) On appelle *boucle* tout couple (A_p, A_p) du graphe donc avec $A_p\mathcal{R}A_p$.

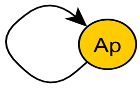


Figure 1.2 – Une boucle

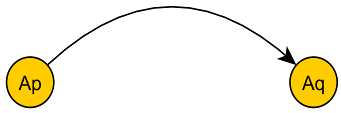


Figure 1.3 – Un arc

(c) On appelle *arc* tout couple de points distincts du graphe donc tout couple (A_p, A_q) avec $A_p \neq A_q$ et $A_p \mathcal{R} A_q$.

(d) On appelle *arête* toute partie $\{A_p, A_q\}$ avec $A_p \neq A_q$ et $A_p \mathcal{R} A_q$ ou $A_q \mathcal{R} A_p$.

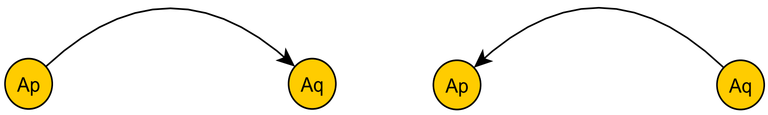


Figure 1.4 – Une arête

(e) On appelle arcs *adjacents* deux arcs (A_p, A_q), (A_q, A_r) avec $A_p \mathcal{R} A_q$ et $A_q \mathcal{R} A_r$. Les sommets A_p, A_q et A_r sont des sommets adjacents.

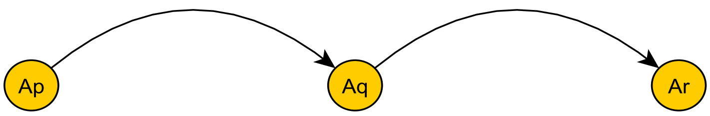


Figure 1.5 – Arcs adjacents

Remarque 1.1.3 : Si on a le graphe suivant : les arcs (A_p, A_q) et (A_q, A_r) ne sont pas adjacents.

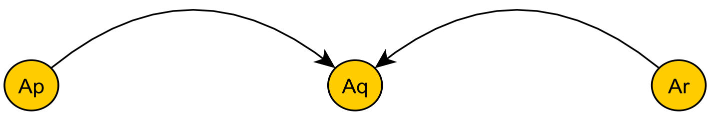


Figure 1.6 – Arcs non adjacents

(f) On appelle *chemin* une suite de sommets adjacents permettant de passer d'une manière continue d'un sommet à l'autre, c'est-à-dire une suite non vide d'arcs (A_i, A_j) et (A_j, A_k), l'extrémité de chacun d'eux coïncidant avec l'orgine de l'arc suivant (sauf pour le dernier arc de la suite).

- Un chemin est *simple* s'il ne contient pas deux fois le même arc.
- Un chemin est *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin est *hamiltonien* s'il passe par tous les sommets une fois et une seule.

Exemple 1.1.2 Reprenons l'exemple 1.1.1,

. (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_3), (x_1, x_2, x_1) et $(x_1, x_2, x_1, x_5, x_3)$ sont des chemins,

. (x_1, x_2, x_3) est un chemin élémentaire,

. $(x_1, x_2, x_1, x_5, x_3)$ n'est pas élémentaire.

(g) On appelle *circuit* un chemin où l'origine et l'extrémité sont confondues.

Exemple 1.1.3 Dans l'exemple 1.1.1, (x_1, x_2, x_1) est un circuit, d'origine x_1 et d'extrémité x_1.

Remarque 1.1.4 Une boucle est un circuit : (x_1, x_1).

(h) On appelle *chaîne* une suite d'arêtes adjacentes.

Exemple 1.1.4 Dans l'exemple 1.1.1, $\{x_1, x_2, x_3\}$ et $\{x_1, x_5, x_4, x_3, x_2\}$ sont des chaînes.

(i) Soient deux sommets distincts A_i et A_j. S'il existe au moins un chemin de A_i à A_j, on dit que A_i est un *ascendant* de A_j et A_j un *descendant* de A_i.

Exemple 1.1.5 Dans l'exemple 1.1.1, (x_1, x_2, x_3) est un chemin, x_1 est un ascendant de x_3, x_2 est aussi ascendant de x_3 et x_3 est un descendant de x_1.

Remarque 1.1.5 On ne confondra pas suivant et descendant, ascendant et précédent. En effet, si l'on considère dans l'exemple 1.1.1, le chemin (x_1, x_2, x_3) x_1 et x_2 sont ascendants de x_3 mais

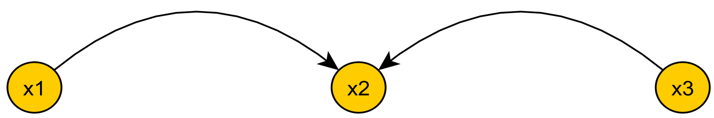


FIGURE 1.7 – Ascendants et précédents dans l'exemple 1.1.1

x_3 admet un unique précédent qui est x_2. x_3 est le descendant de x_1 et x_2 mais x_3 n'est pas le suivant de x_1.

Exercice 1 On se donne la relation binaire définie par l'ensemble de sommets $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et le graphe

$$G = \{(x_1, x_2); (x_1, x_5); (x_2, x_3); (x_2, x_4); (x_4, x_3); (x_4, x_4); (x_4, x_5)\}$$

Caractériser cette relation binaire par

1. sa représentation sagittale,
2. sa représentation cartésienne,
3. sa matrice booléenne.

1.1.2 Niveaux des sommets d'un graphe sans circuit

Soit $G = (X, \mathcal{R})$ un graphe **sans circuit** donc nécessairement sans boucle.
On associe à tout sommet x_i un nombre entier $r(x_i)$ appelé *rang* ou *niveau* du sommet x_i défini de la façon suivante.

1. Soit N_0 l'ensemble des sommets exempts de précédent. Pour tout sommet x_i de N_0, on pose $r(x_i) = 0$. N_0 est l'ensemble des sommets de niveau 0.

Exemple 1.1.6 dans l'exemple 1.1.1, en supprimant les boucles (x_1, x_1) et (x_2, x_1) (afin d'éviter les boucles et les circuits), on obtient le dictionnaire suivant :

$X; \mathcal{R}$

x	$P(x)$
x_1	
x_2	x_1
x_3	x_2, x_4, x_5
x_4	
x_5	x_1, x_4

La représentation sagittale du graphe est donnée par

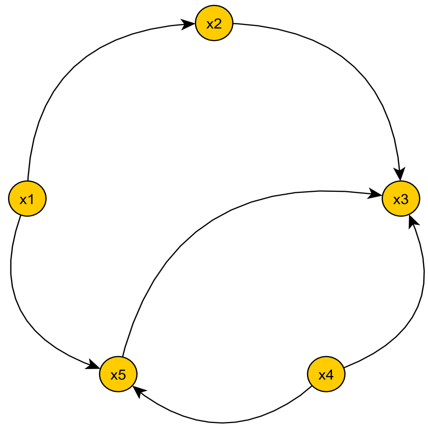


FIGURE 1.8 – Représentation sagittale du graphe - Exemple 1.1.6

x_1 et x_4 n'ont pas de précédent donc

$$N_0 = \{x_1, x_4\} \text{ avec } r(x_1) = r(x_4) = 0$$

2. On supprime dans X (l'ensemble des sommets du graphe) les points de N_0 (ou les points de niveau 0). On obtient un ensemble X_1. G_1 est défini comme étant la restriction du graphe de $\mathcal{R}$ à X_1. Soit N_1 l'ensemble des sommets de X_1 exempts de précédent. Pour tout sommet x_i de N_1, on pose $r(x_i) = 1$. N_1 est l'ensemble des sommets de niveau 1.

Remarque 1.1.6 Les précédents des sommets de N_1 sont les sommets de N_0.

Dans l'exemple, on a $N_0 = \{x_1, x_4\}$ et $X_1 = \{x_2, x_3, x_5\}$. On supprime dans le dictionnaire des précédents les sommets x_1 et x_4 :

$X_1; \mathcal{R}$

x	$P(x)$
x_2	
x_3	x_2, x_5
x_5	

Les sommets exempts de précédent sont maintenant x_2 et x_5. Ainsi,

$$N_1 = \{x_2, x_5\} \text{ avec } r(x_2) = r(x_5) = 1$$

3. On supprime dans X_1 les sommets de N_1 (les sommets de niveau 1). On obtient un ensemble X_2 et G_2 est la restriction du graphe de $\mathcal{R}$ à x_2.
Soit N_2 l'ensemble des points de X_2 exempts de précédent. Pour tout point x_i de N_2, on pose $r(x_i) = 2$ et N_2 est l'ensemble des sommets de niveau 2.

Dans l'exemple, on a $N_1 = \{x_2, x_5\}$ et $X_2 = \{x_3\}$. On supprime dans le dictionnaire des précédents les sommets x_2 et x_5 :

$X_2; \mathcal{R}$

x	$P(x)$
x_3	

Le sommet x_3 est exempt de précédent donc

$$N_2 = \{x_3\} \text{ avec } r(x_3) = 2.$$

4. Les itérations cessent dès que tous les sommets de X sont classés par niveaux. Si $Card(X) = n$, on a

$$\boxed{\forall x_i \in X,\ r(x_i) \leq n}$$

5. Le *graphe ordonnancé par niveaux* est donné par :

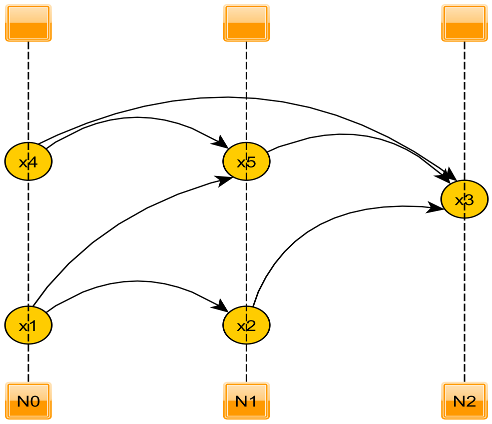


FIGURE 1.9 – Graphe ordonnancé - Exemple 1.1.6

Il est équivalent au graphe de la figure 1.8

1.1.3 Exemples

Exemple 1.1.7 On se donne l'ensemble de sommets $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ainsi que la représentation sagittale du graphe considéré :

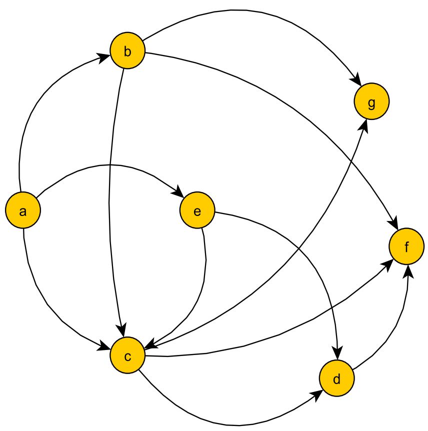


FIGURE 1.10 – Représentation sagittale - Exemple 1.1.7

On donne les dictionnaires des précédents et des suivants des sommets du graphe :

x	$S(x)$
a	b, c, e
b	g, f, c
c	d, f, g
d	f
e	c, d
f	
g	

x	$P(x)$
a	
b	a
c	a, b, e
d	c, e
e	a
f	b, c, d
g	b, c

- Niveau 0 :
  On obtient à l'aide du dictionnaire des précédents $N_0 = \{a\}$; en effet, "a" n'a pas de précédent. On pose $r(a) = 0$.
- Niveau 1 :
  $X_1 = X - N_0 = \{b, c, d, e, f, g\}$

  $X_1, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
b	
c	b, e
d	c, e
e	
f	b, c, d
g	b, c

  Les sommets b et e n'ont pas de précédent donc $N_1 = \{b, e\}$ avec $r(b) = r(e) = 1$.
- Niveau 2 :
  $X_2 = X_1 - N_1 = \{c, d, f, g\}$

  $X_2, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
c	
d	c
f	c, d
g	c

  Le sommet c n'a pas de précédent donc $N_2 = \{c\}$ avec $r(c) = 2$.
- Niveau 3 :
  $X_3 = X_2 - N_2 = \{d, f, g\}$

  $X_3, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
d	
f	d
g	

  Les sommets d et g n'ont pas de précédent donc $N_3 = \{d, g\}$ avec $r(d) = r(g) = 3$.
- Niveau 4 :
  $X_4 = X_3 - N_3 = \{f\}$

  $X_4, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
f	

  Le sommet f n'a pas de précédent donc $N_4 = \{f\}$ avec $r(f) = 4$.

Le graphe ordonnancé en niveaux est donné par :

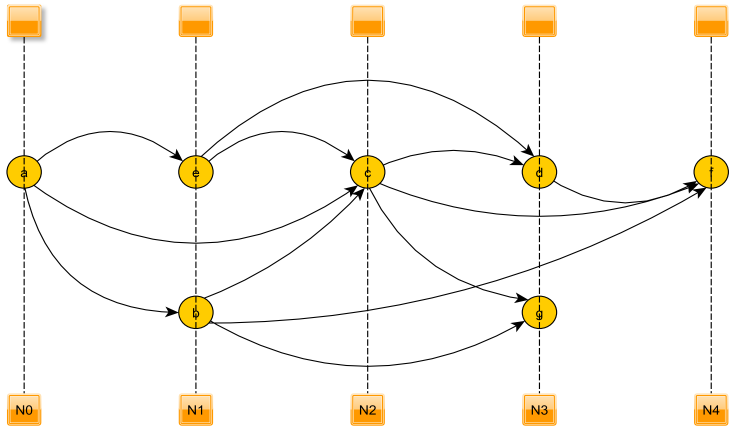


FIGURE 1.11 – Graphe ordonnancé - Exemple 1.1.7

Exemple 1.1.8 On se donne l'ensemble de sommets

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

ainsi que la représentation sagittale du graphe considéré :

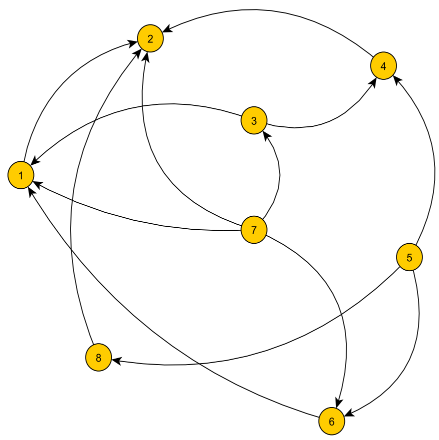


FIGURE 1.12 – Diagramme sagittal - Exemple 1.1.8

On donne le dictionnaire des précédents des sommets du graphe :

x	$P(x)$
1	$3, 6, 7$
2	$1, 4, 7, 8$
3	7
4	$3, 5$
5	
6	$5, 7$
7	
8	5

- Niveau 0 :
  On obtient à l'aide du dictionnaire des précédents $N_0 = \{5, 7\}$; en effet, "5" et "7" n'ont pas de précédent. On pose $r(5) = r(7) = 0$.
- Niveau 1 :

  $X_1 = X - N_0 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

  $X_1, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
1	$3, 6$
2	$1, 4, 8$
3	
4	3
6	
8	

  Les sommets 3, 6 et 8 sont exempts de précédent donc $N_1 = \{3, 6, 8\}$ avec $r(3) = r(6) = r(8) = 1$.
- Niveau 2 :

  $X_2 = X_1 - N_1 = \{1, 2, 4\}$

  $X_2, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
1	
2	$1, 4$
4	

  Les sommets 1 et 4 sont exempts de précédent donc $N_2 = \{1, 4\}$ avec $r(1) = r(4) = 2$.
- Niveau 3 :

  $X_3 = X_2 - N_2 = \{2\}$

  $X_3, \mathcal{R}$

x	$P(x)$
2	

  Le sommet 2 est exempt de précédent donc $N_3 = \{2\}$ avec $r(2) = 3$.

  On en déduit le graphe ordonnancé suivant :

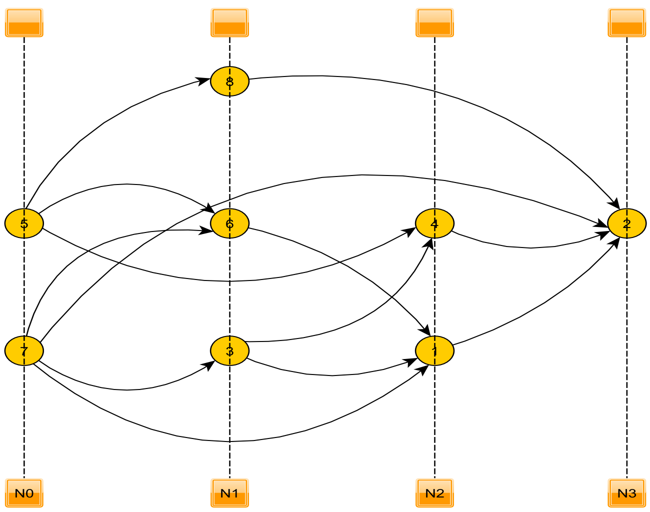


FIGURE 1.13 – Graphe ordonnancé - Exemple 1.1.8

Remarque 1.1.7 Si x_i est de niveau $p \neq 0$, i.e. $r(x_i) = p$, p est le nombre d'arcs du plus long chemin joignant un sommet de niveau 0 au sommet x_i.

Dans l'exemple 1.1.8 précédent,

- Niveau 0 :
  7 et 5 n'ont pas de précédent, $r(5) = r(7) = 0$.
- Niveau 1 :
  . $r(3) = 1$, le seul chemin de longueur 1 joignant 7 ou 5 à 3 est $(7, 3)$.
  . $r(6) = 1$, il y a deux chemins de longueur 1 (donc contenant un seul arc) ayant pour extrémité 6 à savoir $(7, 6)$ et $(5, 6)$.
  . $r(8) = 1$, le seul chemin de longueur 1 joignant 7 ou 5 à 8 est $(5, 8)$.
- Niveau 2 :
  . $r(1) = 2$, les chemins $(7, 3, 1)$, $(7, 1)$, $(7, 6, 1)$ et $(5, 6, 1)$ sont constitués d'un ou deux arcs.
  . $r(4) = 2$, les chemins $(5, 4)$ et $(7, 3, 4)$ sont consitués d'un ou deux arcs.
- Niveau 3 :
  On a $r(2) = 3$. Les chemins transformant 5 ou 7 en 2 sont $(7, 3, 1, 2)$, $(7, 3, 4, 2)$, $(7, 1, 2)$, $(7, 6, 1, 2)$, $(5, 8, 2)$, $(5, 4, 2)$ et $(6, 5, 1, 2)$ et sont constitués de deux ou trois arcs.

Définition 1.1.2 *Si $r(x_i) = p \neq 0$, p est le nombre maximum d'arcs d'un chemin d'origine un sommet de niveau 0, d'extrémité ce point x_i.*

1.1.4 Exercices

Exercice 2 Huit entrepôts reliés par un réseau routier, sont mis à contribution pour fabriquer un produit A. Le tableau ci-dessous indique les routes menant à chacun de ces entrepôts.

Départ \ Arrivée	A	B	C	D	E	F	G	H
A		$\star$		$\star$				
B			$\star$					
C					$\star$			
D			$\star$				$\star$	
E								
F	$\star$			$\star$			$\star$	
G					$\star$			
H					$\star$		$\star$	

1. Établir le dictionnaire des précédents puis le dictionnaire des suivants des sommets du graphe.
2. Utiliser le dictionnaire des précédents pour ordonnancer le graphe par niveaux.
3. Représenter le graphe sous sa forme ordonnancée.

Exercice 3 On considère le graphe ci-dessous :

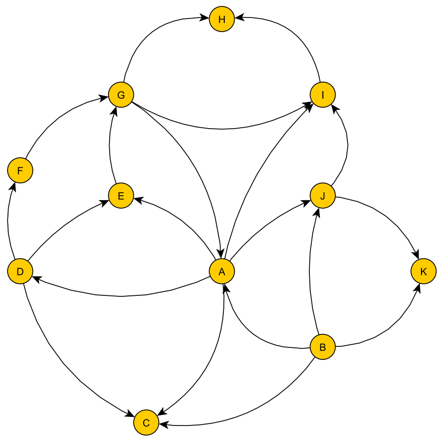


FIGURE 1.14 – Diagramme sagittal - Exercice 3

1. Montrer que le graphe admet des circuits tout en les précisant. Qu'est-ce que cela implique sur l'ordonnancement par niveaux de ce graphe ?
2. On élimine l'arc (A, G)
   (a) Déterminer le dictionnaire des précédents et des suivants de chacun des sommets du graphe.
   (b) Ordonnancer le graphe par niveaux.

Exercice 4 On se donne la relation binaire définie par l'ensemble de sommets $E = \{A, B, C, D, E, F\}$ et le graphe

$$G = \{(A, B); (A, D); (A, F); (B, D); (C, A); (C, D); (C, E); (D, E); (F, C); (F, E)\}.$$

1. Caractériser cette relation binaire par
   (a) sa représentation sagittale,
   (b) sa représentation cartésienne,
   (c) sa matrice booléenne.
2. Est-il possible selon vous, d'ordonnancer le graphe par niveaux et pourquoi ?
3. On élimine l'arc (A, F).
   (a) Déterminer le dictionnaire des précédents et des suivants de chacun des sommets du graphe.
   (b) Ordonnancer le graphe par niveaux.

Exercice 5

1. Proposez un exemple de graphe contenant 4 sommets, une boucle, un circuit constitué d'au moins trois arcs et un chemin hamiltonien. Voux exprimerez ce graphe sous la forme $G = (X, R)$ où X est l'ensemble constitué des sommets du graphe et $\mathcal{R}$ est la relation binaire définie sur X.
2. Caractérisez ce graphe par
   (a) sa relation sagittale,
   (b) sa représentation cartésienne,
   (c) sa matrice booléenne,
   (d) son dictionnaire des précédents,
   (e) son dictionnaire des suivants.

1.2 Graphes valués et chemins critiques

1.2.1 Valuations d'un graphe

Définition 1.2.1 *Soit $(X, \mathcal{R})$ un graphe sans boucle. On associe à chaque arc $u = (x_i, x_j)$ du graphe un nombre réel positif négatif ou nul noté $v_{ij} = v(u)$. On appellera ce nombre valuation ou longueur de l'arc même si $v(u) < 0$. Un graphe est dit valué si tout arc est muni d'une longueur.*

Exemple 1.2.1 On considère le graphe suivant

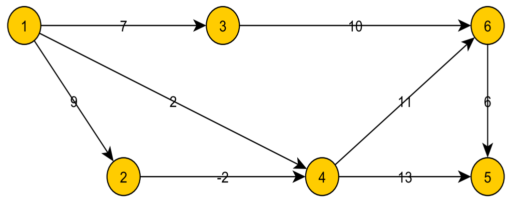


FIGURE 1.15 – Graphe valué - Exemple 1.2.1

Les valuations du graphe sont les suivantes : $v_{13} = 7$, $v_{36} = 10$, $v_{14} = 2$, $v_{12} = 9$, $v_{24} = -2$, $v_{46} = 11$, $v_{45} = 13$, $v_{65} = 6$.

1.2.2 Longueur d'un chemin

Définition 1.2.2 *Soit $(X, \mathcal{R})$ un graphe orienté, sans boucle et valué. La longueur d'un chemin c quelconque est par définition la somme des longueurs des arcs qui composent ce chemin.*

Exemple 1.2.2 Dans l'exemple 1.2.1 précédent,

- la longueur du chemin $(1, 2, 4, 5)$ est $9 + (-2) + 13 = 20$,
- la longueur du chemin $(1, 4, 6, 5)$ est $2 + 11 + 6 = 19$,
- la longueur du chemin $(1, 3, 6, 5)$ est $7 + 10 + 6 = 23$.

Dans la suite du cours, la problématique sera la suivante :

> Soit un graphe valué et sans circuit, à valeurs positives ($v_{ij} > 0$), possédant une entrée notée x_1 et une sortie notée x_n. Le problème que l'on souhaite résoudre consiste à déterminer parmi tous les chemins d'origine x_i, d'extrémité x_n, ceux dont la longueur est *extrémale* (maximale ou minimale).

1.2.3 Chemins minimaux

(a) Stratégie : l'algorithme de Ford

De sommet en sommet, on retient l'arc de plus faible valuation. On associe à chaque sommet x_j un coefficient α_j défini par

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_j = \min[\alpha_i + v_{ij}] \end{array}}$$

où les x_i sont les précédents de x_j.

Remarque 1.2.1 : Les valeurs α_j sont portées au dessus des sommets dans le diagramme sagittal et désignées par $\boxed{\alpha_j}$.

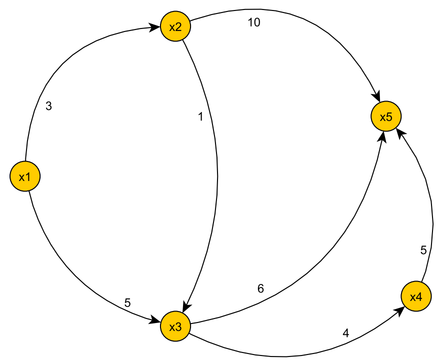


FIGURE 1.16 – Diagramme sagittal - Exemple 1.2.2

(b) Exemple 1.2.2

On considère le graphe ci-dessus :

- $\alpha_1 = 0$
- Le sommet x_2 a un seul précédent x_1 donc
$$\alpha_2 = \min[\alpha_1 + v_{12}] = \min[0 + 3] = 3$$
- Le sommet x_3 a deux précédents x_1 et x_2 donc
$$\alpha_3 = \min[\alpha_1 + v_{13}, \alpha_2 + v_{23}] = \min[0 + 5, 3 + 1] = 4$$
L'arc (x_1, x_3) a pour longueur 5. Le chemin (x_1, x_2, x_3) a pour longueur $3 + 1 = 4$. Par conséquent, le chemin le plus court pour aller de x_1 à x_3 est le chemin (x_1, x_2, x_3).
- Le sommet x_4 a un seul précédent x_3 donc
$$\alpha_4 = \min[\alpha_3 + v_{34}] = \min[4 + 4] = 8$$
- Le sommet x_5 a trois précédents x_2, x_3 et x_4 donc
$$\alpha_5 = \min[\alpha_2 + v_{25}, \alpha_3 + v_{35}, \alpha_4 + v_{45}] = \min[3 + 10, 4 + 6, 8 + 5] = 10$$

Le chemin minimal a pour longueur 10 car $\alpha_5 = 10$.

Pour retrouver les arcs qui constituent le chemin minimal, appelé *chemin critique,* on part de la sortie et on repère l'arc qui donne la valeur α correspondante.

Ainsi $\alpha_5 = 10$ provient de $\alpha_3 + v_{35} = 4 + 6$, on obtient le sommet x_3 ; $\alpha_3 = 4 = \alpha_2 + v_{23}$, on obtient le sommet x_2 ; $\alpha_2 = \alpha_1 + v_{13} = 0 + 3$, on obtient le sommet x_1.
Le chemin critique minimal est alors (x_1, x_2, x_3, x_5), chemin représenté ci-dessous par un trait double sur le diagramme sagittal, chemin d'origine x_1, d'extrémité x_5, il est appelé chemin 1.5 minimal.
Tout arc emprunté par ce chemin extrémal est appelé arc 1-minimal.

En généralisant, un chemin minimal d'origine x_k d'extrémité x_i est appelé *$k.i$ chemin minimal* et tout arc emprunté par ce chemin est appelé *arc k-minimal.*

(c) Exemple 1.2.3

On considère le graphe valué ci-dessous et on souhaite déterminer les chemins de longueur minimale issus du sommet x_1 et aboutissant à un sommet donné et ceci pour tout sommet.
Vérifions que ce graphe est sans circuit et ordonnançons-le en niveaux en utilisant le dictionnaire des précédents.

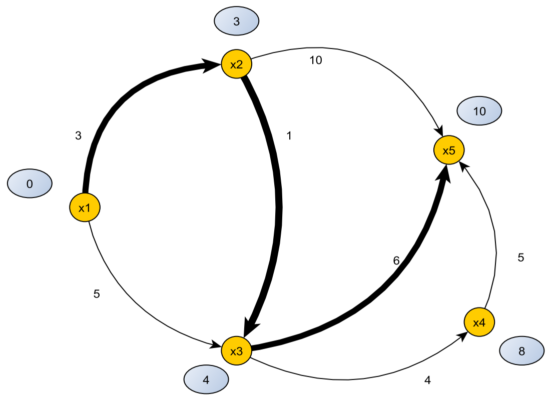


FIGURE 1.17 – Chemin critique minimal - Exemple 1.2.2

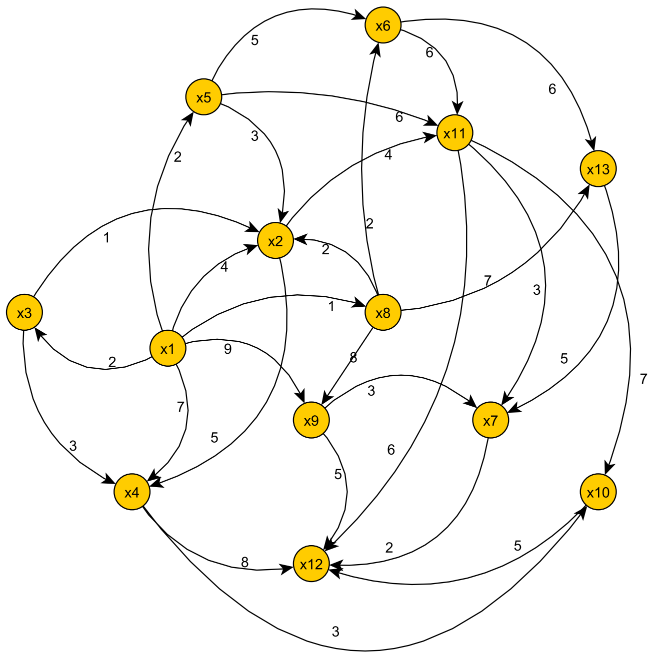


FIGURE 1.18 – Diagramme sagittal - Exemple 1.2.3

sommet x	précédent(s) de x
x_1	–
x_2	x_1, x_3, x_5, x_8
x_3	x_1
x_4	x_1, x_2, x_3
x_5	x_1
x_6	x_5, x_8
x_7	x_9, x_{11}, x_{13}
x_8	x_1
x_9	x_1, x_8
x_{10}	x_4, x_{11}
x_{11}	x_2, x_5, x_6
x_{12}	$x_4, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}$
x_{13}	x_6, x_8

- Niveau N_0 :
  Le sommet x_1 est le seul exempt de précédent donc $N_0 = \{x_1\}$.
  On considère ensuite l'ensemble de sommets
  $$X_1 = X - N_0 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$$
  On "barre" tous les sommets x_1 dans le tableau précédent.

sommet x	précédent(s) de x
x_2	x_3, x_5, x_8
x_3	
x_4	x_2, x_3
x_5	
x_6	x_5, x_8
x_7	x_9, x_{11}, x_{13}
x_8	
x_9	x_8
x_{10}	x_4, x_{11}
x_{11}	x_2, x_5, x_6
x_{12}	$x_4, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}$
x_{13}	x_6, x_8

Remarque 1.2.2 Dans la suite de l'exercice, tous les sommets x_i seront notés i par souci de commodité.

- Niveau N_1 :
  Les sommets 3, 5 et 8 sont exempts de précédent donc $N_1 = \{3, 5, 8\}$.
  On considère ensuite l'ensemble de sommets
  $$X_2 = X_1 - N_1 = \{2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13\}$$
  On "barre" tous les sommets $3, 5, 8$ dans le tableau précédent.

sommet x	précédent(s) de x
2	
4	2
6	
7	$9, 11, 13$
9	
10	$4, 11$
11	$2, 6$
12	$4, 7, 9, 10, 11$
13	6

- Niveau N_2 :
  Les sommets 2, 6 et 9 sont exempts de précédent donc $N_2 = \{2, 6, 9\}$.
  On considère ensuite l'ensemble de sommets
  $$X_3 = X_2 - N_2 = \{4, 7, 10, 11, 12, 13\}$$
  On "barre" tous les sommets $2, 6, 9$ dans le tableau précédent.

sommet x	précédent(s) de x
4	
7	$11, 13$
10	$4, 11$
11	
12	$4, 7, 10, 11$
13	

- Niveau N_3 :
  Les sommets 4, 11 et 13 sont exempts de précédent donc $N_3 = \{4, 11, 13\}$.
  On considère ensuite l'ensemble de sommets
  $$X_4 = X_3 - N_3 = \{7, 10, 12\}$$
  On "barre" tous les sommets $4, 11, 13$ dans le tableau précédent.

sommet x	précédent(s) de x
7	
10	
12	$7, 10$

- Niveau N_4 :
  Les sommets 7 et 10 sont exempts de précédent donc $N_4 = \{7, 10\}$.
  On considère ensuite l'ensemble de sommets
  $$X_5 = X_4 - N_4 = \{12\}$$
  On "barre" tous les sommets $7, 10$ dans le tableau précédent.

sommet x	précédent(s) de x
12	

- Niveau N_5 :
  Le sommet 12 est exempt de précédent donc $N_5 = \{12\}$.

On redessine le graphe en mettant en évidence les niveaux.

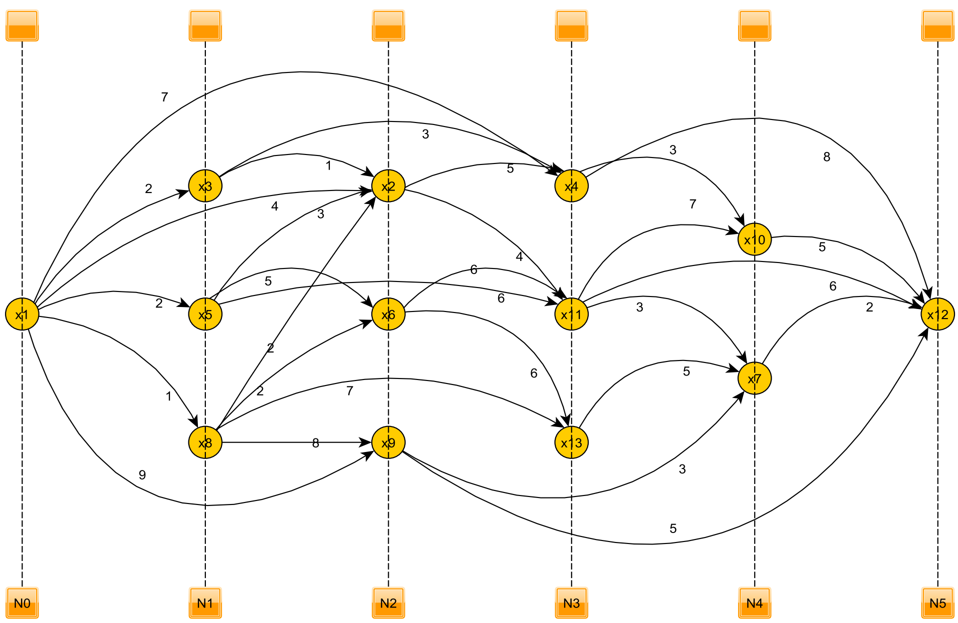


FIGURE 1.19 – Graphe ordonnancé - Exemple 1.2.3

Bien évidemment, on a $r(1) = 0$, $r(3) = r(5) = r(8) = 1$, $r(2) = r(6) = r(9) = 2$, $r(4) = r(11) = r(13) = 3$, $r(7) = r(10) = 4$, $r(12) = 5$.

Déterminons les coefficients α_j de chacun des sommets x_j :

- $\alpha_1 = 0$
- $\alpha_3 = \min[\alpha_1 + v_{13}] = \min[0 + 2] = 2$
- $\alpha_5 = \min[\alpha_1 + v_{15}] = \min[0 + 2] = 2$
- $\alpha_8 = \min[\alpha_1 + v_{18}] = \min[0 + 1] = 1$
- $\alpha_2 = \min[\alpha_3 + v_{32}, \alpha_1 + v_{12}, \alpha_5 + v_{52}, \alpha_8 + v_{82}] = \min[2 + 1, 0 + 4, 2 + 3, 1 + 2] = 3$
- $\alpha_6 = \min[\alpha_5 + v_{56}, \alpha_8 + v_{86}] = \min[2 + 5, 1 + 2] = 3$
- $\alpha_9 = \min[\alpha_1 + v_{19}, \alpha_8 + v_{89}] = \min[0 + 9, 1 + 8] = 9$
- $\alpha_4 = \min[\alpha_1 + v_{14}, \alpha_2 + v_{24}, \alpha_3 + v_{34}] = \min[0 + 7, 3 + 5, 2 + 3] = 5$
- $\alpha_{11} = \min[\alpha_2 + v_{2,11}, \alpha_5 + v_{5,11}, \alpha_6 + v_{6,11}] = \min[3 + 4, 2 + 6, 3 + 6] = 7$
- $\alpha_{13} = \min[\alpha_6 + v_{6,13}, \alpha_8 + v_{8,13}] = \min[3 + 6, 1 + 7] = 8$
- $\alpha_{10} = \min[\alpha_4 + v_{4,10}, \alpha_{11} + v_{11,10}] = \min[5 + 3, 7 + 7] = 8$
- $\alpha_7 = \min[\alpha_{11} + v_{11,7}, \alpha_{13} + v_{13,7}, \alpha_9 + v_{97}] = \min[7 + 3, 8 + 5, 9 + 3] = 10$
- $\alpha_{12} = \min[\alpha_4 + v_{4,12}, \alpha_{10} + v_{10,12}, \alpha_{11} + v_{11,12}, \alpha_7 + v_{7,12}, \alpha_9 + v_{9,12} = \min[5+8, 8+5, 7+6, 10+2, 9+5] = 12$

On peut maintenant compléter le graphe précédent :

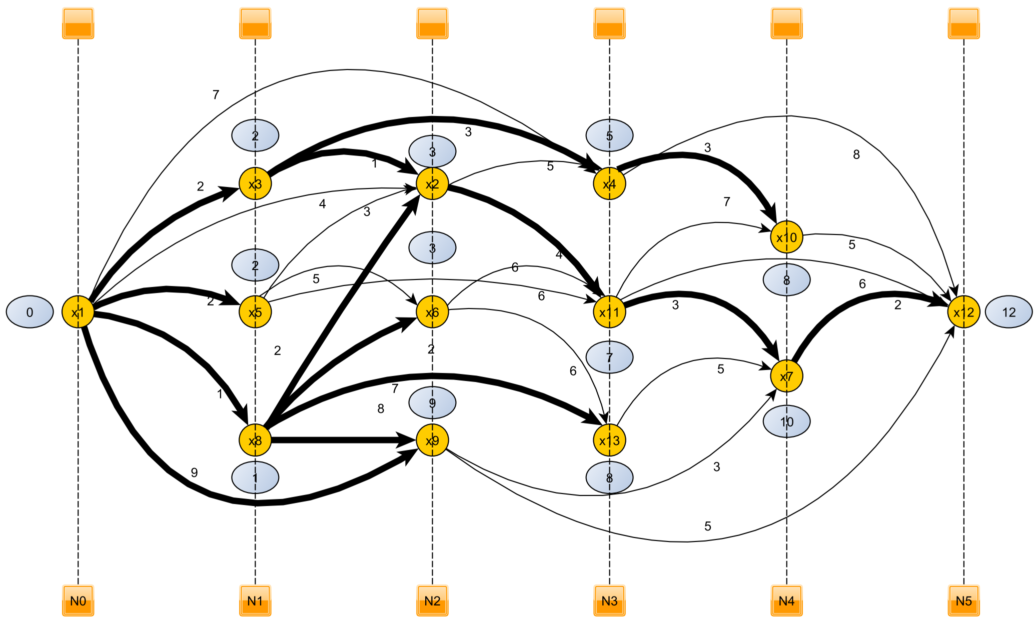


FIGURE 1.20 – Chemins minimaux - Exemple 1.2.3

> Pour chaque sommet, la valeur donnée indique la longueur du plus court chemin reliant le niveau N_0 à ce sommet.

Il y a deux plus courts chemins reliant x_1 à x_2 : (x_1, x_3, x_2) et (x_1, x_8, x_2) de longueur 3. Pour les chemins de longueur minimale reliant x_1 à x_{12}, on part de x_{12}, on chemine dans le sens contraire des flèches dans le graphe 1-minimal et on retrouve ainsi les chemins :

$$(x_1, x_3, x_2, x_{11}, x_7, x_{12}) \text{ et } (x_1, x_8, x_2, x_{11}, x_7, x_{12})$$

Remarque 1.2.3 Sur la figure 1.20, on a repassé en traits épais les arcs 1-minimaux au fur et à mesure qu'ils ont été déterminés. La marque de chaque sommet x_k c'est-à-dire $\boxed{\alpha_k}$ est la longueur d'un plus court chemin reliant le sommet x_1 au sommet considéré x_k. Il n'y a pas qu'un seul chemin reliant le sommet x_1 à un sommet donné de longueur minimale. Par exemple, les chemins $(x_1, x_3, x_2, x_{11}, x_7, x_{12})$ et $(x_1, x_8, x_2, x_{11}, x_7, x_{12})$ sont de longueur 12 et sont les seuls à relier x_1 à x_{12}.

1.2.4 Chemins maximaux

De sommet en sommet, on retient l'arc de plus grande valuation. On associe à chaque sommet x_j un coefficient α_j défini par

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha_1 = 0\\ \alpha_j = \max[\alpha_i + v_{ij}]\end{array}}$$

où les x_i sont les précédents de x_j. α_n représente alors la valeur maximale du chemin entre x_1 et x_n.

Reprenons l'exemple 1.2.3 précédent, le graphe étant ordonnancé par niveaux. Recherchons un graphe 1-maximal. Les calculs sont identiques à l'étude précédente en remplaçant minimum par maximum.

- $\alpha_1 = 0$
- $\alpha_3 = \max[\alpha_1 + v_{13}] = \max[0 + 2] = 2$
- $\alpha_5 = \max[\alpha_1 + v_{15}] = \max[0 + 2] = 2$
- $\alpha_8 = \max[\alpha_1 + v_{18}] = \max[0 + 1] = 1$
- $\alpha_2 = \max[\alpha_3 + v_{32}, \alpha_1 + v_{12}, \alpha_5 + v_{52}, \alpha_8 + v_{82}] = \max[2 + 1, 0 + 4, 2 + 3, 1 + 2] = 5$
- $\alpha_6 = \max[\alpha_5 + v_{56}, \alpha_8 + v_{86}] = \max[2 + 5, 1 + 2] = 7$
- $\alpha_9 = \max[\alpha_1 + v_{19}, \alpha_8 + v_{89}] = \max[0 + 9, 1 + 8] = 9$
- $\alpha_4 = \max[\alpha_1 + v_{14}, \alpha_2 + v_{24}, \alpha_3 + v_{34}] = \max[0 + 7, 5 + 5, 2 + 3] = 10$
- $\alpha_{11} = \max[\alpha_2 + v_{2,11}, \alpha_5 + v_{5,11}, \alpha_6 + v_{6,11}] = \max[5 + 4, 2 + 6, 7 + 6] = 13$
- $\alpha_{13} = \max[\alpha_6 + v_{6,13}, \alpha_8 + v_{8,13}] = \max[7 + 6, 1 + 7] = 13$
- $\alpha_{10} = \max[\alpha_4 + v_{4,10}, \alpha_{11} + v_{11,10}] = \max[10 + 3, 13 + 7] = 20$
- $\alpha_7 = \max[\alpha_{11} + v_{11,7}, \alpha_{13} + v_{13,7}, \alpha_9 + v_{97}] = \max[13 + 3, 13 + 5, 9 + 3] = 18$
- $\alpha_{12} = \max[\alpha_4 + v_{4,12}, \alpha_{10} + v_{10,12}, \alpha_{11} + v_{11,12}, \alpha_7 + v_{7,12}, \alpha_9 + v_{9,12} = \max[10 + 8, 20 + 5, 13 + 6, 18 + 2, 9 + 5] = 25$

Le graphe prend maintenant les valeurs indiquées par la figure 1.21.

Remarque 1.2.4

- Sur la figure 1.21, on a repassé en traits épais les arcs 1-maximaux au fur et à mesure qu'ils ont été déterminés. La marque de chaque sommet x_k c'est-à-dire $\boxed{\alpha_k}$ est la longueur d'un plus long chemin reliant le sommet x_1 au sommet considéré x_k. Il n'y a pas qu'un seul chemin reliant le sommet x_1 à un sommet donné de longueur maximale. Par exemple, le chemin $(x_1, x_5, x_6, x_{11}, x_{10}, x_{12})$ est de longueur 25 et est le seul à relier x_1 à x_{12}. Les chemins reliant x_1 à x_9 sont au nombre de 2 à savoir (x_1, x_9) et (x_1, x_8, x_9), de longueur maximale 9.
- Sur la figure 1.22 ci-après, on a repris le graphe sous sa forme initiale puis on a représenté les plus courts chemins reliant le sommet x_1 au sommet x_{12} en trait pointillé ainsi que le plus long chemin de x_1 à x_{12} en trait double.
- On voit que sous sa forme ordonnancée (lorsque cela est possible), non seulement le graphe est plus lisible, mais permet de mettre en place un procédé très rapide de recherche de chemins extrémaux. Il existe par ailleurs d'autres algorithmes applicables lorsque le graphe présente des circuits. On s'est borné au cas le plus courant.

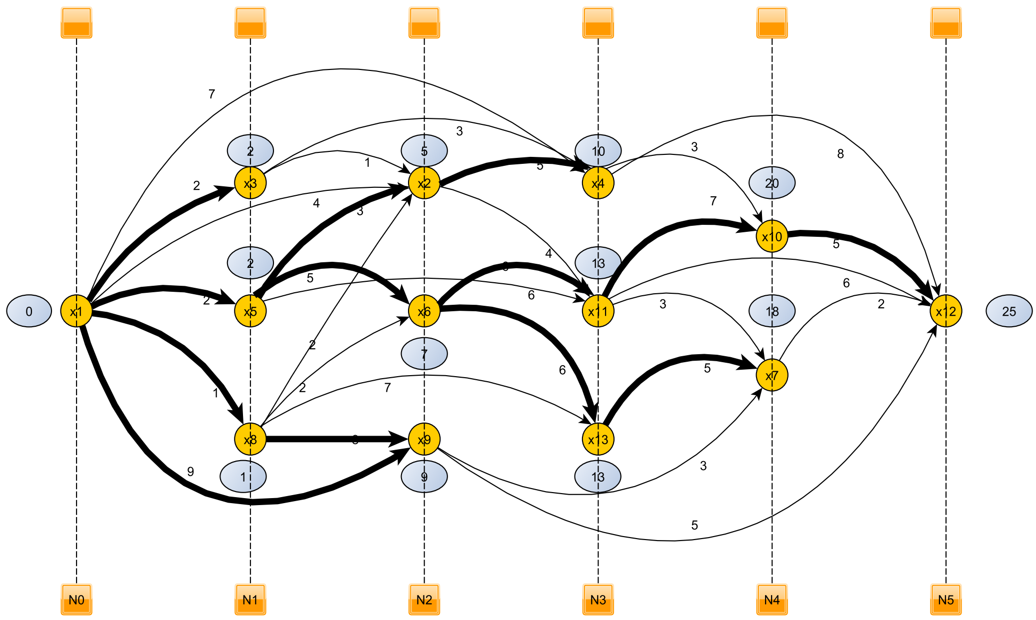


FIGURE 1.21 – Chemins maximaux - Exemple 1.2.3

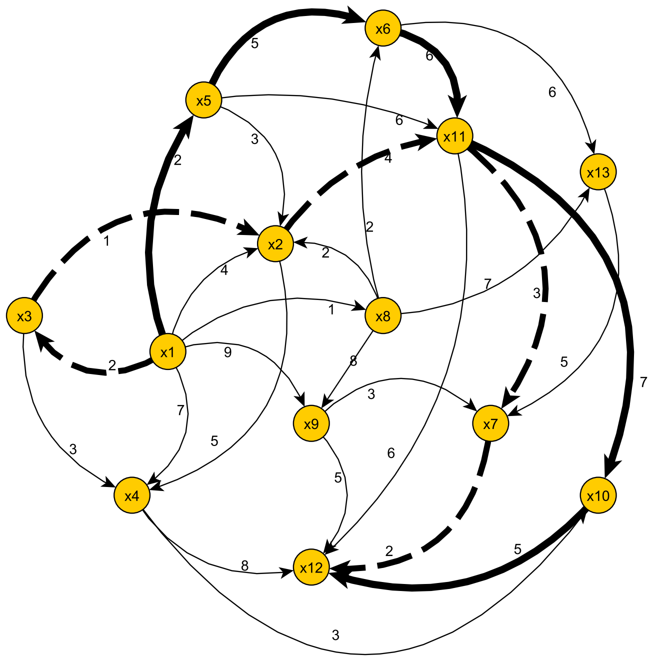


FIGURE 1.22 – Plus longs et courts chemins- Exemple 1.2.3

1.2.5 Intérêt d'une telle recherche

Cette recherche intervient

1. dans les *problèmes de transport* ou de *circulation* :
   on verra par la suite que tout réseau de transport peut être représenté par un graphe dans lequel les sommets sont les nœuds d'entrée, de transit, de sortie du réseau, les arcs figurant les liaisons entre les différents nœuds. A chaque arc (x_i, x_j) est associée la valuation $v_{ij} > 0$ qui représente le coût unitaire du transport sur la liaison correspondante. Le problème de l'acheminement d'une certaine marchandise depuis un nœud d'entrée jusqu'à un nœud de sortie, au moindre coût, se ramène à la recherche d'un chemin de longueur minimale. La longueur représente ici le coût unitaire total.

2. Dans les problèmes d'*ordonnancement* :

on verra que l'établissement du planning relatif à la réalisation d'une tâche conduit à considérer un graphe dans lequel tout arc (x_i, x_j) représente une opération, auquel on associe le nombre v_{ij} représentant la durée de l'opération. Tout sommet traduit la fin d'une opération. L'extrémité d'un arc coïncide avec l'origine d'un autre si et seulement si l'opération associée au premier est achevée afin que celle associée au second puisse débuter. La durée totale de réalisation d'un programme ne peut être inférieure à la somme des durées prises sur le chemin le plus défavorable depuis le sommet x_0 début des travaux jusqu'au sommet x_n fin des travaux, c'est-à-dire les chemins de longueur maximale de x_0 à x_n. Un tel chemin est un chemin *critique*. Pour que la durée de l'opération soit minimale, il est nécessaire que sur ce chemin critique, lorsque deux opérations se suivent, la deuxième débute exactement lorsque la première se termine.

1.3 Exercices récapitulatifs

Exercice 6 La réalisation d'un chantier nécessite la réalisation des opérations ci-dessous

Opérations	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Durée en semaines	32	13	4	3	6	32	20	8	13	38	42	39

D'autre part, on a constaté que l'opération B devait être précédée de l'opération A et suivie des opérations C, D, E et F, que les opérations C et D devaient précéder l'opération G, que les opérations H et J, enfin, devaient suivre les opérations E, F et G et précéder les opérations I, K et L.

Déterminer la durée minimale du projet.

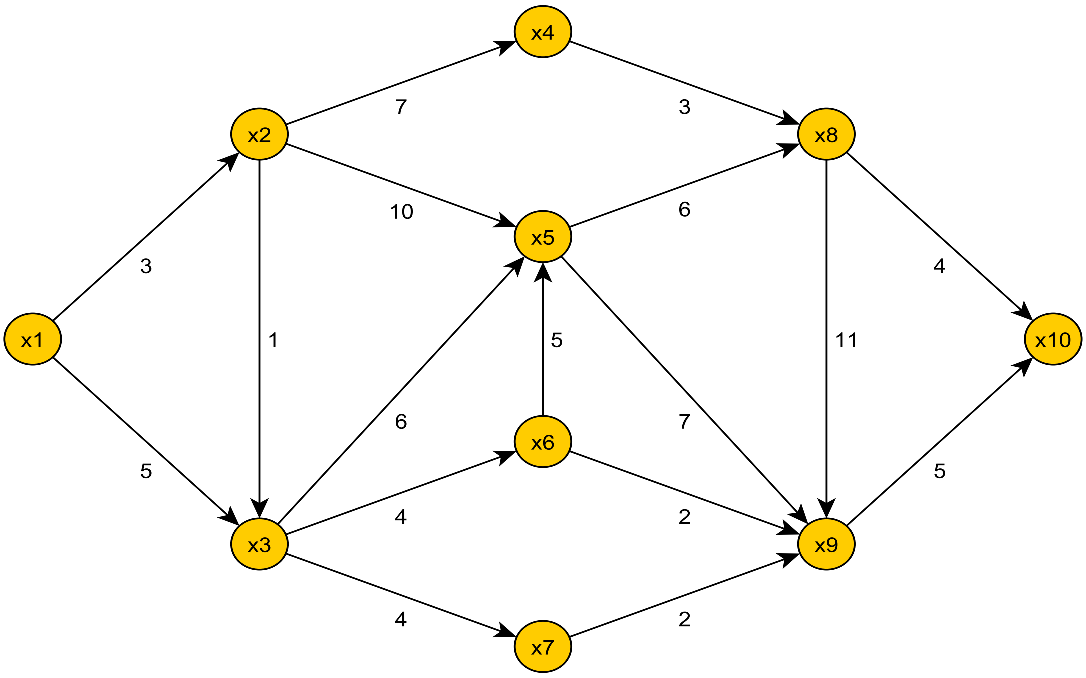
Exercice 7 Une entreprise connaît une croissance importante créant de gros besoins en locaux de construction et aussi de stockage. Il en résulte une grande dispersion des différents bâtiments. Le tableau ci-dessous indique le temps en minutes que mettent les navettes pour joindre les différents points :

Départ \ Arrivée	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		36		20	30		16	18		
B					24			16		
C										28
D					16					
E			14				18	26	28	
F		10		12						
G									8	
H										4
I										12
J										

1. Etablir le dictionnaire des précédents
2. (a) Ordonnancer le graphe par niveaux
   (b) Représenter le graphe

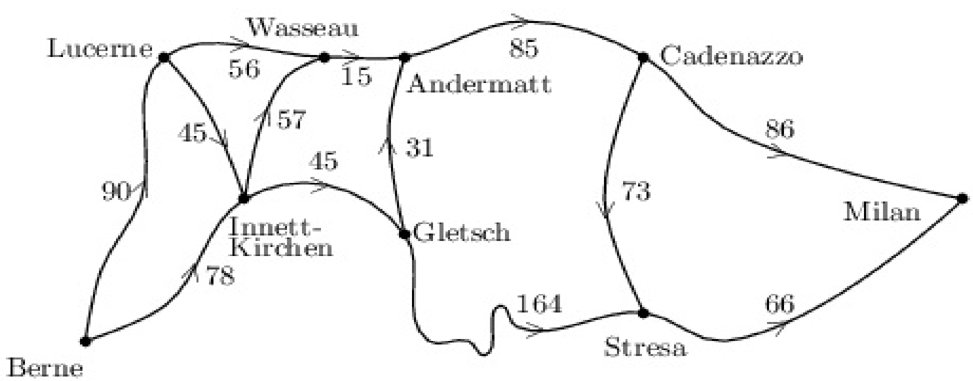
3. Quel est le chemin que doit emprunter un employé désirant se rendre du point A au point J en un temps minimal ? Quel est ce temps ?

Exercice 8



1. En utilisant l'algorithme de Ford, déterminez le chemin minimal allant de x_1 à x_{10} et précisez la longueur de ce chemin. Interprétez le résultat de la question précédente dans un contexte d'entreprise que vous inventerez.
2. En utilisant l'algorithme de Ford, déterminez le chemin maximal allant de x_1 à x_{10} et précisez la longueur de ce chemin. Interprétez le résultat de la question précédente dans un contexte d'entreprise que vous inventerez.

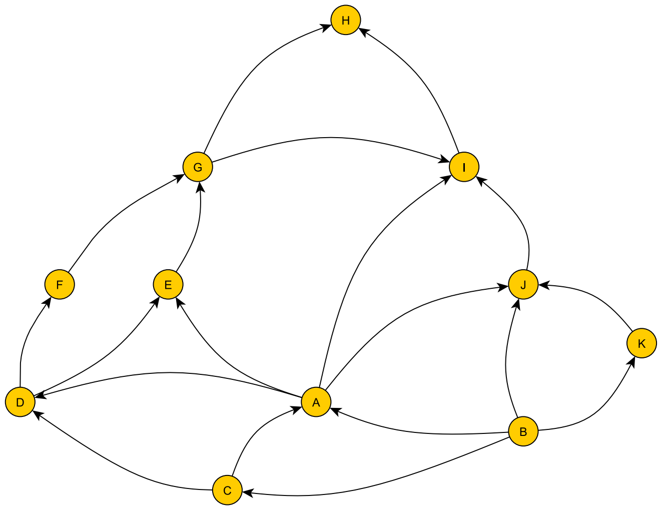
Exercice 9 Une entreprise de transport SUISSEXPORT dont le siège est situé à Berne doit effectuer de fréquentes livraisons à Milan, en dehors de la période hivernale. Ses véhicules doivent donc traverser le massif des Alpes : leur gabarit interdit l'usage des tunnels ferroviaires (Simplon, Saint-Gothard, Lötschberg,...) qui, sinon, faciliteraient le voyage.
Vus la fréquence et le coût de ces livraisons, l'entreprise désire déterminer l'itinéraire le plus court de Berne à Milan.



On a orienté les tronçons de route et porté les distances en kilomètres.

À l'aide d'un graphe que vous aurez tracé, déterminer l'itinéraire demandé et préciser son kilométrage.

Exercice 10 On se donne le réseau routier ci-dessous où chaque sommet représente un entrepôt et chaque arc, une route entre deux entrepôts ; chaque route est supposée à sens unique, le sens de progression étant indiqué par la direction de l'arc.



1. Le premier problème est le suivant : tous les matins, plusieurs chauffeurs doivent acheminer le courrier interne et les colis aux différents entrepôts de l'entreprise. On suppose que le centre de tri est l'entrepôt B, c'est donc le point de départ des navettes.
   (a) Sachant qu'une même navette ne peut emprunter deux fois le même arc (ce qui est permis pour deux navettes différentes), combien faut-il de chauffeurs au minimum pour acheminer à chaque entrepôt son courrier ? (certains arcs peuvent ne pas être parcourus.)
   (b) En supposant que chaque route soit longue de 100 mètres, quelle distance totale parcourent chaque matin les navettes ?
   (c) Quel chemin emprunte la navette qui dessert le maximum d'entrepôts ?

2. Le second problème s'énonce comme suit : on se donne ci-dessous, pour chaque entrepôt, le temps moyen (en minutes) nécessaire à la livraison du courrier (trajet et/ou déchargement) des entrepôts suivants :

Entrepôt i	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Temps $t(i)$	5	6	3	8	4	5	6	20	4	4	9

   Par exemple, une fois le courrier livré en A, il faut 5 minutes pour livrer le ou les entrepôts suivants. Déterminer la durée minimale moyenne de livraison du courrier dans cette entreprise.

Exercice 11 Une entreprise contacte votre société d'entreposage pour stocker des produits alimentaires. Vos différents entrepôts sont localisés géographiquement à l'aide de la carte fournie à la page suivante.

Dans le cadre du contrat, l'entreprise vous demande de déterminer les chemins minimaux et maximaux du réseau afin d'optimiser les prix de transport de leurs marchandises.

Les entrepôts sont schématisés par des points et les routes reliant ces différents entrepôts par des droites. On supposera que les routes sont à sens unique, leur direction étant indiquée par les arcs orientés.

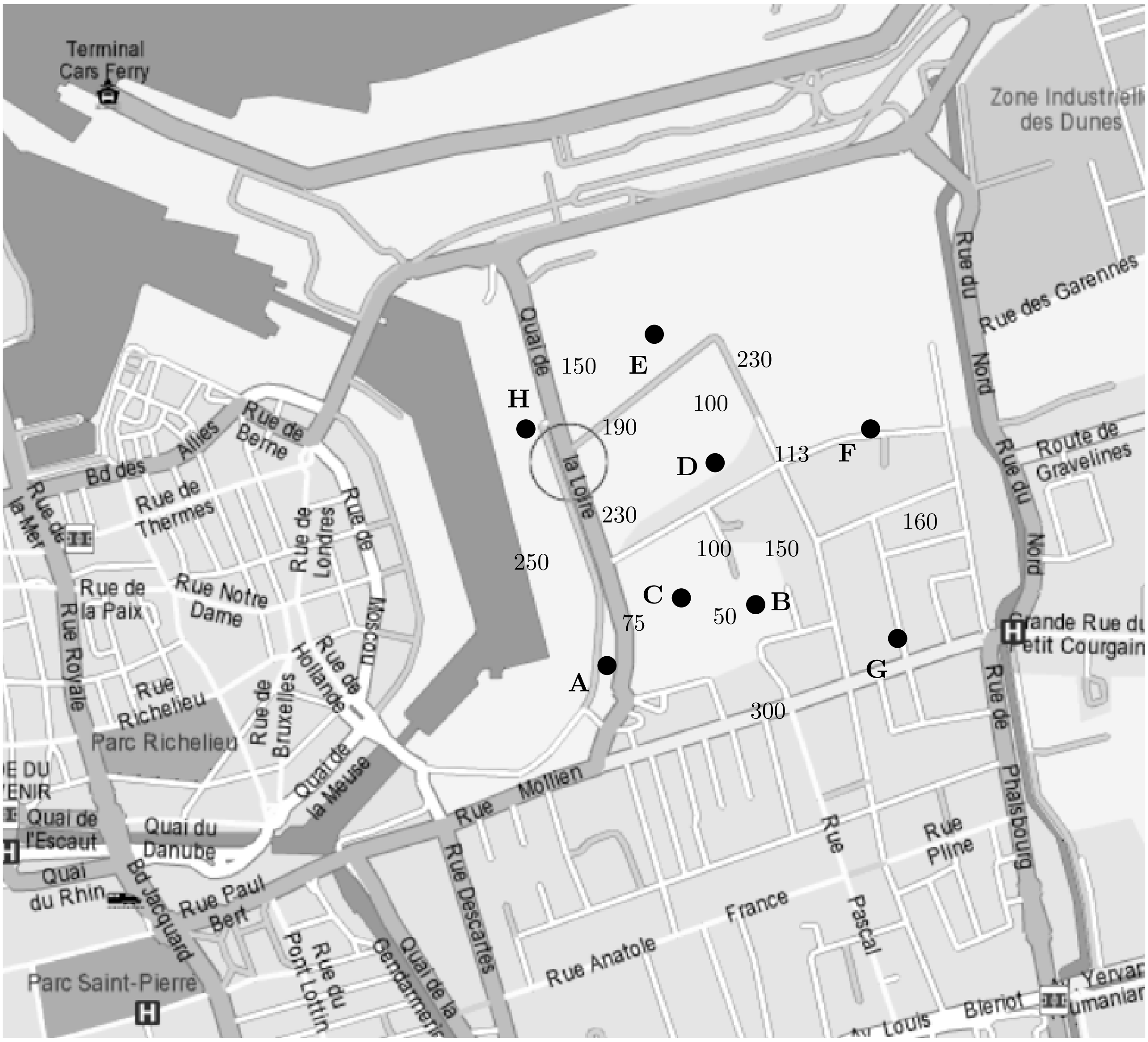
La valuation de chaque arc indique la distance séparant les entrepôts reliés par cet arc. Par exemple, les entrepôts G et F sont distants de 160 mètres.

1. Établir le dictionnaire des précédents puis le dictionnaire des suivants des sommets du graphe.

2. Utiliser le dictionnaire des précédents pour ordonnancer le graphe par niveaux.
3. Représenter le graphe sous sa forme ordonnancée.

On précise que les entrepôts d'entrée sont ceux appartenant au niveau N_0 et que les entrepôts de sortie sont ceux appartenant au dernier niveau.

4. Déterminer la longueur du chemin minimal menant d'un entrepôt d'entrée à un entrepôt de sortie tout en précisant ce chemin.
5. Déterminer la longueur du chemin maximal menant d'un entrepôt d'entrée à un entrepôt de sortie tout en précisant ce chemin.


Terminal
Cars Ferry
Zone Industrielle
des Dunes
Rue du Nord
Rue des Garennes
Quai de la Loire
150
E
230
H
100
190
D
113
F
Route de
Gravelines
230
160
250
100
150
C
B
50
75
Grande Rue du
Petit Courgain
G
A
300
Rue de Phalsbourg
Rue Mollien
Rue Pascal
Rue Pline
Rue Descartes
Rue Anatole France
Rue de Berne
Bd des Alliés
Rue de Thermes
Rue de Londres
Rue de Moscou
Rue de la Mer
Rue de la Paix
Rue Notre Dame
Rue Royale
Rue Richelieu
Rue de Bruxelles
Rue de Hollande
Parc Richelieu
Quai de la Meuse
Quai de l'Escaut
Quai du Danube
Quai du Rhin
Bd Jacquard
Rue Paul Bert
Rue du Pont Lottin
Quai de la Gendarmerie
Parc Saint-Pierre
Av. Louis Blériot