ISCID-CO - PRÉPA 2ème année

DIAGONALISATION

Université du Littoral - Côte d'Opale

Laurent SMOCH

Mars 2013

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 3

Valeurs propres et vecteurs propres

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 *Soit A une matrice carrée. Une valeur propre de A est un nombre λ qui, quand il est sosutrait à chaque élément de la diagonale principale de A, transforme A en une matrice singulière.*

Remarque 3.1.1 Soustraire un scalaire λ à chaque élément de la diagonale principale de A est identique à soustraire λ fois la matrice identité à A. Par conséquent λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ est une matrice singulière.

Exemple 3.1.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En soustrayant 2 à chaque élément de la diagonale principale, la matrice A devient une matrice singulière. Par conséquent, 2 est une valeur propre de A.

Exemple 3.1.2 Soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. En soustrayant soit 2 soit 3 à la matrice diagonale principale, on aboutit aux matrices singulières $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ respectivement. Donc 2 et 3 sont des valeurs propres de A.

Cet exemple illustre un principe général concernant les valeurs propres d'une matrice diagonale.

Théorème 3.1.1 *Les éléments diagonaux principaux d'une matrice diagonale D sont les valeurs propres de D.*

Le théorème suivant est une autre conséquence directe de la définition d'une valeur propre.

Théorème 3.1.2 *Une matrice carrée est singulière si et seulement si* 0 *est une valeur propre de A.*

Exemple 3.1.3 Trouver, en étudiant simplement la structure de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres.
Réponse : "0" car B est singulière $((L_1) = -(L_2))$ et "2" car $B - 2I$ est singulière.

Exemple 3.1.4 Une matrice M dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, telle que $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de Markov et joue un rôle essentiel dans les systèmes économiques dynamiques. On remarque que $M - 1.I$ est singulière donc 1 est une valeur propre de M.

Pour la plupart des matrices il n'est pas possible de trouver par intuition les valeurs propres, une démarche plus générale est alors nécessaire.
On sait que λ est une valeur propre de A, c'est-à-dire que $A - \lambda I$ est une matrice singulière, si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.1}$$

Pour une matrice carrée d'ordre n, le membre de gauche de l'équation (3.1) est un polynôme de degré n, fonction de la variable λ, appelé *polynôme caractéristique* de A. Donc λ est une valeur propre de A si et seulement si λ annule le polynôme caractéristique de A.

Exemple 3.1.5 Soit une matrice carrée d'ordre 2 quelconque, le polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

est de degré 2 et admet au plus deux racines.

On rappelle maintenant qu'une matrice carrée B est non-singulière si l'unique solution de $Bx = 0$ est $x = 0$. Inversement, B est singulière si et seulement si le système $Bx = 0$ admet une solution non nulle.

On a donc le théorème suivant :

Théorème 3.1.3 *Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit λ un scalaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *En soustrayant λ à chaque élément de la diagonale principale de A, la matrice transformée de A devient une matrice singulière,*
2. *$A - \lambda I$ est une matrice singulière,*
3. *$\det(A - \lambda I) = 0$,*
4. *$(A - \lambda I)x = 0$ pour un vecteur non nul*
5. *$Ax = \lambda$ pour un vecteur non nul x.*

Définition 3.1.2 *Quand λ est une valeur propre de A, un vecteur non nul x tel que $(A - \lambda I)x = 0$ est appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Faire l'analyse spectrale revient à connaître les valeurs propres d'une matrice et les vecteurs propres associés.

Exemple 3.1.6 Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$.
Les valeurs propres de A, c'est-à-dire -3 et 2, sont les racines du polynôme caractéristique. Pour déterminer les vecteurs propres associés, on résout $(A - \lambda I)x = 0$ pour chaque valeur propre de A :

- $(A - (-3)I)x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$.
  Il existe pour ce système une infinité de solutions, on peut prendre par exemple $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$ et en conclure qu'un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On pouvait considérer d'autres vecteurs tels que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ correspondant à d'autres choix de x_1 et x_2 mais on remarquera que tous ces vecteurs sont colinéaires. En fait, $(A - (-3)I)x = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$ ou $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$. Dans le premier cas, $x = (x_1, x_2) = (x_1, -\frac{2}{3}x_1) = x_1(1, -\frac{2}{3})$ et dans le second, $x = (x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}x_2, x_2) = x_2(-\frac{3}{2}, 1)$.

  L'ensemble (espace vectoriel de dimension 1 dans le cas de la valeur propre précédente) de toutes les solutions de l'équation linéaire $(A - \lambda I)x$ (incluant $x = 0$) est appelé l'*espace propre* de A pour la valeur λ.

- $(A-2I)x = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{cases}$.

  La solution la plus simple est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais tout multiple de ce vecteur est également un vecteur propre associé à 2. En effet, $(A-2I)x = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_1) = x_1(1,1)$ ou $x = (x_2, x_2) = x_2(1,1)$. Dans les deux cas, l'espace propre pour la valeur propre 2 est engendré par le vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.1.7 Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
$\det(B-\lambda I) = (5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) \Rightarrow Sp(B) = \{-1, 4, 5\}$. On peut en déduire ensuite que $v_1 = (0,1,0)$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 5$, $v_2 = (2,0,3)$ un vecteur propre associé à $\lambda = 4$ et $v_3 = (1,0,-1)$ un vecteur propre associé à $\lambda = -1$.

Remarque 3.1.2 Dans certains problèmes, on aura besoin d'utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système linéaire $(A-\lambda I)x = 0$ en cherchant un vecteur propre x.

3.2 Résolution des systèmes d'équations de récurrence linéaires homogènes

On s'intéresse dans cette partie à des systèmes d'équations de récurrence d'ordre 1, homogènes et stationnaires, qui s'écrivent sous la forme $X_n = AX_{n-1}$ où X_{n-1} représente le vecteur dans $\mathbb{R}^k$ des états à la date $n-1$, où X_n représente le vecteur dans $\mathbb{R}^k$ des états atteints à la date n et où A est la matrice de transformation entre la date $n-1$ et la date n.
Comme le vecteur d'états X_n ne dépend que du seul vecteur X_{n-1} des états à la date immédiatement antérieure, les équations de récurrence sont d'ordre 1.
Comme la relation est une transformation linéaire et non affine, ce sont des équations homogènes, qui sont toujours vérifiées pour le vecteur d'états nul.
Enfin, comme la matrice A est indépendante de la date à laquelle on se place, on a des équations stationnaires.

3.2.1 Exemples

(a) Equations en dimension 1

Un exemple typique d'une telle équation est

$$y_{n+1} = ay_n \tag{3.2}$$

pour une constante a quelconque. Cette équation de récurrence traduit le fait que le niveau de y, quelle que soit la période, sera proportionnel à son niveau de la période précédente, avec a comme constante de proportionnalité (exemple : intérêts annuels composés). Une solution de (3.2) est l'expression y_n en fonction de la valeur initiale y_0, de a et de n soit

$$y_n = a^n y_0.$$

Exemple 3.2.1 Soit y_n le montant d'argent placé sur un compte d'épargne dont le capital n'a pas été touché et dont les intérêts sont composés annuellement à l'année n. L'année suivante, il y aura

$$y_n + \frac{t}{100} y_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right) y_n \text{ où } t$$

est le taux d'intérêt annuel. Donc si $y_0 = 1000$, $t = 5$ et $n = 4$, le montant d'argent à la quatrième année se chiffre par $y_4 = (1,05)^4 \times 1000 = 1215,5$ euros.

3.2.2 Systèmes en dimension 2

Considérons maintenant un système de deux équations de récurrence linéaires homogènes tel que

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases} \tag{3.3}$$

où la valeur de chaque variable dépend linéairement du niveau des deux variables à la période précédente.

Exemple 3.2.2 Modèle d'emploi dynamique

$$\begin{cases} x_{n+1} = qx_n + py_n \\ y_{n+1} = (1-q)x_n + (1-p)y_n \end{cases}$$

où x_n représente le nombre de personnes actives et employées durant la période n et y_n le nombre de personnes actives mais sans emploi à la période n, p est la probabilité qu'une personne sans emploi trouve un travail à la période suivante et q la probabilité qu'une personne active reste employée d'une période à l'autre.
Ainsi, sous forme matricielle, le système d'equations de récurrence (3.3) devient :

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = Az_n. \tag{3.4}$$

La solution de (3.4) est donnée par

$$z_n = A^n z_0$$

en supposant que z_0 soit connu.

3.2.3 Le modèle de population de Leslie

On pourra se référer au "TP Démographie des populations avec structure d'âge : Matrices de Leslie" de Thomas DELATTRE et Cédric WOLF disponible sur $http : //ecobio.univ-rennes1.fr/Fiches_perso/CWolf/$ afin de se familiariser avec ce concept.

3.3 Systèmes théoriques en dimension 2 et dimension k

On est ramené, pour résoudre (3.4), à calculer A^n, ce qui est très souvent long et fastidieux.
Supposons que A admette deux valeurs propres λ_1 et λ_2, de vecteurs propres v_1 et v_2 respectifs alors

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [Av_1 \ Av_2] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2]$$

$$\Leftrightarrow A[v_1 \ v_2] = [v_1 \ v_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

En posant $[v_1 \ v_2] = P$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, la relation (3.5) peut s'écrire

$$AP = PD$$

ou encore

$$A = PDP^{-1}$$

si P est inversible. Ainsi, le calcul de A^n devient très simple puisque

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

comme cela a été vu dans l'introduction.

Cette démarche s'applique aussi pour des systèmes de dimension k.

Théorème 3.3.1 *Soit A une matrice de format $k \times k$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A et $v_1, v_2, \ldots, v_k$ les vecteurs propres associés. Soit $P = [v_1\ v_2 \ldots v_k]$ la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs propres alors, si P est inversible,*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} = D.$$

Réciproquement, si $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, alors les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et les éléments de la diagonale principale de D sont les valeurs propres de A.

Remarque 3.3.1 Une hypothèse fondamentale du théorème précédent est que la matrice P, dont les colonnes sont les vecteurs propres de A, soit une matrice inversible. Cette hypothèse stipule donc que la matrice A de format $k \times k$ possède k vecteurs propres linéairement indépendants.

Théorème 3.3.2 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ k valeurs propres disctinctes de la matrice A de format $k \times k$. Soient $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs propres associés. Les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont alors linéairement indépendants.*

Corollaire 3.3.1 *Si la matrice A de format $k \times k$ possède k valeurs propres distinctes alors $P = [v_1 \ldots v_k]$ est inversible.*

Théorème 3.3.3 *Soit A une matrice carrée d'ordre k avec k valeurs propres réeles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ et soient $v_1, v_2, \ldots, v_k$ des vecteurs propres associés. La solution générale du système d'équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ est*

$$z_n = \underbrace{(Z_0)_1}_{c_1} \lambda_1^n v_1 + \underbrace{(Z_0)_2}_{c_2} \lambda_2^n v_2 + \ldots + \underbrace{(Z_0)_k}_{c_k} \lambda_k^n v_k$$

où $Z_0 = ((Z_0)_1 \ldots (Z_0)_k)^t = P^{-1} z_0$.

On peut utiliser le théorème 3.3.1 pour retrouver ce résultat : $z_{n+1} = Az_n \Leftrightarrow z_n = A^n z_0 = PD^nP^{-1}z_0$

$$\Leftrightarrow z_n = [v_1 \ldots v_k] \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} Z_0 = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + \ldots + c_k\lambda_k^n v_k.$$

3.4 Propriétés des valeurs propres

On sait que les valeurs propres de la matrice A de format $k \times k$ sont les valeurs qui annulent le polynôme caractéristique de A soit

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Il existe donc trois possibilités pour les racines de $p(\lambda)$:
- $p(\lambda)$ a k racines réelles distinctes,
- $p(\lambda)$ a quelques racines multiples,
- $p(\lambda)$ a quelques racines complexes,

cas non mutuellement exclusifs pour $k \geq 4$.

Exemple 3.4.1

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \Rightarrow Sp(A) = \{-3, -2\}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p_B(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \Rightarrow Sp(B) = \{1, 2, 3\}$.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_C(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \Rightarrow Sp(C) = \{3\}$, 3 étant de multiplicité 2.
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_D(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow Sp(D) = \{1+i, 1-i\}$.
5. Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_E(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \Rightarrow Sp(E) = \{1, 2+i, 2-i\}$.

Définition 3.4.1 *La trace d'une matrice carrée A, notée $tr(A)$ est la somme de ses éléments diagonaux principaux.*

Théorème 3.4.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre k avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Alors,*

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = tr(A)$,

2. $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_k = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$

Exemple 3.4.2 Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 3 est une valeur propre de B. Soit $v = (a, b, c, d)$ un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ alors

$$(B - 3I)v = \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\lambda = 3$. Donc cette valeur propre de B est d'ordre de multiplicité au moins égal à 3. Comme de plus, $tr(B) = 16 = 3+3+3+x$, on en déduit que $x = 7$ est également valeur propre de B.

3.5 Valeurs propres multiples

On porte notre attention dans ce paragraphe sur un point qui peut remettre en cause le processus de diagonalisation : les valeurs propres multiples.

3.5.1 Matrices de format 2×2 non diagonalisables

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ces matrices admettent toutes les deux une valeur propre double $\lambda = 3$.

- Un vecteur propre de A est une solution v de l'équation
$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Un vecteur $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est une solution de ce système si et seulement si c'est un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour B, $(B - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Donc tout couple de vecteurs linéairement indépendants convient. Ainsi, grâce au théorème 3.3.1, la matrice B est diagonalisable et en fait, on remarque qu'elle est déja diagonale.

Par ailleurs, il n'y a pas de matrice P qui diagonalise A parce que, toujours d'après le théorème 3.3.1, une telle matrice P devrait avoir pour colonnes des vecteurs propres indépendants de A mais A n'a qu'un seul vecteur propre.

Une matrice A qui a une valeur propre d'ordre de multiplicité $m > 1$ mais qui n'a pas m vecteurs propres linéairement indépendants associés à cette valeur propre est appelée une *matrice non diagonalisable*. On a le

Théorème 3.5.1 *Soit A une matrice de format 2×2 avec deux valeurs propres identiques. Alors, A est diagonalisable si et seulement si A est déja une matrice diagonale.*

Que peut-on faire avec une matrice non diagonalisable ? On peut tenter d'arriver à une matrice presque diagonale (*décomposition de Jordan*).

Exemple 3.5.1 Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ étudiée précédemment, admettant 3 comme valeur propre. Cette matrice admet un seul vecteur propre indépendant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche alors un vecteur v_2 appelé *vecteur propre généralisé pour A associé à $\lambda = 3$*, solution de

$$(A - 3I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on prend $P = [v_1 \ v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.5.2 *Soit A une matrice carrée d'ordre 2 avec des valeurs propres identiques $\lambda = \lambda^\star$. Alors,*

1. *soit A a deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\lambda^\star$, auquel cas A est la matrice $\lambda^\star I$,*
2. *soit A a seulement un vecteur propre indépendant v_1. Dans ce cas, il existe un vecteur propre généralisé v_2 tel que $(A - \lambda^\star I)v_2 = v_1$. Si $P = [v_1 v_2]$ alors*
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 \\ 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Cas d'une matrice 3×3 non diagonalisable

Exemple 3.5.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de A est $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(2 - \lambda)$. Les valeurs propres de A sont 2 et 3 (de multiplicité 2).

- Pour la valeur propre simple $\lambda = 2$, l'espace des solutions de
$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est un espace de dimension 1 engendré par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Pour la valeur propre double $\lambda = 3$, l'espace des solutions de
$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est un espace de dimension 1 engendré par $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il y a donc seulement un vecteur propre indépendant associé à la valeur propre de multiplicité 2. On a besoin d'un vecteur v_3 indépendant de v_1 et v_2 pour former la matrice de passage $P = [v_1 v_2 v_3]$. On cherche v_3, vecteur propre généralisé associé à A pour la valeur propre $\lambda = 3$ vérifiant donc $(A - 3I)v_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut alors prendre $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Les calculs avec les vecteurs propres généralisés peuvent être un peu plus compliqués pour des matrices de format 3×3 car on peut avoir une valeur propre $\lambda^\star$ d'ordre de multiplicité 3 avec seulement un vecteur propre indépendant v_1. Dans ce cas, on calcule v_2 et v_3 tels que

$$(A - \lambda^\star I)v_2 = v_1 \text{ et } (A - \lambda^\star I)v_3 = v_2.$$

Si $P = [v_1 v_2 v_3]$ alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^\star & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}$.

Exemple 3.5.3 On considère $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice admet $\lambda = 2$ comme valeur propre d'ordre de mulitplicité 3 mais seulement un vecteur propre indépendant v_1. On définit v_2 et v_3 par

$$\begin{cases} (A - 2I)v_2 = v_1 \\ (A - 2I)v_3 = v_2 \end{cases}.$$

Ainsi, avec $P = [v_1 v_2 v_3]$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.5.3 Résolution d'équations de récurrence avec des matrices non diagonalisables

On se pose le problème de la résolution du système des équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ quand A est une matrice de taille 2×2 non diagonalisable. Choisissons P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 \\ 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}$. Le changement de variables $z = PZ$ fait passer du système $z_{n+1} = Az_n$ au système $Z_{n+1} = (P^{-1}AP)Z_n$.

$$Z_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_{n+1} = \lambda X_n + Y_n & (3.6a) \\ Y_{n+1} = \lambda Y_n & (3.6b) \end{cases}$$

On peut résoudre (3.6b) pour Y_n : $Y_n = c_1\lambda^n$ et substituer cette solution dans la première équation (3.6a) : $X_{n+1} = \lambda X_n + c_1\lambda^n$. On itère ensuite, à partir de $n = 0$, pour trouver sa solution générale :

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & c_0 \\ X_1 & = & \lambda X_0 + c_1\lambda^0 = \lambda c_0 + c_1 \\ X_2 & = & \lambda X_1 + c_1\lambda^1 = \lambda(\lambda c_0 + c_1) + c_1\lambda = \lambda^2 c_0 + 2c_1\lambda \\ X_3 & = & \lambda^3 c_0 + 3c_1\lambda^2 \\ X_4 & = & \lambda^4 c_0 + 3c_1\lambda^2 \\ & \vdots & \\ X_n & = & \lambda^n c_0 + nc_1\lambda^{n-1} \end{array}$$

Si on remplace X_n dans l'équation précédente, on a

$$X_{n+1} = \lambda(c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1}) + c_1\lambda^n = c_0\lambda^{n+1} + (n+1)c_1\lambda^n = \lambda X_n + Y_n.$$

Par conséquent, $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1} \\ c_1\lambda^n \end{pmatrix}$. On utilise ensuite le changement de coordonnées $z = PZ$ pour écrire la solution générale du système initial $z_{n+1} = Az_n$ soit

$$z_n = PZ_n = [v_1 v_2] \begin{pmatrix} c_0 r^n + nc_1 r^{n-1} \\ c_1 r^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z_n = (c_0 r^n + nc_1 r^{n-1})v_1 + c_1 r^n v_2. \qquad (3.7)$$

Théorème 3.5.3 *Supposons que A soit une matrice carrée d'ordre 2 avec une valeur propre multiple λ et seulement un vecteur propre indépendant v_1. Soit v_2 un vecteur propre généralisé associé à v_1 et λ. Alors la solution du système d'équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ est (3.7).*

Exemple 3.5.4 La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable car elle admet une valeur propre double $\lambda = 3$ et un seul vecteur propre indépendant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On considère le système linéaire d'équations de récurrence associé à A

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 4x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 2y_n \end{cases}.$$

Grâce qu théorème précédent, la solution générale de ce système est

$$\begin{cases} x_n & = & c_0 3^n + c_1(n3^{n-1} + 3^n) \\ y_n & = & -c_0 - c_1 n3^{n-1} \end{cases}.$$

Généralisons maintenant le théorème 3.5.3 en dimension 3 : soit le changement de variable $z = PZ$ alors $W_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)W_n = TW_n$. En effet, si $w_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$, on a $w_{n+1} = Aw_n \Leftrightarrow PW_{n+1} = APW_n \Leftrightarrow W_{n+1} = P^{-1}APW_n$

$$\Leftrightarrow W_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} X_{n+1} = \lambda_1 X_n + Y_n & \quad (3.8a) \\ Y_{n+1} = \lambda_1 Y_n & \quad (3.8b) \\ Z_{n+1} = \lambda_2 Z_n & \quad (3.8c) \end{array} \right.$$

(3.8c) $\Leftrightarrow Z_n = \lambda_2^n Z_0$. Ensuite, (3.8$b$) $\Leftrightarrow Y_n = \lambda_1^n Y_0$ et enfin, dans (3.8a), $X_{n+1} = \lambda_1 X_n + \lambda_1^n Y_0$. Or

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & c_0,\ Y_0 = c_1 \\ X_1 & = & \lambda_1 c_0 + \lambda_1^0 c_1 = \lambda_1 c_0 + c_1 \\ & \vdots & \\ X_n & = & \lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1} \end{array} \right.$$

Dans (3.8a), on a $X_{n+1} = \lambda_1^{n+1} c_0 + (n+1) c_1 \lambda_1^n$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_1^n c_1 \\ \lambda_2^n c_2 \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ensuite le changement de coordonnées $z = PZ$, on obtient

$$\begin{aligned} w_n = PW_n = [v_1 v_2 v_3] \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = [v_1 v_2 v_3] T^n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = PT^n P^{-1} w_0 \\ = (\lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1}) v_1 + \lambda_1^n c_1 v_2 + \lambda_2^n c_2 v_3 \text{ où } c_0 = X_0 = P^{-1} x_0. \end{aligned}$$

3.5.4 Exercice récapitulatif (corrigé)

Déterminer la solution du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & y_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 2y_n + 4z_n \end{array} \right.$$

pour des conditions initiales données.

Correction.

La matrice associée au système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminons le spectre de A.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda^2)(3-\lambda).$$

Donc $Sp(A) = \{2, 3\}$ où 2 est une valeur propre de multiplicité 2. Déterminons maintenant les sous-espaces propres associés.

- $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 2X\}$ avec $X = (x, y, z)$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -y - z & = & 0 \\ 2y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

  donc en choisissant $x = 1$, $v_1 = (1, 0, 0)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 2$. Comme $dim(E_2) \neq 2$, A n'est pas diagonalisable.
  Recherchons un vecteur propre généralisé. On cherche $v_2 = (x, y, z)$ tel que

$$(A-2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 1 \\ -y-z &= 0 \\ 2y+2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $v_2 = (x, y, z) = (x, 1, -1) = x(1, 0, 0)+(0, 1, -1)$. En choisissant $x = 0$, on obtient $v_2 = (0, 1, -1)$.

- $E_3 = \{X \in \mathbb{R}^3/AX = 3X\}$ avec $X = (x, y, z)$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ -2y-z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -2y \end{cases}$$

donc en choisissant $y = 1$, $v_3 = (1, 1, 2)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

Donc, si $P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = T \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$. Ainsi, en vérifiant que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la solution en fonction des conditions initiales car $X_n = A^n X_0$:

$$\begin{cases} x_n &= x_0 2^n + y_0((n+1)2^n - 3^n) + z_0((2+n)2^{n-1} - 3^n) \\ y_n &= y_0(2^{n+1} - 3^n) + z_0(2^n - 3^n) \\ z_n &= y_0 52 \times 3^n - 2^{n+1}) + z_0(2 \times 3^n - 2^n) \end{cases}$$

3.6 Processus de Markov

Dans ce paragraphe, on introduit une application importante des valeurs propres et vecteurs propres à des problèmes économiques : la solution des processus de Markov.
On travaille avec un processus dynamique dans lequel le temps est traité comme une variable discrète, ainsi la dynamique est donnée par des équations de récurrence. Supposons que le processus sous-jacent à l'étude puisse être décrit par un nombre fini d'états $S_1, \ldots, S_k$. À chaque période le système se situe en un et seulement un de ces k états.

Définition 3.6.1 *Un processus stochastique est une règle qui donne la probabilité que le système ou un individu dans ce système soit dans l'état i au temps $n+1$, connaissant les probablités d'être dans les divers états aux périodes précédentes. Cette probabilité pourrait, en principe, dépendre de l'intégralité de l'histoire antérieure du système qui correspond aux états qui ont été réalisés aux périodes $1, 2, \ldots, n$. Quand la probabilité du système, pour tout état i et au temps $n+1$, dépend seulement de ce qu'était l'état du système au temps n, le processus stochastique est appelé un processus de Markov. Pour un processus de Markov, seulement le passé immédiat a de l'importance.*

Les éléments-clés d'un processus de Markov sont :

1. la probabilité $x^i(n)$ que l'état i survienne à la période n, ou alternativement, la fraction de la population qui est dans l'état i à la période n et
2. les probabilités de transition m_{ij}, où m_{ij} est la probabilité que le processus soit dans l'état i à la période $n+1$ s'il est en l'état j au temps n.

La matrice dans laquelle on place les probabilités de transition est appelée matrice de transition ou matrice stochastique ou encore matrice de changement d'états :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \ldots & m_{kk} \end{pmatrix}$$

On remarque que ces probabilités sont écrites de façon à ce que les premiers indices caractérisent la période suivante et les seconds indices la période actuelle. En termes probabilistes, m_{ij} est la probabilité (conditionnelle) que le système soit en l'état i à la période suivante, sachant qu'il se trouve en l'état j à cette période. Compte tenu de son état à la période actuelle, le système évolue vers un et un seul état à la période suivante. Par conséquent, la somme des termes m_{ij} par rapport à i doit être égale à 1 ; ce qui revient à dire que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice doit être égale à 1. Comme on définit une matrice de Markov comme étant toute matrice non négative (m_{ij}) dont la somme des éléments de chaque ligne $\sum_i m_{ij}$ est égale à 1, c'est la transposée de M qui est une matrice de Markov.
Nous supposons que les probabilités m_{ij} sont fixées et indépendantes de n. Pour décrire cette hypothèse, nous disons que le processus est temporellement homogène ou que les probabilités de transition sont stationnaires. Pour révéler la dynamique sous-jacente d'un processus de Markov, supposons que $x^j(n)$ soit la fraction de la population de taille N qui est en l'état j à la période n. Alors, le nombre total des membres de la population en l'état j à la période n. Alors le nombre total des membres de la population en l'état j à la période n est $x^j(n)N$. Par hypothèse, $m_{ij}x^j(n)N$ de ces membres seront dans l'état i à la période $(n+1)$. Le nombre total des membres de la population dans l'état i à la période $(n+1)$, $x^i(n+1)N$, est la somme par rapport à j de ces nombres correspondants aux membres qui passent de l'état j à l'état i :

$$x^i(n+1)N = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}x^j(n)N \text{ pour tout } i = 1, \dots, k$$

ou, en notation matricielle, après avoir divisé par N,

$$\begin{pmatrix} x^1(n+1) \\ \vdots \\ x^k(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(n) \\ \vdots \\ x^k(n) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ce qui donne $\mathbf{x}(n+1) = M\mathbf{x}(n)$. Le système d'équations (3.9), dans lequel M^t est une matrice de Markov, est appelé un système de Markov ou processus de Markov stationnaire.

Exemple 3.6.1 Considérons le modèle d'emploi suivant. Chaque personne dans la population est soit employée soit sans emploi. Les deux états de ce modèle sont « être employé » et « être sans emploi ». Soit $x^1(n)$ la fraction de la population étudiée qui est employée à la fin de la période n et $x^2(n)$ la fraction sans-emploi. Supposons qu'une personne employée a une probabilité de 90% de rester employée à la période suivante (et, par conséquent, une probabilité de 10% de se retrouver sans emploi à la période suivante), et qu'une personne sans-emploi a une probabilité de 40% (et, par conséquent, 60% de chance de rester sans emploi).
En déduire le taux de chômage à long terme.

Correction.
Les évolutions sont retracées par :

$$\begin{cases} x^1(n+1) &= 0,9x^1(n) + 0,4x^2(n) \\ x^2(n+1) &= 0,1x^1(n) + 0,6x^2(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1(n+1) \\ x^2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Une valeur propre du système est $\lambda = 1$. En utilisant le résultat de la trace, nous concluons que l'autre valeur propre est $\lambda = 1,5 - 1 = 0,5$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale du système (3.10) est

$$\begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} 1^n + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 0,5^n. \tag{3.11}$$

Puisque $1^n = 1$ et que $\lim_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, dans le long terme, la solution générale (3.11) du système de Markov (3.10) tend vers $w_1 = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme w_1 devrait être un vecteur de probabilité dont la somme des composantes est égale à 1, prenons c_1 égal à $1/5$ c'est-à-dire l'inverse de la somme des composantes de w_1. On en déduit que la solution du système (3.10) tend vers $\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ quand n tend vers l'infini et que nos hypothèses conduisent au taux de chômage de long terme de 20% pour cette population.

Il existe beaucoup de résultats généraux concernant les processus de Markov que l'analyse de cet exemple illustre :

1. $\lambda_1 = 1$ est toujours une valeur propre de la matrice de Markov sous-jacente, cela est aussi vrai pour sa matrice transposée.
2. Pour une matrice de format 2×2, la trace, qui correspond à la somme des valeurs propres, est toujours une nombre compris entre 0 et 2. Par conséquent, la seconde valeur propreλ_2 prend une valeur comprise entre -1 et $+1$.
3. Si $a_{ii} < 1$, alors les éléments de $(A - 1I)$ ont les signes $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$. Ainsi, la valeur propre $\lambda_1 = 1$ a un vecteur propre w_1 dont tous les éléments sont positifs. Ce vecteur propre peut servir de vecteur de probabilité v_1 en divisant chaque composante de w_1 par la somme des composantes de w_1.
4. La solution générale est $1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$. Puisque λ_2^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, chaque solution tend vers v_1. En particulier, les composantes de v_1 donnent la distribution de long terme des états.

Ces quatre propriétés restent valables pour une large classe de processus pour lesquels la matrice de transition ou au moins une puissance de la matrice de transition a toutes ses composantes strictement positives.

Définition 3.6.2 *Soit M une matrice de Markov définie comme une matrice non négative dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Alors, M est appelée une matrice de Markov régulière si M^r a seulement des éléments positifs pour un entier r. Dans ce cas, si $r = 1$, c'est-à-dire si chaque élément de M est positif, M est appelée une matrice positive.*

Théorème 3.6.1 *Soit M une matrice de Markov régulière. Alors,*

1. *1 est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité 1,*
2. *toute autre valeur propre λ de M satisfait $|\lambda| < 1$,*
3. *la valeur propre 1 a un vecteur propre associé w_1 avec des composantes strictement positives et*
4. *si nous notons v_1 le vecteur w_1 divisé par la somme de ses composantes, alors v_1 est un vecteur de probabilité et chaque solution $x(n)$ de $x(n+1) = Mx(n)$ tend vers v_1 quand n tend vers $+\infty$.*

Exemple 3.6.2 Supposons que les familles françaises soient classées comme
- urbaines,
- suburbaines,
- rurales,

et que chaque année :
- 20% des familles urbaines se déplacent en banlieue et 5% vont à la campagne,
- 2% des habitants des banlieues se déplacent dans les zones urbaines et 8% vont dans les zones rurales,
- 10% des familles rurales migrent dans les zones urbaines et 20% vont en banlieue.

Étudier, à long terme, les déplacements des familles.

Correction.
Soient U_n, S_n et R_n les fractions de la population classée, respectivement à l'horizon de n années. Alors, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ S_{n+1} \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,02 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,05 & 0,08 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ S_n \\ R_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

La matrice A du système admet pour valeurs propres 1 ; 0,7 et 0,65 donc A est diagonalisable. Les vecteurs propres associés sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale du problème est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} U_n \\ S_n \\ R_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix} \times 1^n + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times 0,7^n + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times 0,65^n \tag{3.13}$$

Puisque $1^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$, dans le long terme, la solution générale (3.13) du système de Markov (3.12) tend vers $w_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix}$ quand n tend vers l'infini. Comme w_1 devrait être un vecteur de probabilité dont la somme des composantes est égale à 1, on prend c_1 égal à 1. On en déduit qu'à long terme, 2/15 de la population vivra dans les villes, 2/3 en banlieue et 1/5 à la campagne.

3.7 Exercices

Exercice 27 Soient a et b dans $\mathbb{R}$. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 9 & a \\ b & 9 \end{pmatrix}$.
Préciser selon les valeurs de a et b les cas où C est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 28 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -36 & 28 \\ 6 & 23 & -14 \\ 4 & 14 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elle, préciser si elle est diagonalisable danns $\mathbb{R}$. Si oui, la diagonaliser et donner la matrice de passage. Si non, justifier.

Exercice 29 Donner la condition nécessaire et suffisante pour que A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ en donnant la matrice de passage P telle que $M^{-1}PM$ soit diagonale.
2. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 31 Soit A une matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe P inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $C_1 = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que C_1 est un vecteur propre de A. Pour quelle valeur propre ?
2. Donner une équation liant $C_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, C_1 et A.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver C_1 et C_2 comme ci-dessus.

Exercice 32 Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer la décomposition $A = \Delta + N$ où Δ est diagonalisable et N est nilpotente avec $\Delta.N = N.\Delta$

Exercice 33 Dans chacun des cas suivants, calculer les valeurs propres de A :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
5. $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que
   (a) $AX = 5X$,
   (b) $AX = 2X$.

   Vérifier que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution de (a) et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution de (b).
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer l'inverse de P.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$.
4. Calculer A^n pour n entier naturel non nul.

Exercice 35 Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes suivantes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3. Que peut-on en déduire ?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. A est-elle inversible ?

Exercice 36 Calculer les valeurs propres de la matrice A dans les cas suivants, dire si A est diagonalisable :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 37 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
   Vérifier que le spectre de A est $\{-1; 2; 5\}$. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :
   (a) $AX = -X$,
   (b) $AX = 2X$,
   (c) $AX = 5X$.
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D.
4. Calculer A^n pour n entier naturel non nul.

Exercice 38 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les vecteurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 39 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les vecteurs propres de A.
3. Diagonaliser A en précisant la matrice de passage P.
4. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0 = 1$, $V_0 = 1$ et pour tout entier n

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} & = & -U_n + 2V_n \\ V_{n+1} & = & U_n \end{array}.$$

Vérifier que $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

5. Calculer U_n pour tout entier n.

Exercice 40 3 enfants A,B,C jouent avec une balle.

– Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est 0,75 et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est 0,25.
– Lorsque B a la balle, il l'envoie respectivement à A ou à C avec la probabilité 0,75 et 0,25.
– C envoie toujours la balle à B.

On désigne par A_n, B_n, C_n les probabilités qu'à l'issue du n$^{\text{ième}}$ lancer, ce soit A, B ou C qui ait la balle.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée M d'ordre 3 telle que :
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer les valeurs propres de M et les vecteurs propres associés.
3. En déduire que $M = P^{-1}DP$, où D est une matrice diagonale et P une matrice que l'on déterminera.
4. Calculer M^n.
5. Calculer les limites à l'infini des probabilités A_n, B_n et C_n.
On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Exercice 41 Dans les cas suivants, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A. Dire si A est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. On vérifiera que le polynôme caractéristique s'écrit$(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ et que la somme des valeurs propres est égale à la trace de A.
2. Déterminer les vecteurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.
3. Donner une matrice D diagonale et une matrice P, inversibles, telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 43 Problème : De combien de façons peut-on vider un tonneau de n litres avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres ?
Il est nécessaire de bien s'entendre sur la signification du problème. Ainsi un tonneau de 3 litres peut être vidé en prélevant 1 litre puis 2 litres, ou bien 2 litres puis 1 litre, ou bien 3 fois 1 litre. Ces 3 façons seront considérées comme différentes.
Soit U_n le nombre recherché.

1. Vérifier que $U_1 = 1$ et $U_2 = 2$. Calculer U_3.
2. On admettra que la suite (U_n) vérifie la relation : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.
   (a) Déterminer la matrice A telle que : $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que A est diagonalisable.

(c) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

(d) Calculer A^n pour n entier naturel non nul.

(e) En déduire U_n en fonction de n.

Exercice 44 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 45 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $X_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $X_2 = (0, 0, 1, 1)$.
   Calculer AX_1 et AX_2. En déduire que 0 et 1 sont 2 valeurs propres de A.
2. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Préciser sa dimension.
3. On admet que 0 est une valeur propre double. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 46 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
   Montrer que A est diagonalisable puis diagonaliser A, c'est-à-dire trouver une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer A^n.
3. Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leurs premiers termes u_0, v_0, w_0 et les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n & = & 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n & = & 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{array} \right.$$

   Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0.