

Méthodes d'Optimisation

Licence Professionnelle Logistique

Université du Littoral - Côte d'Opale, Pôle Lamartine

Laurent SMOCH

(smoch@lmpa.univ-littoral.fr)

Septembre 2011

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

1	Quelques rappels sur les graphes	1
1.1	Initiation à la théorie des graphes	1
1.1.1	Vocabulaire	1
1.1.2	Niveaux des sommets d'un graphe sans circuit	5
1.1.3	Exemples	7
1.1.4	Exercices	11
1.2	Graphes valués et chemins critiques	13
1.2.1	Valuations d'un graphe	13
1.2.2	Longueur d'un chemin	13
1.2.3	Chemins minimaux	13
1.2.4	Chemins maximaux	19
1.2.5	Intérêt d'une telle recherche	20
1.3	Exercices récapitulatifs	21
2	Problèmes d'ordonnement	25
2.1	Contexte	25
2.2	Notions de projet, tâche et ordonnancement	25
2.2.1	Notion de projet	25
2.2.2	Notion de tâche	25
2.3	Méthode d'ordonnement	26
2.4	Établissement d'un ordonnancement	26
2.5	Détermination du chemin critique et énumération des tâches critiques	26
2.6	Exercices	26
3	La méthode MPM	29
3.1	Le graphe	29
3.1.1	Éléments du graphe	29
3.1.2	Contraintes potentielles	29
3.1.3	Exercice corrigé	30
3.1.4	Tâches parallèles	31
3.1.5	Opérations dépendantes et indépendantes	31
3.1.6	Opérations composées	32
3.1.7	Conditions limites de démarrage	32
3.2	Exercice synthétique corrigé : construction d'un pont	33
3.3	Date au plus tôt d'une tâche i , ordonnancement minimum ou au plus tôt	36
3.3.1	Définition	36
3.3.2	Détermination des dates au plus tôt	36
3.3.3	Chemins critiques	36
3.4	Date au plus tard de début d'une tâche i , ordonnancement limite (ou au plus tard)	37
3.4.1	Définition	37
3.4.2	Recherche de l'ordonnement au plus tard	38
3.5	Marges d'une tâche i	39
3.5.1	Marge totale $m_T(i)$ de la tâche i	39
3.5.2	Marge libre $m_L(i)$ d'une tâche i	39

3.5.3	Marge certaine $m_C(i)$ d'une tâche i	39
3.5.4	Exemple	40
3.6	Méthode MPM présentée sous forme de tableaux	41
3.6.1	Ordonnancement au plus tôt	41
3.6.2	Ordonnancement au plus tard	43
3.7	Exercices	44
4	La méthode PERT	53
4.1	Introduction	53
4.2	Difficultés de construction du graphe PERT	53
4.3	Calcul de l'ordonnancement par la méthode PERT	54
4.3.1	Calcul de l'ordonnancement au plus tôt	55
4.3.2	Calcul de l'ordonnancement au plus tard	55
4.3.3	Calcul du chemin critique	56
4.4	Exercices	57
5	Ordonnancement en ateliers spécialisés - Diagrammes de Gantt	61
5.1	Introduction	61
5.2	Ordonnancement sur une machine	61
5.2.1	Le diagramme de Gantt	61
5.2.2	La règle T.O.M.	62
5.3	Ordonnancement avec deux centres de production	63
5.4	Ordonnancement sur trois machines	64
5.5	Exercices	66

Chapitre 5

Ordonnancement en ateliers spécialisés - Diagrammes de Gantt

5.1 Introduction

On parle d'*ateliers spécialisés* lorsque l'ensemble des équipements nécessaires pour assurer une fonction déterminée sont rassemblés dans un même atelier. Le problème de gestion quotidienne est de déterminer l'ordre d'exécution d'un certain nombre de tâches, la réalisation d'une tâche nécessitant le passage sur une ou plusieurs machines.

Parmi les modèles d'ordonnancement en ateliers spécialisés, on distingue :

- Les *modèles statiques* pour lesquels on recherche l'ordonnancement optimal d'un ensemble donné de tâches sur une période donnée. Autrement dit, au cours de la période considérée, aucune nouvelle tâche non prévue ne peut être prise en compte dans l'ordonnancement.
- Les *modèles dynamiques* d'ordonnancement qui se caractérisent par des arrivées successives de tâches, le plus souvent dans un univers aléatoire.

Dans ce dernier chapitre, on se limitera aux modèles statiques et on verra le problème d'ordonnancement sur une ou deux machines.

5.2 Ordonnancement sur une machine

Exemple 5.2.1 On illustre la méthode par le biais de l'exemple suivant : on souhaite effectuer 5 tâches sur une machine A. Le tableau ci-dessous présente les différentes tâches ainsi que leur temps opératoire en centièmes d'heures.

Tâche i	1	2	3	4	5
Temps opératoire T_i	50	150	80	200	30

TABLE 5.1 – Données - Exemple 5.2.1

Il s'agit de déterminer l'ordre dans lequel on va effectuer ces différentes tâches. Il est clair que, quel que soit l'ordre choisi, le temps opératoire total (ou somme des temps opératoires) est le même. Il faut donc définir un autre critère entre tous les ordonnancements possibles. Un exemple d'ordonnancement est donné ci-dessous :

5.2.1 Le diagramme de Gantt

Le diagramme de Gantt représente une technique de visualisation d'un ordonnancement.

Ordre (j)	1	2	3	4	5
Tâche programmée (i)	3	4	1	5	2
Temps d'exécution T_j	80	200	50	30	150

TABLE 5.2 – Ordonnancement 1 - Exemple 5.2.1

Reprenons l'ordonnancement choisi dans l'exemple 4.3.1 et construisons le diagramme de Gantt associé :

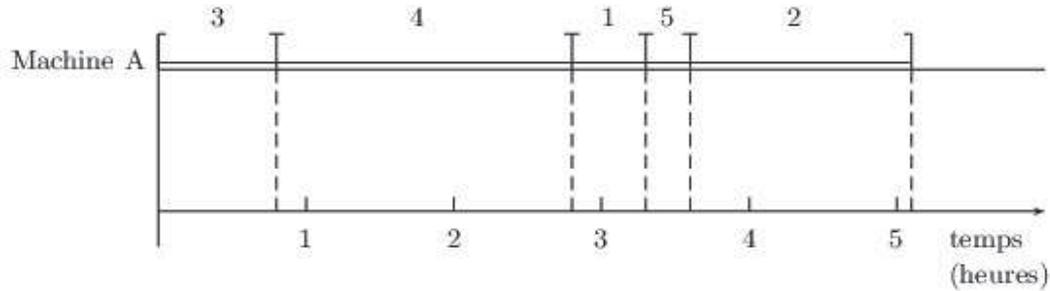


FIGURE 5.1 – Diagramme de Gantt - Exemple 5.2.1

Le diagramme de Gantt permet de visualiser à la fois :

- l'utilisation des moyens productifs,
- l'avancement de l'exécution des tâches.

Une ligne horizontale illustre l'évolution du temps. Pour chaque moyen productif (en l'occurrence la machine A), on trace une ligne horizontale au dessus (ou en dessous) de la ligne du temps. Chaque tâche à effectuer sur la machine A est représentée par un segment horizontal dont la longueur est proportionnelle à la durée d'exécution de la tâche. Le numéro de la tâche sera indiqué au dessus du segment.

5.2.2 La règle T.O.M.

On a vu précédemment que tous les ordonnancements possibles conduisent au même temps opératoire total. Dans l'exemple 4.3.1, l'exécution des 5 tâches nécessite 510 centièmes d'heures soit 5 heures et 6 minutes. Alors quel ordonnancement doit-on choisir ?

On note A_j le temps d'achèvement de la tâche programmée en position j . Le *temps d'achèvement* d'une tâche est la somme des temps d'exécution de la tâche avec ceux des tâches précédentes :

$$A_j = \sum_{i=1}^j T_i = T_1 + T_2 + \dots + T_j$$

où T_i est le temps opératoire de la tâche i .

Le calcul des différents temps d'achèvement des tâches est donné dans le tableau ci-dessous :

Ordre (j)	1	2	3	4	5
T_j	80	200	50	30	150
A_j	80	280	330	360	510

Le temps d'achèvement moyen vaut alors :

$$\bar{A} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^n A_j = \frac{80 + 280 + 330 + 360 + 510}{5} = 312.$$

Ce temps d'achèvement moyen peut se réécrire en détails comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (80 \\ &\quad +80 + 200 \\ &\quad +80 + 200 + 50 \\ &\quad +80 + 200 + 50 + 30 \\ &\quad +80 + 200 + 50 + 30 + 150)/5 \\ &= (5 \times 80 + 4 \times 200 + 3 \times 50 + 1 \times 30)/5\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une somme pondérée des temps opératoires, chaque temps opératoire étant pondéré par un facteur d'autant plus grand qu'il se trouve exécuté plus tôt dans l'ordonnement.

La règle d'ordonnement qui minimise le temps d'achèvement moyen est celle du Temps Opérateur Minimum (règle T.O.M.) qui consiste à exécuter les tâches par ordre croissant de durée :

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq \dots \leq T_n$$

L'application de cette règle donne l'ordonnement illustré dans le tableau ci-dessous. On peut montrer

Ordre (j)	1	2	3	4	5
Tâches (i)	5	1	3	2	4
T_j	30	50	80	150	200
A_j	30	80	160	310	510

TABLE 5.3 – Ordonnement 2 - Exemple 5.2.1

que la règle T.O.M. revient à minimiser le retard moyen, le *retard* d'une tâche étant la différence entre le moment où la tâche est terminée et celui où elle aurait été terminée si l'on avait commencé en premier lieu.

5.3 Ordonnement avec deux centres de production

On considère le cas où toutes les tâches sont à exécuter sur le premier centre puis sur le second. Soient t_{iA} et t_{iB} les temps d'exécution de la tâche i sur les machines (ou centres de production) A et B respectivement. On va utiliser comme critère d'ordonnement la minimisation du temps total d'exécution des tâches sur les deux machines.

Exemple 5.3.1 Supposons que cinq tâches soient à exécuter sur les machines A puis B. Les temps opératoires (en centièmes d'heures) sont repris ci-dessous :

Tâches (i)	1	2	3	4	5
$t_{i,A}$	50	150	80	200	30
$t_{i,B}$	60	50	150	70	200

TABLE 5.4 – Données - Exemple 5.3.1

Durant l'exécution de la première tâche sur A, la machine B "dort". On a donc intérêt à mettre en tête la tâche de temps t_{iA} le plus faible. De façon similaire, lors de l'exécution de la dernière tâche sur la machine B, la machine A dort. On a donc intérêt à mettre en fin la tâche de durée d'exécution t_{iB} minimum. En se basant sur ces deux observations, l'algorithme Johnson (1954) calcule l'ordonnement minimisant le temps total d'exécution des tâches.

Algorithme 5.3.1 *Algorithme de Johnson*

1. Rechercher la tâche i de temps d'exécution t_{im} minimum.
2. Si $m = A$, placer cette tâche à la première place disponible.
Si $m = B$, placer cette tâche à la dernière place disponible.
3. Supprimer la tâche i des tâches encore à programmer, retour en 1.

Appliquons cet algorithme à l'exemple 5.3.1 :

- la tâche 5 ($t_{5A} = 30$) est mise en première position

1	2	3	4	5
5				

- Puis la tâche 1 ($t_{1A} = 50$) est mise en deuxième position

1	2	3	4	5
5	1			

- Puis la tâche 2 ($t_{2B} = 50$) est mise en dernière position

1	2	3	4	5
5	1			2

- Puis la tâche 4 ($t_{2B} = 70$) est mise en avant-dernière position

1	2	3	4	5
5	1		4	2

- Puis la tâche 3 est mise à la dernière place disponible.

1	2	3	4	5
5	1	3	4	2

L'ordonnancement obtenu est optimal et est illustré à la figure 5.2. ci-dessous. Le passage d'une tâche d'une machine à l'autre est visualisé à l'aide d'une flèche verticale. On notera qu'une machine au repos est indiquée

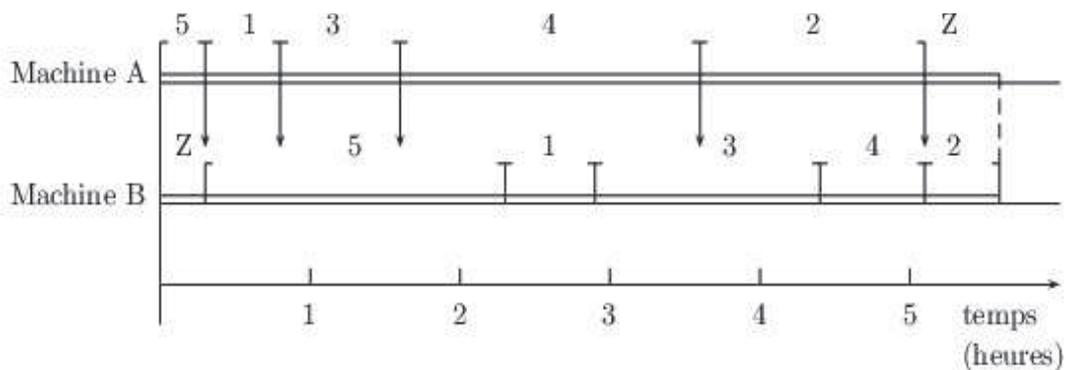


FIGURE 5.2 – Diagramme de Gantt - Exemple 5.3.1

par un Z. Si l'on veille à aligner verticalement l'origine du temps pour chaque machine, une ligne verticale indique donc à tout moment à quelle tâche est occupée chacune des machines. Un tableau mural peut être ainsi d'un grand recours pour les agents de maîtrise responsables de l'affectation des moyens humains et matériels.

5.4 Ordonnancement sur trois machines

L'algorithme de Johnson ne s'applique qu'en présence de deux machines. Cependant, le cas de trois machines peut se ramener au cas de deux machines si la machine B est *complètement dominée* par la machine A ou par la machine C, c'est-à-dire si l'on se trouve dans le cas où

$$\text{minimum } t_{iA} \geq \text{maximum } t_{iB}$$

soit dans le cas où

$$\text{minimum } t_{iC} \geq \text{maximum } t_{iB}$$

Ces conditions évitent de fausser l’algorithme de Johnson. Dans le cadre de l’exemple ci-dessous,

Exemple 5.4.1

Tâches	1	2	3	4	5	6	7
Assemblage	20	12	19	16	14	12	17
Inspection	4	1	9	12	5	7	8
Expédition	7	11	4	18	18	3	6

TABLE 5.5 – Données - Exemple 5.4.1

on constate que les conditions d’application énoncées précédemment sont vérifiées. Il est à remarquer que les deux conditions ne doivent pas être vérifiées simultanément. Dans l’exemple 5.4.1, la seconde condition n’est pas vérifiée.

Lorsqu’on se trouve dans un des deux cas, on reformule le problème en un problème à deux machines. Dans le cadre de l’exemple 5.4.1, la première regroupe les machines A et B (puisque l’assemblage domine l’inspection) avec $t_{iAB} = t_{iA} + t_{iB}$ et la seconde regroupe les machines B et C (l’expédition domine l’assemblage) avec $t_{iBC} = t_{iB} + t_{iC}$ ce qui donne les nouveaux temps opératoires

Tâches	1	2	3	4	5	6	7
Assemblage + Inspection	24	13	28	28	19	19	25
Inspection + Expédition	11	12	13	30	23	10	14

TABLE 5.6 – Reformulation du problème - Exemple 5.4.1

On applique alors l’algorithme de Johnson à ce problème à deux machines pour déterminer l’ordonnancement optimal.

Place	1	2	3	4	5	6	7
Tâche	5	4	7	3	2	1	6

TABLE 5.7 – Ordonnancement - Exemple 5.4.1

On peut alors tracer le diagramme de Gantt correspondant au problème original, c’est-à-dire celui avec trois machines.

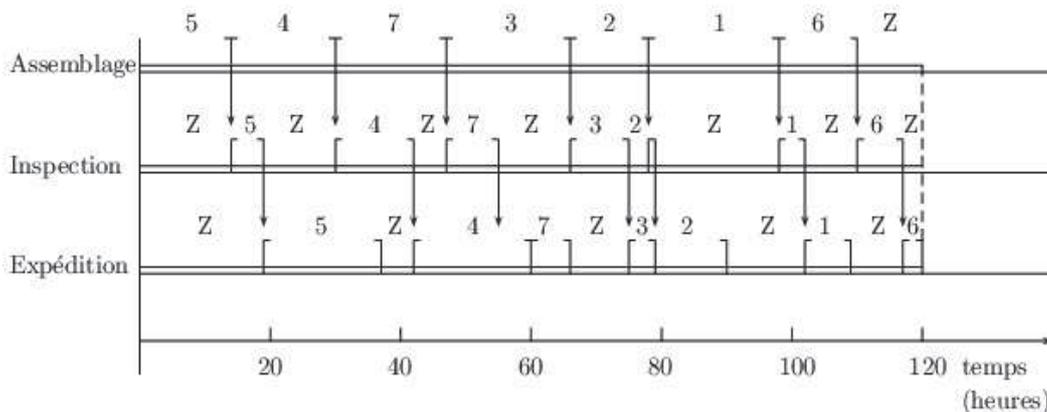


FIGURE 5.3 – Diagramme de Gantt - Exemple 5.4.1

5.5 Exercices

Exercice 27 Deux opérateurs sont chargés de remplir un camion avec des cartons identiques qui sont disposés sur 8 palettes situées en zone de stockage. Chaque palette contient 40 cartons.

Le processus de chargement est le suivant : au départ de l'activité, l'opérateur 1 est sur son chariot élévateur en zone de stockage. L'opérateur 2 est en attente près du camion. L'opérateur 1 déstocke une palette et l'amène à l'opérateur 2 puis il retourne chercher une autre palette pour lui-même. Quand les cartons des deux palettes sont chargés dans le camion, il va chercher deux autres palettes. Pendant ce temps, l'opérateur 2 à l'aide d'une transpalette, ramène les deux palettes vides au parc palettes et ainsi de suite jusqu'à la fin des opérations. On appellera cette succession de manœuvres un *cycle*. On précise que les deux dernières palettes sont rangées par l'opérateur 1.

On se donne les temps opératoires ci-dessous (exprimés en centièmes de minutes) :

Tâche	Temps opératoire
prendre une palette en zone de stockage	14
amener une palette près du camion et la poser	46
aller chercher une palette en zone de stockage	30
oter le film d'une palette	10
prendre un carton sur la palette et le placer dans le camion	10
sortir du camion	4
ramener les palettes vides au parc palettes et revenir	34

1. Tracer un diagramme de Gantt correspondant à un cycle (on considérera en abscisse le temps exprimé en centièmes de minutes et en ordonnée les opérateurs 1 et 2).
2. Préciser le temps nécessaire pour réaliser un cycle.
3. Quel est le temps nécessaire pour réaliser la totalité du chargement (et ranger les palettes vides) ?
4. Est-il nécessaire de déterminer un ordonnancement des palettes (numérotées de 1 à 8) ? Pourquoi ?

Exercice 28 Un responsable d'entrepôt reçoit une commande de chargement pour 10 palettes bien spécifiques. Chaque palette doit être assemblée (atelier *A*), emballée (atelier *B*) puis inspectée et chargée (atelier *C*) dans le camion. Les temps en heures des différentes opérations sont donnés à la page suivante.

Comme seulement 3 personnes sont disponibles pour réaliser ce travail, les palettes sont réalisées l'une après l'autre et sont traitées sur *A*, puis sur *B*, puis sur *C*.

1. Pour chaque atelier, appliquer la règle T.O.M afin de minimiser le temps d'achèvement moyen T_i tout en précisant cette valeur.
2. On considère ensuite les 3 ateliers simultanément.
 - (a) En justifiant des conditions nécessaires à l'utilisation de l'algorithme de Johnson, donner l'ordre de traitement des palettes permettant de minimiser le temps nécessaire à la réalisation de la commande.
 - (b) Tracer un diagramme de Gantt correspondant au problème. Préciser le temps minimal nécessaire à la réalisation de la commande.

Palette i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps assemblage t_{iA}	1h10'	0h55'	0h45'	0h20'	1h15'	1h25'	0h55'	0h40'	1h05'	1h00'
Temps emballage t_{iB}	0h25'	0h30'	0h35'	0h25'	0h40'	0h35'	0h40'	0h25'	0h20'	0h30'
Temps inspection + chargement t_{iC}	0h45'	0h55'	1h10'	1h05'	0h50'	1h15'	0h45'	0h50'	1h05'	1h20'

Exercice 29 10 palettes de natures différentes sont à traiter sur trois ateliers différents. On se donne le tableau ci-dessous fournissant les temps opératoires (exprimés en minutes) de chacune des palettes sur chaque atelier :

Atelier \ Palette	Palette									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	40'	30'	60'	75'	20'	50'	50'	55'	35'	25'
B	10'	15'	20'	10'	20'	15'	15'	15'	10'	20'
C	15'	27'	35'	40'	40'	30'	10'	20'	30'	30'

- À l'aide de l'algorithme de Johnson, déterminer tous les ordonnancements possibles permettant de minimiser le temps de traitement total des palettes.
 - À l'aide d'un diagramme de Gantt et de l'ordonnancement que vous aurez choisi, préciser le temps total nécessaire au traitement des dix palettes.
- À l'aide de l'algorithme de Johnson Généralisé, déterminer tous les ordonnancements possibles permettant de minimiser le temps de traitement total des palettes.
 - À l'aide d'un diagramme de Gantt et de l'ordonnancement que vous aurez choisi, préciser le temps total nécessaire au traitement des dix palettes.

Exercice 30 Un entreposeur vous demande de gérer l'assemblage, l'inspection et l'expédition de 7 palettes en un temps minimum. Vos études antérieures vous permettent d'estimer les temps (en minutes) nécessaires à la réalisation des trois tâches pour chaque palette à savoir :

Atelier \ Palette	Palette						
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
Assemblage	7	4	11	18	18	3	6
Inspection	4	1	9	12	5	7	8
Expédition	20	12	19	16	14	12	17

Pour réaliser ces 7 palettes, vous employez trois personnes, chacune affectée à un atelier bien précis.

- Préciser au moins une raison permettant d'expliquer l'importance des temps opératoires lors de l'expédition des palettes.
- L'algorithme de Johnson peut-il s'appliquer ici et si oui, quel est l'ordonnancement optimal ?
 - À l'aide d'un diagramme de Gantt et de l'ordonnancement précédent, déterminer le temps minimal de traitement des 7 palettes.

3. (a) Appliquer l'algorithme de Johnson Généralisé et préciser l'ordonnancement optimal permettant de minimiser le temps total de traitement des 7 palettes.
- (b) Remplir le tableau ci-dessous

Palette	Assemblage				Inspection				Expédition			
	d	T_d	T_f	c	d	T_d	T_f	c	d	T_d	T_f	c
P_i	...											

où

- d correspond à la durée de la tâche,
- T_d est la date au plus tôt de réalisation de la tâche,
- T_f est la date au plus tard de réalisation de la tâche,
- c est la contrainte ou temps d'attente.

- (c) À l'aide d'un diagramme de Gantt et de l'ordonnancement précédent, déterminer le temps minimal de traitement des 7 palettes.

Exercice 31 Une importante société de magasins alimentaires à grande surface diversifie son activité en créant des commerces dans les petites villes. La société crée le fonds de commerce qui est ensuite géré de façon autonome par un commerçant franchisé. La société réalise une étude d'implantation puis elle installe le commerce.

Les tâches à exécuter sont résumées dans le tableau suivant :

Liste des tâches	Durée en jours	Tâches qui doivent être exécutées avant
A - Recherche d'un local	50	-
B - Recherche d'un franchisé	45	-
C - Constitution du dossier du franchisé	15	A,B
D - Constitution du dossier pour la chambre de commerce	10	A,B
E - Formation du franchisé	30	B
F - Aménagement, plâtrerie, peinture du magasin	20	A
G - Réfection façade, enseigne	8	A
H - Équipement chambre froide	8	A,F
I - Équipement rayonnage	5	A,F
J - Implantation du magasin	6	A,B,E,F,G,H,I
K - Tirage des feuillets publicitaires	6	A,B,D
L - Distribution des feuillets publicitaires	2	A,B,D,K
M - Envoi des invitations pour l'inauguration	6	A,B,D
N - Inauguration du magasin	1	toutes

1. Tracez le diagramme du projet.
2. En quel temps minimum ce projet pourra-t-il être réalisé ?
3. Faites apparaître le chemin critique.
4. Tracez le diagramme de GANTT de ce projet.
5. Donnez, sous forme de tableau, les marges totales.

