ISCID-CO - Prépa 2 **ULCO - Dunkerque**

MATHÉMATIQUES Avril 2013 - Contrôle Continu, Semestre 2, Session 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Documents interdits.

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

Exercice 1 Une entreprise fabrique trois produits A,B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W. La fabrication :

- d'une unité de A consomme 3 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
- d'une unité de B consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W,
- d'une unité de C consomme 0 unité de U, 1 unité de V et 1 unité de W.

L'entreprise dispose d'un stock de 18 unités de U, 9 unités de V et 10 unités de W.
Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs

. x : quantité de produit A fabriqué,
. y : quantité de produit B fabriqué,
. z : quantité de produit C fabriqué.

On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.

1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir x, y et z.
2. Résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
3. Donner en conclusion la réponse au problème.

Correction - 4 points.

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On regroupe les valeurs de l'énoncé dans un tableau :

Unités \ Produits	A	B	C	Stocks
U	3	2	0	18
V	1	2	1	9
W	2	1	1	10

Si (x, y, z) désigne le programme de fabrication qui épuis exactement le stock de facteurs disponibles, x, y, z doivent vérifier le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y &=& 18 \\ x+2y+z &=& 9 \\ 2x+y+z &=& 10 \end{array}\right.$.

2. $\boxed{\text{2pts}}$ On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$(S)\left\{\begin{array}{rclll} 3x+2y &=& 18 & (L_1) & \\ x+2y+z &=& 9 & (L_2) & \leftarrow\ 3(L_2)-(L_1) \\ 2x+y+z &=& 10 & (L_3) & \leftarrow\ 3(L_3)-2(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rclll} 3x+2y &=& 18 & (L_1) & \\ 4y+3z &=& 9 & (L_2) & \\ -y+3z &=& -6 & (L_3) & \leftarrow\ 4(L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll} 3x+2y &=& 18 & (L_1) \\ 4y+3z &=& 9 & (L_2) \\ 15z &=& -15 & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4 \\ y &=& 3 \\ z &=& -1 \end{array}\right.$$

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Il ne peut exister de programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles puisqu'il faudrait produire -1 quantité de produit C. Le système (S) admet bien une solution mathématique mais non interprétable au sens économique.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& a \\ x+y-z &=& b \\ -x-y+2z &=& c \end{array}\right.$

   (où a, b et c sont des constantes données et x, y et z désignent des inconnues).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Expliquer pourquoi A est inversible et déduire de ce qui précède le calcul de A^{-1}.

Correction - 5 points.

1. $\boxed{\text{3pts}}$ On a

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& a & (L_1) \\ x+y-z &=& b & (L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \\ -x-y+2z &=& c & (L_3) \leftarrow (L_3)+(L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& a & (L_1) \\ -y+2z &=& b-a & (L_2) \\ y-z &=& c+a & (L_3) \leftarrow (L_3)+(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& a & (L_1) \leftarrow (L_1)+3(L_2) \\ -y+2z &=& -a+b & (L_2) \leftarrow -(L_2)+2(L_3) \\ z &=& b+c & (L_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x+2y &=& a+3b+3c & (L_1) \leftarrow (L_1)-2(L_2) \\ y &=& a+b+2c & (L_2) \\ z &=& b+c & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -a+b-c \\ y &=& a+b+2c \\ z &=& b+c \end{array}\right.$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$ Résoudre un système linéaire comme celui qui précède, c'est-à-dire dont le second membre est inconnu, consiste à inverser la matrice du système. On peut réécrire l'équivalence précédente sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   D'après ce qui précède, le système étant inversible, A est inversible, A^{-1} existe et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ M étant une matrice carrée, on pose $M^1 = M$ et, pour tout entier naturel n non nul, $M^{n+1} = M \times M^n$.

On considère la matrice D définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer D^2, D^3 puis D^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

2. Étant données les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, montrer que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $P' \times P$. Que peut-on conclure ?

3. On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \times D \times P' = A$.

4. Soit n un entier naturel non nul. Sachant que

$$A^n = (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots (P \times D \times P')$$

   (produit de n facteurs $(P \times D \times P')$), utiliser la question 2. pour montrer que $A^n = P \times D^n \times P'$. En déduire les termes de la matrice A^n en fonction de n.

Correction - 11 points.

1. On obtient aisément
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $D^3 = D \times D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ Montrons par récurrence que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque. La relation est vraie au rang $n = 0$ car $D^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^0 \end{pmatrix}$. Supposons que la relation soit vraie au rang n. On a alors $D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$. La relation est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ On vérifie immédiatement par multiplication matricielle que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

   $\boxed{\text{1pt}}$ On montre de même que $P' \times P = I$.

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ Cela signifie que P est inversible et que

   $\boxed{\text{0,5pt}}$ P' est la matrice inverse de P.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ En utilisant à nouveau la multiplication matricielle, on a $P \times D \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

4. $\boxed{\text{2pts}}$ On a

$$\begin{aligned} A^n &= (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots \times (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \\ &= P \times D \times \underbrace{(P' \times P)}_{I} \times D \times (P' \times \ldots \times P) \times D \times \underbrace{(P' \times P)}_{I} \times D \times P' \\ &= P \times \underbrace{D \times D \times \ldots \times D \times D}_{n \text{ fois}} \times P' = P \times D^n \times P' \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2pts}}$ On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2})^n \\ 1 & (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$