

Méthodes d'Optimisation

Licence Professionnelle Logistique

Université du Littoral - Côte d'Opale, Pôle Lamartine

Laurent SMOCH

(smoch@lmpa.univ-littoral.fr)

Septembre 2011

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

1	Quelques rappels sur les graphes	1
1.1	Initiation à la théorie des graphes	1
1.1.1	Vocabulaire	1
1.1.2	Niveaux des sommets d'un graphe sans circuit	5
1.1.3	Exemples	7
1.1.4	Exercices	11
1.2	Graphes valués et chemins critiques	13
1.2.1	Valuations d'un graphe	13
1.2.2	Longueur d'un chemin	13
1.2.3	Chemins minimaux	13
1.2.4	Chemins maximaux	19
1.2.5	Intérêt d'une telle recherche	20
1.3	Exercices récapitulatifs	21
2	Problèmes d'ordonnement	25
2.1	Contexte	25
2.2	Notions de projet, tâche et ordonnancement	25
2.2.1	Notion de projet	25
2.2.2	Notion de tâche	25
2.3	Méthode d'ordonnement	26
2.4	Établissement d'un ordonnancement	26
2.5	Détermination du chemin critique et énumération des tâches critiques	26
2.6	Exercices	26
3	La méthode MPM	29
3.1	Le graphe	29
3.1.1	Éléments du graphe	29
3.1.2	Contraintes potentielles	29
3.1.3	Exercice corrigé	30
3.1.4	Tâches parallèles	31
3.1.5	Opérations dépendantes et indépendantes	31
3.1.6	Opérations composées	32
3.1.7	Conditions limites de démarrage	32
3.2	Exercice synthétique corrigé : construction d'un pont	33
3.3	Date au plus tôt d'une tâche i , ordonnancement minimum ou au plus tôt	36
3.3.1	Définition	36
3.3.2	Détermination des dates au plus tôt	36
3.3.3	Chemins critiques	36
3.4	Date au plus tard de début d'une tâche i , ordonnancement limite (ou au plus tard)	37
3.4.1	Définition	37
3.4.2	Recherche de l'ordonnement au plus tard	38
3.5	Marges d'une tâche i	39
3.5.1	Marge totale $m_T(i)$ de la tâche i	39
3.5.2	Marge libre $m_L(i)$ d'une tâche i	39

3.5.3	Marge certaine $m_C(i)$ d'une tâche i	39
3.5.4	Exemple	40
3.6	Méthode MPM présentée sous forme de tableaux	41
3.6.1	Ordonnancement au plus tôt	41
3.6.2	Ordonnancement au plus tard	43
3.7	Exercices	44
4	La méthode PERT	53
4.1	Introduction	53
4.2	Difficultés de construction du graphe PERT	53
4.3	Calcul de l'ordonnancement par la méthode PERT	54
4.3.1	Calcul de l'ordonnancement au plus tôt	55
4.3.2	Calcul de l'ordonnancement au plus tard	55
4.3.3	Calcul du chemin critique	56
4.4	Exercices	57
5	Ordonnancement en ateliers spécialisés - Diagrammes de Gantt	61
5.1	Introduction	61
5.2	Ordonnancement sur une machine	61
5.2.1	Le diagramme de Gantt	61
5.2.2	La règle T.O.M.	62
5.3	Ordonnancement avec deux centres de production	63
5.4	Ordonnancement sur trois machines	64
5.5	Exercices	66
6	Réduction de la durée d'un projet	71
6.1	Présentation de la méthode	71
6.2	Exercices	74

Chapitre 6

Réduction de la durée d'un projet

6.1 Présentation de la méthode

On va illustrer le problème de la réduction de la durée du projet sur l'exemple suivant.

Exemple 6.1.1 On considère la construction d'un bâtiment dont les différentes tâches sont listées dans le tableau de la page suivante :

N°	Tâche	Durée (jours)	Prédécesseurs
1	Terrassement	5	–
2	Fondations	4	1
3	Colonnes porteuses	2	2
4	Charpente toiture	2	3
5	Couverture	3	4, 6
6	Maçonnerie	5	3
7	Plomberie, électricité	3	2
8	Coulage dalle béton	3	7
9	Chauffage	4	6, 8
10	Plâtre	10	5, 9
11	Finitions	5	10, 13
12	Achat de la cuisine	15	–
13	Installation de la cuisine	3	12

On a la possibilité de réduire la durée de certaines tâches moyennant un surcoût par jour de réduction de la durée comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

N°	Tâche	Réduction maximum (jours)	Surcoût par jour
5	Couverture	1	120
6	Maçonnerie	3	150
8	Coulage dalle béton	1	180
9	Chauffage	1	200
12	Achat de la cuisine	5	100

On veut réduire au maximum la durée du projet en minimisant le coût de cette réduction.

On utilise la méthode des potentiels pour mettre en place le graphe ordonnancé en niveaux : à l'aide du dictionnaire des précédents, on obtient les niveaux ci-dessous :

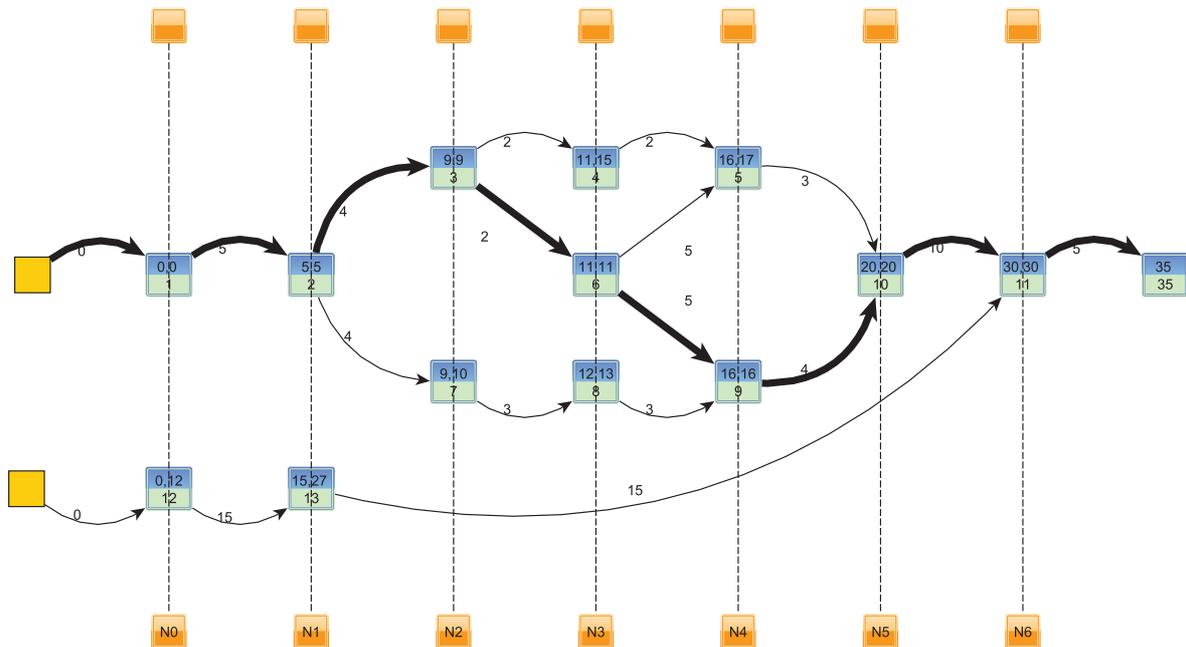


FIGURE 6.1 – Graphe ordonnancé - Exemple 6.1.1

$$N_0 = \{1, 12\}, N_1 = \{2, 13\}, N_2 = \{3, 7\}, N_3 = \{4, 6, 8\}, N_4 = \{5, 9\}, N_5 = \{10\}, N_6 = \{11\}$$

Au départ, pour passer de 35 à 34 jours, seules sont candidates les tâches critiques 6 et 9. On réduit la tâche 6 d'un jour car c'est la décision la moins coûteuse. La tâche 9 débute en 15 et la tâche 8 devient critique. Par répercussion, la tâche 7 devient aussi critique.

Le nouveau graphe est donné par :

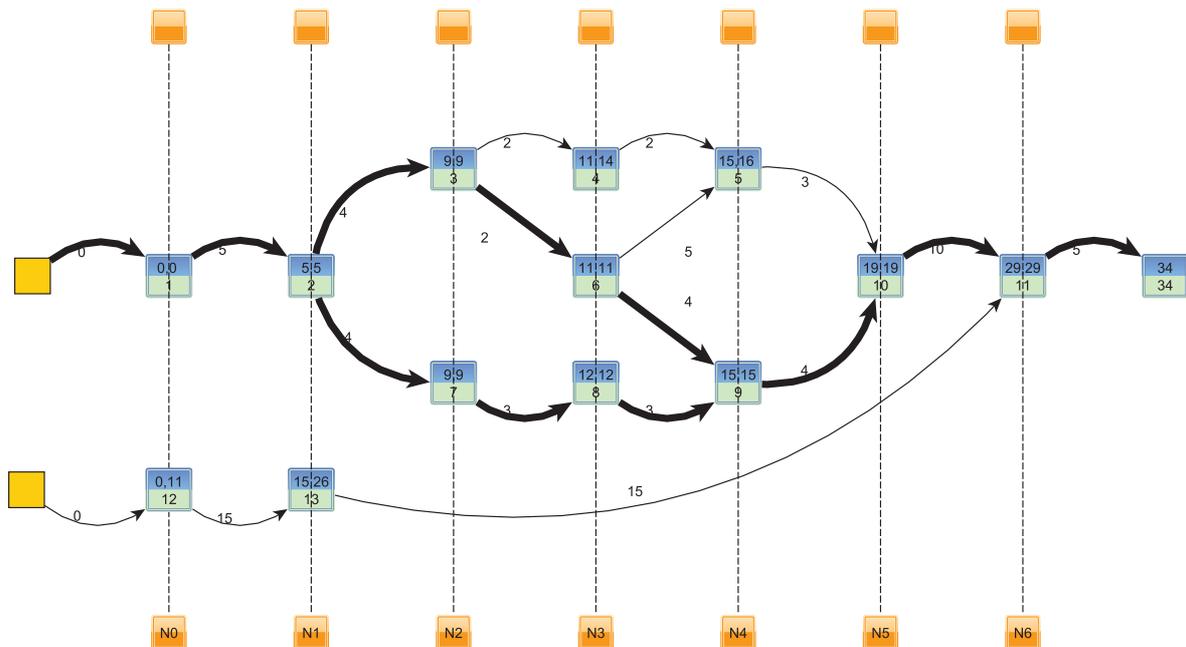


FIGURE 6.2 – Réduction de la durée du projet - Exemple 6.1.1

On peut maintenant observer deux chemins critiques $P_1 = (1, 2, 3, 6, 9, 10, 11)$ et $P_2 = (1, 2, 7, 8, 9, 10, 11)$. Pour diminuer la réalisation du projet d'un jour supplémentaire, il faut réduire simultanément une tâche dans chaque chemin. Le choix est à effectuer entre 9 (de coût 200) et 8 et 6 (de coût $150 + 180 = 330$). On retient la tâche 9 que l'on diminue d'un jour. Le nouveau graphe est donné par

6.2 Exercices

Exercice 33 Vous travaillez actuellement sur un projet de construction d'un atelier jouxtant votre entrepôt. Le début des travaux est prévu pour le jeudi 1^{er} septembre. Le détail et la durée des travaux de chaque corps de métiers vous sont donnés ci-dessous. Afin de déterminer la date d'achèvement de l'atelier et d'éviter les retards qui seraient dus à l'imprévision, vous êtes chargés de visualiser le projet.

Tâche	Description de la tâche	Durée de la tâche	Tâches antérieures
A	Gros œuvre maçonnerie	12 jours	--
B	Charpente	1 jour	A
C	Zinguerie	1 jour	B
D	Couverture	1 jour	C
E	Electricité 1 ^{ère} étape	2 jours	D
F	Sanitaire 1 ^{ère} étape	1 jour	D
G	Vitreries extérieures	1 jour	D
H	Plâtrerie	4 jours	G
I	Sanitaire 2 ^{ème} étape	1 jour	H
J	Electricité 2 ^{ème} étape	1 jour	H
K	Carrelage	6 jours	I et J
L	Volets roulants	1 jour	J
M	Menuiseries intérieures	2 jours	L
N	Serrurerie	1 jour	L
O	Peintures	5 jours	N
P	Electricité 3 ^{ème} étape	1 jour	O
Q	Revêtements des sols	5 jours	P
R	Crépissage extérieur	3 jours	O

- Construire le réseau PERT et mettre en évidence le(s) chemin(s) critique(s).
 - Déterminer les marges totales et libres de chacune des tâches composant le projet.
 - Déterminer la date prévisible d'achèvement de l'atelier.
- Retrouver les résultats des questions précédentes à l'aide de la méthode MPM.
- Vous souhaitez réduire la durée totale d'exécution des travaux. Pour cela, il est possible de réduire la durée des tâches K, Q et R de deux, trois ou quatre jours au prix d'un coût supplémentaire de 1000 ou 2000 euros par jour de réduction selon la tâche comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Tâche	Réduction maximum (jours)	Surcoût par jour (euros)
K	2	1000
Q	4	1000
R	3	2000

- Comment peut-on en pratique diminuer la durée d'un projet ?
- De combien peut-on réduire la durée totale des travaux et à quel coût ?

Exercice 34 Une entreprise décide de commercialiser un nouveau produit. La planification de ce lancement fait apparaître les tâches du tableau ci-après avec leur durée (en semaines) et leurs prédecesseurs.

- Tracer le graphe correspondant à la méthode PERT.
- Calculer les dates de début au plus tôt, au plus tard, les marges et le chemin critique.

3. L'entreprise voudrait réduire la durée totale d'exécution des travaux. Pour cela, il est possible de réduire la durée des tâches 5 et 11 d'une ou deux semaines, au prix d'un coût supplémentaire de 100000 euros par semaine de réduction pour la tâche 5 et de 200000 euros par semaine pour la tâche 11. De combien peut-on réduire la durée totale des travaux et à quel coût ?

N°	Tâche	Durée	Prédécesseurs
1	Sélection des équipements	1	–
2	Choix de la méthode de production	2	1
3	Procédures de contrôle de qualité	2	2
4	Choix des matières premières	2	1
5	Réception des équipements	7	1
6	Commande des matières premières	1	4
7	Réception des matières premières	3	6
8	Essais de production	2	3, 5, 7
9	Première fourniture aux magasins	6	8, 11
10	Conception du conditionnement	4	1
11	Production du conditionnement	5	10
12	Réunion des vendeurs	1	11
13	Formation des vendeurs	1	12