**ISCID-CO - PRÉPA 2ème année**

**DIAGONALISATION**

**Université du Littoral - Côte d'Opale**

**Laurent SMOCH**

Mars 2013

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincaré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction. Rappels

## 1.1 Motivations

La diagonalisation d'une matrice, lorsqu'elle est possible, permet d'obtenir une matrice diagonale semblable à la matrice initiale, c'est-à-dire qu'il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ ($\det(P) \neq 0$) telles que $A = PDP^{-1}$.

**Exemple 1.1.1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut alors montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculons tout d'abord l'inverse de $P$ : il y a deux façons de présenter les choses, les tableaux et les systèmes (ou les matrices). Pour inverser une matrice, il faut avant tout être certain qu'elle soit inversible, c'est à cela que sert le déterminant (qu'on verra plus en détails dans le chapitre 2).
Pour une matrice d'ordre 3, on utilise la règle de Sarrus :

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} - & - & - \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array} = (0+0+1) - (0+0+0) = 1 \neq 0.$$

La matrice $P$ est donc inversible et on peut par conséquent déterminer $P^{-1}$. On rappelle que l'inverse d'une matrice (carrée) vérifie les propriétés suivantes :

$$P.P^{-1} = P^{-1}.P = I \tag{1.1}$$

où
- "." est la multiplication matricielle (non commutative),
- $I$ est l'élément neutre pour les matrices soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en dimension 3.

Inverser $P$ revient donc à trouver $P^{-1}$ telle que (1.1) soit vraie.

Il existe plusieurs méthodes dont les deux suivantes :
- Les tableaux : on travaille sur les lignes de $P$ à l'aide de combinaisons linéaires spécifiques qui sont appliquées simultanément à $I$. Une fois la matrice $P$ transformée en $I$, $I$ s'est quant à elle transformée en $P^{-1}$.

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l}(L_1) \Leftarrow (L_3)\\ (L_2) \Leftarrow (L_1)\\ (L_3) \Leftarrow (L_2)\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2)\\ (L_3) \Leftarrow (L_3) - 2(L_1)\end{array}$$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right|$. On trouve ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Vérification : $PP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I.$

On trouve de même $P^{-1}P = I$, ce qui prouve que $P^{-1}$ est bien l'inverse de $P$.

– Les systèmes : On résout le système matriciel $Px = y$ avec $x$ et $y$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$. Soient donc $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

$$Px = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 + x_3 & = & y_2 \\ x_1 & = & y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & y_3 \\ x_2 & = & y_1 \\ x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = P^{-1}y.$$

L'inverse d'une matrice trouve son intérêt essentiellement dans l'inversion de systèmes linéaires. Supposons qu'on ait à résoudre le système $(S) \left\{ \begin{array}{cl} y = 4 & (L_1) \Leftarrow (L_3) \\ 2x + z = 5 & (L_2) \Leftarrow (L_1) \\ x = 6 & (L_3) \Leftarrow (L_2) \end{array} \right.$

(a) On peut utiliser la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & & & = 6 \ (L_1) \\ & y & & = 4 \ (L_2) \\ 2x & & +z & = 5 \ (L_3) \Leftarrow (L_3) - 2(L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x & & & = 6 \\ & y & & = 4 \\ & & z & = -7 \end{array} \right.$$

(b) On utilise l'inverse de la matrice exprimant $(S)$. Le système $(S)$ peut en effet se réécrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow PX = b \Leftrightarrow P^{-1}PX = P^{-1}b \Leftrightarrow IX = P^{-1}b \Leftrightarrow X = P^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

L'avantage de $(a)$ est qu'on n'a pas à calculer explicitement l'inverse de $P$ (même si on reconnaît des opérations semblables apparaissant dans le calcul de l'inverse). Par contre, pour chaque second membre différent, il y a une résolution différente.

L'avantage de $(b)$ pallie l'inconvénient de $(a)$, le seul défaut étant le calcul explicite de $P^{-1}$, qui n'est pas toujours indispensable.

2. Retour à l'exemple. Maintenant qu'on dispose de $P^{-1}$, calculons le produit matriciel $PDP^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

(on rappelle que le produit matriciel est associatif c'est-à-dire que $PDP^{-1} = (PD)P^{-1} = P(DP^{-1})$).

Quels sont les intérêts de la diagonalisation ? Outre le fait que $A$ se décompose comme un produit de trois matrices dont l'une est diagonale, la diagonalisation propose les attraits suivants :

– La puissance $n$-ième de $A$ devient très simple à calculer. Par exemple,
$$A^5 = (PDP^{-1})^5 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) =$$
$$PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = P(DDDDDD)P^{-1} = PD^5P^{-1}.$$
Comme $D$ est une matrice diagonale, $D^5$ est très simple à calculer.

– Les vecteurs colonnes de $P$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont appelés les *vecteurs propres* de $A$. Les coefficients $\{2, 1, 1\}$ de $D$ sont appelés les *valeurs propres* de $A$. Les valeurs propres et vecteurs propres jouent un rôle prépondérant dans de nombreux aspects de la théorie économique puisqu'ils constituent les éléments des solutions explicites des modèles linéaires dynamiques.
En outre, les signes des valeurs propres déterminent la stabilité de l'équilibre dans les modèles dynamiques non-linéaires.
Ces signes sont également l'élément clé pour déterminer la nature d'une matrice symétrique. Par conséquent, ils jouent un rôle central dans les conditions du second ordre qui distinguent les maxima des minima dans les problèmes économiques.

Conclusion de l'introduction : les valeurs propres d'une matrice de format $n \times n$ sont les $n$ nombres qui résument les propriétés essentielles de cette matrice.

Connaissances essentielles :
– mise en place d'un système linéaire,
– résolution par la méthode de Gauss-Jordan,
– traduction matricielle,
– produit matriciel (procédure, propriétés du produit, élément neutre, inverse)

On rappelle ci-dessous les notions fondamentales utiles pour ce cours sur la diagonalisation.

## 1.2 Rappels d'algèbre linéaire

### 1.2.1 Notions de bases

**Définition 1.2.1** *Un tableau rectangulaire de la forme ci-dessous*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$
*de $n \times p$ nombres (réels) disposés selon $n$ lignes et $p$ colonnes ($n > 0, p > 0$) est appelée une matrice de format $n \times p$. L'élément $a_{ij} \in \mathbb{R}$ de la matrice se trouve à l'intersection de la $i$-ième ligne et de la $j$-ième colonne. La matrice $A$ s'écrit également sous la forme $A = [a_{ij}]$ avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, p$. Une matrice ayant $n$ lignes et $p$ colonnes est appelée matrice $(n, p)$ ou $n \times p$.*

**Définition 1.2.2** *Le couple $(n, p)$ est appelé la dimension de la matrice.*

**Définition 1.2.3** *Une matrice de dimension $(n, 1)$ est une matrice colonne.*
*Une matrice de dimension $(1, p)$ est une matrice ligne.*

Notation : L'ensemble des matrices de dimension $(n, p)$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

**Exemple 1.2.1** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A$ a pour dimension $(3, 2)$, et par exemple $a_{12} = 3$, $a_{31} = 1$.

**Définition 1.2.4** *Soient $B' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \ldots, \vec{e_n}'\}$ la base canonique (BC) de $\mathbb{R}^n$ et $B' = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_p}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension $(n,p)$. Alors*

- *$\vec{c_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{e_k}'$ est le j-ième vecteur colonne extrait de A, c'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$.*
- *$\vec{l_i} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\vec{e_k}$ est le i-ième vecteur ligne extrait de A, c'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip})$.*

**Exemple 1.2.2** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'\}$ la BC de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ la BC de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{l} \vec{c_1} = 2\vec{e_1}' + 4\vec{e_2}' + \vec{e_3}',\ \vec{c_2} = 3\vec{e_1}' + 2\vec{e_2}' \\ \vec{l_1} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2},\ \vec{l_2} = 4\vec{e_1} + 2\vec{e_2},\ \vec{l_3} = \vec{e_1}. \end{array}$$

### 1.2.2 Opérations sur les matrices

**Définition 1.2.5** - *Addition de deux matrices*
*Soient deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ toutes deux de dimension $(n,p)$. On additionne terme à terme pour obtenir*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

*de dimension $(n,p)$.*

**Exemple 1.2.3** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 4+0 & 2+1 \\ 1+1 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Propriété 1.2.1** *Soient $A, B$ et $C$ trois matrices de dimension $(n,p)$ et 0 la matrice $(n,p)$ dont les éléments sont tous égaux à 0. Alors*

1. *$(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité),*
2. *$A + 0 = A$ (élément neutre),*
3. *$A + (-A) = 0$ (opposé),*
4. *$A + B = B + A$ (commutativité).*

**Remarque 1.2.1** L'opposé de $A$ est défini par $-A = [-a_{ij}]$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

**Définition 1.2.6** - *Mutliplication d'une matrice par un scalaire*
*Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension $(n,p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $\lambda A$ comme matrice dont tous les coefficients sont multipliés par $\lambda$ : $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$. $\lambda A$ est aussi de dimension $(n,p)$.*

**Exemple 1.2.4** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$. Alors $\lambda A = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 2 \\ 3\times 1 & 3\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

**Remarque 1.2.2** L'opposé de $A$ vérifie $-A = (-1)A$.

**Propriété 1.2.2** *Soient $A$ et $B$ deux matrices de dimension $(n,p)$ et $\lambda, \mu$ deux réels.*

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
2. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
4. $1 \times A = A$ *et* $0 \times A = 0$.

**Définition 1.2.7** - *Multiplication de matrices*
*Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice $(n,p)$ et $B = [b_{ij}]$ une matrice $(p,q)$ le produit des deux matrices $C = AB$ a pour dimension $(n,q)$ et s'écrit :*

$$C = [c_{ij}] \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \text{ pour } i = 1,\dots,n \text{ et } j = 1,\dots,q.$$

**Remarque 1.2.3** Le produit de deux matrices n'est réalisable que si le nombre de colonnes de $A$ (la matrice à gauche) est égal au nombre de lignes de $B$ (la matrice à droite).

**Exemple 1.2.5** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le produit $AB$ est réalisable et $AB = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$.

**Remarque 1.2.4** En général la multiplication de deux matrices n'est pas commutative :
- Si $AB$ existe, $BA$ n'existe pas forcément.
- Si $BA$ existe alors généralement $AB \neq BA$.

**Propriété 1.2.3** *Soient $A(n,p)$, $B(p,q)$, $C(q,s)$, $D(p,q)$ et $E(q,n)$.*

1. $(AB)C = A(BC)$ *(associativité [matrice de dimension $(n,s)$]),*
2. $A(B+D) = AB + AD$ *(distributivité à gauche [matrice de dimension $(n,q)$]),*
3. $(B+D)E = BE + DE$ *(distributivité à droite [matrice de dimension $(p,n)$]).*

**Définition 1.2.8** - *Transposition de matrice*
*Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice transposée de $A$ notée $A^t$ (ou ${}^tA$) est la matrice obtenue en écrivant les lignes de $A$ en colonnes :*

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

*Si $A$ a pour dimension $(n,p)$ alors $A^t$ a pour dimension $(p,n)$.*

**Exemple 1.2.6** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice transposée de $A$ est égale à $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**Propriété 1.2.4** *Soient $A(n,p)$, $B(n,p)$, $C(p,q)$ trois matrices et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$,
2. $(A^t)^t = A$,
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,
4. $(AC)^t = C^t A^t$.

### 1.2.3 Matrices carrées, matrices élémentaires

**Définition 1.2.9** *Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée matrice carrée. Si elle a pour dimension $(n,n)$, on dit alors qu'elle est d'ordre $n$.*

Rappelons que l'addition et la multiplication de matrices ne sont pas définies pour des matrices quelconques. Cependant, si on considère uniquement des matrices carrées d'ordre $n$ donné, alors les opérations d'addition, de multiplication par un scalaire, et de transposition sont définies et leurs résultats sont encore des matrices carrées d'ordre $n$.

**Définition 1.2.10** *On appelle diagonale (ou diagonale principale) d'une matrice carrée d'ordre $n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ de la matrice.*

**Définition 1.2.11** *Une matrice carrée $D = [d_{ij}]$ est dite diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont nuls. Une telle matrice est fréquemment notée $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ où certains ou tous les scalaires $d_{ii}$ peuvent être égaux à 0.*

**Définition 1.2.12** *Une matrice carrée d'ordre $n$ ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs, est notée $I_n$ et est appelée matrice unité ou matrice identité.*

**Propriété 1.2.5** *Quelle que soit $A(n,p)$, $AI_n = I_nA = A$.*

**Propriété 1.2.6** *La matrice $\lambda I_n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, est appelée matrice scalaire. C'est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à $\lambda$.*

**Remarque 1.2.5** On parle de matrice scalaire car elle joue le même rôle que celui d'un scalaire dans la multiplication d'une matrice par un scalaire : $A(\lambda I_n) = (\lambda I_n)A = \lambda A$.

**Définition 1.2.13** *Une matrice carrée $A$, d'ordre $n$, est dite inversible ou non singulière, s'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice $B$ est unique, d'ordre $n$. On l'appelle matrice inverse de $A$ et on la note $A^{-1}$.*

**Remarque 1.2.6** La relation précédente est symétrique, c'est-à-dire que si $B$ est l'inverse de $A$ alors $A$ est l'inverse de $B$.

**Définition 1.2.14** *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si $A^t = A$. Autrement dit si $\forall i \neq j$, $a_{ij} = a_{ji}$.*

**Définition 1.2.15** *Une matrice triangulaire est une matrice carrée dont les éléments au dessous (ou au dessus) de la diagonale principale sont tous nuls.*

## 1.3 Quelques matrices usuelles

### 1.3.1 Matrices de commandes et des prix

Pour un consommateur susceptible d'acheter $n$ produits $P_1, P_2, \dots, P_n$, chacune de ses commandes correspond à un vecteur $C$ d'ordre $n$, soit $C = (x_1, \dots, x_n)$ où $x_i$ désigne la quantité (par exemple le nombre de kilos) du produit $P_i$. La quantité totale de tous les produits achetés par la commande $C$ est donnée par l'expression matricielle $(x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si la commande $C$ est doublée, on obtient la commande $2C$, définie par le produit du vecteur $C$ par le scalaire 2.

Si on globalise deux commandes $C_1$ et $C_2$, on obtient la commande $C_1+C_2$, qui est la somme vectorielle des deux vecteurs $C_1$ et $C_2$.
Si on s'occupe à présent du prix total à payer pour une commande $C=(x_1,\ldots,x_n)$ et si le prix unitaire du produit $P_i$ vaut $p_i$, le montant global à payer pour $C$ est donné par le produit scalaire $C^tP$ où $P$ est le vecteur d'ordre $n$ dont les composantes sont les $p_i$.
Cet exemple simple montre que toutes les opérations fondamentales de l'algèbre vectorielle sont naturelles. Son adaptation au cas de plusieurs consommateurs permet d'illustrer les principales opérations de l'algèbre matricielle.
Supposons par exemple que 3 clients puissent acheter 4 produits. Pour fixer les idées, on considère une commande définie par la matrice

$$C=\begin{pmatrix}5&2&4&1\\3&0&2&3\\2&1&5&0\end{pmatrix},$$

les lignes étant relatives aux personnes et les colonnes se rapportant aux biens. Les quantités globales (des 4 produits) achetées (par les 3 personnes) sont rassemblées dans un vecteur colonne d'ordre 3 (chaque ligne se rapportant à un client) obtenu en effectuant le produit matriciel $C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\\8\end{pmatrix}$. De même les quantités de chaque produit réellement commandées sont fournies par un vecteur ligne d'ordre 4 (chaque colonne se rapportant à un bien), qui est le résultat du produit matriciel $(1\ 1\ 1)C=(10\ 3\ 11\ 4)$. Pour doubler la commande $C$, il suffit de considérer la matrice $2C$.
De la même manière, l'addition de deux commandes, résumées par les matrices $C_1$ et $C_2$, est évidemment donnée par la somme $C_1+C_2$. L'addition de deux matrices apparaît dès lors comme une opération tout à fait naturelle.

Penchons nous à présent sur les prix unitaires de ces quatre produits : ils peuvent être rassemblés dans une nouvelle matrice dont les lignes concernent les biens, la première colonne les prix unitaires d'achat et la seconde colonne les frais unitaires de transport. À titre d'exemple, soit

$$P=\begin{pmatrix}4&0,2\\2&0,1\\4&0,3\\5&0,1\end{pmatrix}$$

la matrice des prix unitaires pour les quatre articles considérés. Il est aisé de constater que les factures globales à payer pour les clients pour l'achat et le transport de biens commandés à l'aide de la matrice $C$ sont réunies dans la matrice

$$F=CP=\begin{pmatrix}45&2,5\\35&1,5\\30&2\end{pmatrix}$$

tandis que les sommes totales à payer par chacun des trois clients sont données par le vecteur colonne

$$T=F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47,5\\36,5\\32\end{pmatrix}.$$

Ce vecteur $T$ peut aussi être obtenu en multipliant la matrice $C$ par le vecteur $Q$ donnant, pour chaque produit, le prix unitaire total à payer (soit la somme du prix unitaire d'achat et du prix unitaire de transport) :

$$T=CQ \text{ avec } Q=P\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,2\\2,1\\4,3\\5,1\end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien la règle d'associativité de la multiplication matricielle.
Ainsi on constate que la mutliplication de la matrice $C$ par le vecteur $Q$ agit comme une application d'un espace à 4 dimensions sur un espace à 3 dimensions ; cela signifie concrètement que les trois comptes peuvent être obtenus à partir des 4 prix unitaires.

### 1.3.2 Matrices de fabrication

On considère la fabrication de différents produits en admettant les deux hypothèses suivantes :

- la production de $k$ unités d'un produit réclame $k$ fois les quantités de facteurs utilisées pour une seule unité de ce produit,
- la production simultanée d'une unité d'un produit A et d'une unité d'un produit B nécessite des quantités de facteurs égales à la somme des quantité nécessaires pour fabriquer une unité de A et une unité de B.

Ces deux conditions sont finalement très naturelles, elles confèrent un caractère linéaire à la production et permettent d'illlustrer aisément les opérations matricielles de base.
En guise d'exemple, on analyse tout d'abord la fabrication de trois produits semi-finis $S_1, S_2, S_3$ au moyen de 4 facteurs primaires de production $F_1, F_2, F_3$ et $F_4$ (qui peuvent être, pour fixer les idées, le travail, le capital, l'énergie et des matières premières). La quantité du facteur $F_j$ nécessaire pour fabriquer une unité de produit $S_i$ est donnée par l'élément $a_{ij}$ de la matrice $M = [a_{ij}]$ appelée matrice de fabrication. Les éléments de $M$ seront supposés fixes aussi longtemps que la technique de production reste inchangée.
On prend comme exemple numérique :

$$M = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 3 & 6 \\ 200 & 10 & 4 & 4 \\ 150 & 20 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la production d'une unité de $S_1$ réclame 100 (respectivement 50, 3, 6) unités de $F_1$ (respectivement $F_2$, $F_3$ et $F_4$). De même pour $S_2$ et $S_3$.
Pour fabriquer $k$ unités de chaque produit, les quantités des facteurs utilisées seront donc données par les éléments de la matrice $kM$. Par contre si on veut fabriquer des quantités différentes des trois produits soit $k_1$ (respectivement $k_2$ et $k_3$) unités de $S_1$ (respectivement $S_2$ et $S_3$), les quantités de facteurs seront rassemblées dans le produit matriciel $diag(k_1, k_2, k_3)M$.

Poursuivons l'examen de l'exemple. Les 3 produits semi-finis $S_1$, $S_2$ et $S_3$ servent à leur tour pour fabriquer 2 produits finis $P_1$ et $P_2$. Pour obtenir une unité de produit $P_i$, il faut utiliser la quantité $b_{ij}$ de $S_j$. Les nombres $b_{ij}$ sont les éléments d'une nouvelle matrice de fabrication $N = [b_{ij}]$. Par exemple, soit

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il faut 5 (respectivement 8 et 6) unités de $S_1$ (respectivement $S_2$ et $S_3$) pour fabriquer une unité de $P_1$. De même pour $P_2$.
Les quantités de chaque facteur primaire intervenant dans la fabrication de chaque produit fini peuvent être rassemblées dans une matrice $P$, dont les lignes se rapportent aux produits finis et les colonnes aux facteurs primaires ; on obtient $P$ en effectuant le produit matriciel $NM$. Avec les données ci-dessus on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 3000 & 450 & 77 & 92 \\ 1300 & 180 & 32 & 38 \end{pmatrix}$$

### 1.3.3 Le double classement en comptabilité

En comptabilité, on a souvent recours à la méthode en partie double, qui consiste à enregistrer deux fois chaque opération ; une première fois au crédit d'un certain compte, une deuxième fois au débit d'un autre compte. Pour éviter toute erreur, il convient de toujours vérifier l'égalité entre la somme des crédits et des débits.

Ce double classement peut avantageusement être réalisé sous forme matricielle ; dans ce cas, nous verrons que les contrôles sont automatiques.
On construit une matrice carrée d'ordre $n$, notée $M = [a_{ij}]$, dont les indices des lignes (respectivement de colonnes) indiquent les numéros des comptes crédités (respectivement débités). Le nombre $a_{ij}$ désigne la somme débitée au compte $j$ et créditée au compte $i$.
On considère à présent le vecteur colonne $U$ composé de $n$ éléments égaux à 1. Le produit matriciel $MU$ définit un vecteur colonne dont les éléments $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont les sommes des crédits relatifs aux comptes correspondant aux indices de lignes, puisque $c = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Par ailleurs le produit $U^tM$ donne un vecteur ligne dont les éléments $d_1, d_2, \ldots, d_n$ représentent la somme des débits correspondant aux indices de colonnes, car $d_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. En résumé,

$$MU = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } U^tM = (d_1\ d_2 \ldots d_n).$$

La balance des comptes s'effectue en comparant les sommes des crédits et des débits. Or le total des dédits de tous les comptes vaut

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = (d_1\ d_2 \ldots d_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (U^tM)U$$

De même, le total des crédits de tous les comptes est égal à

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = (1\ 1 \ldots 1) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = U^t(MU)$$

En vertu de l'associativité du produit matriciel, on a

$$(U^tM)U = U^t(MU) = U^tMU \text{ d'où } \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Ainsi l'ensemble des comptes est toujours en équilibre dans le double classement réalisé matriciellement.

### 1.3.4 Matrices de contingence

La répartition d'individus selon deux critères peut être décrite par une table de contingence. Il s'agit d'une matrice $N = [n_{ij}]$, de format $p \times q$, qui croise les $p$ modalités d'une variable $x$ et les $q$ modalités d'une variable $y$, l'élément $n_{ij}$ désigne donc le nombre d'occurences simultanées des modalités $i$ de $x$ et $j$ de $y$.
On note $n_{i.}$ (respectivement $n_{.j}$) la fréquence marginale de la ligne $i$ (respectivement de la colonne $j$), c'est-à-dire la somme des nombres figurant sur la ligne $i$ (respectivement de la colonne $j$).
La ligne $i$ de $N$ définit la répartition des $n_{i.}$ individus possédant la modalité $i$ de $x$ selon les diverses modalités de $y$.
Très souvent, on ne s'intéresse qu'au profil des individus de la ligne $i$, c'est-à-dire aux probabilités conditionnelles pour un individu d'appartenir à la modalité $j$ de $y$ sachant qu'il possède la modalité $i$ pour $x$. Ceci justifie le remplacement de la table $N$ par la matrice

$$P_1 = \left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}\right).$$

Des considérations analogues relatives aux modalités de $y$ conduisent à étudier la matrice

$$P_2 = \left(\frac{n_{ij}}{n_{.j}}\right).$$

Ces deux nouvelles matrices $P_1$ et $P_2$ peuvent être construites en multipliant $N$ par une matrice diagonale adéquate. De fait, pour $D_l = diag(n_{1.}, n_{2.}, \ldots, n_{p.})$ et $D_c = diag(n_{.1}, n_{.2}, \ldots, n_{.q})$, $P_1 = D_l^{-1}N$ et $P_2 = ND_c^{-1}$, pour autant bien-entendu que chaque $n_{i.}$ et chaque $n_{.j}$ soit non nul.
Lorsque la table de contingence étudiée provient d'un échantillon extrait d'une population unique, il est souvent intéressant de tester l'indépendance dans cette population de deux caractéristiques $x$ et $y$. À cet effet, on compare les fréquences observées à des fréquences théoriques calculées en supposant précisément les deux caractéristiques indépendantes. Ces fréquences théoriques forment une matrice $T$, de même format $p \times q$, qui est donnée par le produit suivant : $T = \frac{1}{n} D_l U D_c$ où $n$ désigne l'effectif de l'échantillon soit

$$n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij},$$

et $U$ est la matrice de format $p \times q$ dont tous les éléments sont égaux à 1. Pour évaluer l'accord entre les éléments de $N$ (ou fréquences onservées) et ceux de $T$ (ou fréquences théoriques), on peut alors effectuer un test statistique du $\chi^2$.
Considérons l'exemple numérique suivant : on analyse les effectifs de la main d'œuvre aux États-Unis en 1940, ils sont donnés (en millions) dans le tableau ci-dessous :

| $x$ | $y$ | |
|---|---|---|
| | salariés | chômeurs |
| Hommes | 34 | 6,2 |
| Femmes | 11,2 | 1,8 |

La table de contingence $N = \begin{pmatrix} 34 & 6,2 \\ 11,2 & 1,8 \end{pmatrix}$ donne naissance aux profils, des lignes et des colonnes, résumés respectivement par les deux matrices diagonales

$$D_l = \begin{pmatrix} 40,2 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \text{ et } D_c = \begin{pmatrix} 45,2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

En supposant équivalente la répartition de l'emploi chez les hommes et les femmes, on obtient la matrice des effectifs théoriques suivante :

$$T = \frac{1}{53,2} D_l \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} D_c = \begin{pmatrix} 34,15 & 6,05 \\ 11,05 & 1,95 \end{pmatrix}$$

matrice qui est visiblement assez proche de $N$. Concrètement, il y a donc lieu d'accepter l'hypothèse de l'indépendance de la situation d'emploi et du sexe (cette conclusion intuitive est d'ailleurs confirmée par un test du $\chi^2$ : la statistique $\chi^2$ vaut $0,0179$, qui est nettement inférieure à la valeur théorique $6,63$, pour un degré de liberté , au seuil de signification de 1%).

### 1.3.5 Matrices de variances-covariances

Lorsqu'on étudie simultanément deux grandeurs $x$ et $y$ chez $n$ individus, la $i$-ème personne est caractérisée par les valeurs $x_i$ pour $x$ et $y_i$ pour $y$. Ces informations peuvent être rassemblées dans une matrice de format $n \times 2$, chaque colonne ayant trait à une grandeur $x$ ou $y$, chaque ligne à un individu. On désigne par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

la matrice ainsi formée. La moyenne des $x_i$ (respectivement $y_i$) peut être obtenue en faisant le produit $\frac{1}{n}(1 \dots 1)X = (\overline{x}\ \overline{y}) = m$. Le nuage de points $(x_i, y_i)$ possède le point $(\overline{x}, \overline{y})$ comme centre de gravité (ou barycentre). Les données deviennent centrées par rapport à leur moyenne grâce à l'opération suivante

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 - \overline{x} & y_1 - \overline{y} \\ x_2 - \overline{x} & y_2 - \overline{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_n - \overline{x} & y_n - \overline{y} \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ 0 & \overline{y} \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} m.$$

En effectuant le produit $\frac{1}{n} X_0^t X_0$, on obtient une matrice carrée d'ordre 2 et symétrique $C$, dont les éléments diagonaux sont les variances $V(x) = s_x^2$ et $V(y) = s_y^2$ des $x_i$ et $y_i$ respectivement, les autres éléments valent la covariance $cov(x, y) = s_{xy}$ des $x_i, y_i$. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice de variances-covariances des $x_i$ et $y_i$. Elle est semi-définie positive car, pour tout vecteur $V$ d'ordre 2,

$$V^t C V = \frac{1}{n}(X_0 V)^t X_0 V = \frac{1}{n}\|X_0 V\|^2 \geq 0.$$

Les valeurs propres de $C$ sont donc positives ou nulles, leur somme étant égale à la somme $s_x^2 + s_y^2$ des variances. Lorsque les écart-types $s_x$ et $s_y$ ne sont pas nuls, la matrice $D = diag(s_x, s_y)$ est inversible ; dans ces conditions, $D^{-1} C D^{-1}$ n'est rien d'autre que la matrice de corrélation, soit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

où $r$ est le coefficient de corrélation égal à $\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$. La matrice de corrélation est en fait la matrice de variances-covariances dans le cas de variables centrées et réduites, c'est-à-dire relatives aux données

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - \overline{x}}{s_x} & \frac{y_1 - \overline{y}}{s_y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x_n - \overline{x}}{s_x} & \frac{y_n - \overline{y}}{s_y} \end{pmatrix} = X_0 D^{-1}.$$

Ces considérations peuvent être étendues au cas général de $p$ caractères et $n$ individus. La matrice des observations (ou données) est $X = [x_{ij}]$ où $x_{ij}$ représente la valeur du $i$-ième individu pour la $j$-ième grandeur. Les moyennes sont rassemblées dans la matrice ligne $m = \frac{1}{n}(1\ 1 \dots 1)X$ où la $i$-ième composante $m_i$ désigne la moyenne de la $i$-ième grandeur. On a

$$X_0 = [x_{ij} - m_i] = X - \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} diag(m_1, \dots, m_p),$$

ou encore

$$X_0 = X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} m.$$

Les matrices des variances et covariances et des corrélations, qui sont symétriques et semi-définies positives, sont respectivement égales à

$$C = \frac{1}{n} X_0^t X_0 \text{ et } R = D^{-1} C D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{p1} & \dots & r_{pp-1} & 1 \end{pmatrix},$$

où $r_{ij}$ est le coefficient de corrélation des deux grandeurs d'indices $i$ et $j$.
Ces matrices sont abondamment exploitées dans l'analyse statistique à plusieurs variables.

## 1.4 Exercices

**Exercice 1** Un capital de 50000 euros est partagé en deux parties. La première partie est placée à 6% et la seconde à 8%. Le revenu annuel est le même que si tout le capital était placé à 6,8%.
Calculer la valeur de chaque partie du capital ainsi placé.

**Exercice 2** Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = -2\ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2.$$

1. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que la fonction $F$ définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$F(x) = ax\ln x + b\ln(x-1) + c\ln(x+1) \text{ soit une primitive de } f \text{ sur } ]-1;+\infty[.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_2^3 \left(-2\ln x + \frac{2}{x^2-1} - 2\right) dx$.
(on donnera la valeur exacte en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$).

**Exercice 3** Une entreprise fabrique trois produits A,B et C à partir de trois facteurs de production U, V et W. La fabrication :
- d'une unité de A consomme 3 unités de U, 1 unité de V et 2 unités de W,
- d'une unité de B consomme 2 unités de U, 2 unités de V et 1 unité de W,
- d'une unité de C consomme 0 unité de U, 1 unité de V et 1 unité de W.

L'entreprise dispose d'un stock de 18 unités de U, 9 unités de V et 10 unités de W.
Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs
. $x$ : quantité de produit A fabriqué,
. $y$ : quantité de produit B fabriqué,
. $z$ : quantité de produit C fabriqué.

On demande de déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock de facteurs disponibles.

1. Écrire sous la forme d'un système linéaire les relations que doivent remplir $x$, $y$ et $z$.
2. Résoudre ce système en détaillant la méthode choisie.
3. Donner en conclusion la réponse au problème.

**Exercice 4** Une entreprise de mécanique fabrique trois types de pièces A, B et C dans trois ateliers d'usinage, montage et finitions. Les données techniques et commerciales relatives à cette fabrication sont résumées dans le tableau suivant :

| | Nombre d'heures-machines nécessaires à la fabrication d'un lot de 10 pièces | | | Prix de vente d'un |
|---|---|---|---|---|
| | usinage | montage | finitions | lot |
| Pièces A | 1 | 1,5 | 1,5 | 335 |
| Pièces B | 2 | 1,5 | 2,5 | 515 |
| Pièces C | 4 | 4,5 | 1,5 | 925 |
| Coût variable de l'heure (euros) | 60 | 80 | 50 | |
| Capacité de l'atelier (h/mois) | 2000 | 2400 | 2400 | |

1. Existe-t-il un programme de fabrication utilisant à plein les capacités de chaque atelier ?
2. Quel est le bénéfice réalisé :
   (a) lors de la fabrication et de la vente de 800 pièces A, 200 pièces B et 200 pièces C ?
   (b) pour le programmme trouvé au 1. ?

**Exercice 5** Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents (L), (C) et (V).
Pour un appareil de type (L), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 10h de travail.
Pour un appareil de type (C), on a besoin de 4kg d'acier, 1kg de peinture et 6h de travail.
Pour un appareil de type (V), on a besoin de 10kg d'acier, 2kg de peinture et 12h de travail.
On appelle respectivement $x$, $y$ et $z$ les quantités d'appareils (L), (C) et (V) fabriqués et $a$, $p$ et $t$ les quantités d'acier (en kg) de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. Déterminer à l'aide des données précédentes le système linéaire induisant $x$, $y$, $z$, $a$, $p$ et $t$.
2. En déduire les quantités d'appareils de chaque type (L), (C) et (V) fabriqués en un mois, sachant que 4200 kg d'acier, 800 kg de peinture et 5000 heures de travail ont été nécessaires.

**Exercice 6** - Modèle de Walras
*Imaginons un marché qui se limiterait à deux produits. La quantité offerte du premier, $Q_1$, est une fonction de son prix $P_1$, fonction qu'on suppose affine : $Q_1 = a + bP_1$. De même pour le second : $Q_2 = c + dP_2$.*
*La quantité demandée $D_1$ du premier produit dépend bien entendu de son prix $P_1$ (en général elle diminue quand $P_1$ augmente), mais aussi du prix du produit $P_2$, à cause des possibilités de substitution partielle. Nous supposons encore cette fonction affine : $D_1 = e + fP_1 + gP_2$, et de même pour le second produit : $D_2 = h + iP_1 + jP_2$.*
*La condition d'équilibre du marché est dans ces conditions*

$$\begin{aligned} Q_1 - D_1 &= 0 \\ Q_2 - D_2 &= 0, \end{aligned}$$

*qu'on peut écrire :*

$$\begin{aligned} (a + bP_1) - (e + fP_1 + gP_2) &= 0, \\ (c + dP_2) - (h + iP_1 + jP_2) &= 0. \end{aligned}$$

*La recherche du système du prix d'équilibre sur ce marché conduit donc à la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues $P_1$ et $P_2$, qu'on peut écrire :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}(b-f)P_1 - gP_2 &=& e-a\\ -iP_1+(d-j)P_2 &=& h-c\end{array}\right.$$

*ou, avec d'autres notations :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}a_{1,1}P_1 + a_{1,2}P_2 &=& d_1\\ a_{2,1}P_1+a_{2,2}P_2 &=& d_2.\end{array}\right.$$

Retour à l'exercice :
Soit un marché qui ne comporte qu'un modèle de téléviseur couleur HD avec une fonction d'offre

$$Q_1 = -30000 + 100P_1.$$

On ne trouve aussi qu'un modèle de téléviseur classique avec une fonction d'offre

$$Q_2 = -4000 + 50P_2.$$

La fonction de demande de téléviseurs HD est

$$D_1 = 4000 - 9P_1 + 34P_2$$

et la fonction de demande de téléviseurs classiques est

$$D_2 = 3560 + 27P_1 - 136P_2.$$

Déterminer les prix d'équilibre $P_1$ et $P_2$ sur ce marché en considérant le modèle de Walras.

**Exercice 7** La décomposition LU donne une méthode efficace de résolution d'un système d'équations linéaires $Ax = b$ pour différentes valeurs de $b$. Cela requiert beaucoup moins d'étapes de calcul arithmétique que l'inversion d'une matrice, et cela reste possible même si $A$ n'est pas carrée.
Utiliser la décomposition LU pour réécrire le système d'équations sous la forme $LUx = b$. Maintenant, le système peut être résolu en posant d'abord $Ux = z$, puis en résolvant le système d'équations $Lz = b$ par rapport à $z$, et enfin en résolvant $Ux = z$ par rapport à $x$. Puisque ces deux systèmes sont triangulaires, seule la substitution en remontant est nécessaire pour les résoudre.

1. Vérifier que les solutions obtenues de cette manière sont précisément les solutions de $Ax = b$.
2. Résoudre le systèmes suivants en utilisant cette technique :

$$\begin{pmatrix}2&4&0\\4&6&3\\-6&-10&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2&4&0\\4&6&3\\-6&-10&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\-4\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}5&3&1\\-5&-4&1\\-10&-9&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-10\\-24\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}5&3&1\\-5&-4&1\\-10&-9&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-14\end{pmatrix}.$$

**Exercice 8**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl}x+2y-3z &=& a\\ x+y-z &=& b\\ -x-y+2z &=& c\end{array}\right.$
(où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes données et $x$, $y$ et $z$ désignent des inconnues).
2. Soit $A = \begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.
Expliquer pourquoi $A$ est inversible et déduire de ce qui précède le calcul de $A^{-1}$.

**Exercice 9** On se donne les tableaux 1 et 2 suivants :

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| Ciment (tonnes) | 10 | 8 | 7 |
| Sable ($m^3$) | 5 | 3 | 3 |
| gravillons ($m^3$) | 5 | 2 | 2 |

Tableau 1

| | Ciment | Sable | Gravillons |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 60 | 15 | 18 |
| $F_2$ | 54 | 18 | 16 |

Tableau 2

Sur un chantier trois entreprises $E_1$, $E_2$ et $E_3$ interviennent ; leurs besoins journaliers sont décrits dans le tableau 1. Les matériaux utilisés sont vendus par deux fournisseurs $F_1$ et $F_2$ ; les prix unitaires en euros sont donnés dans le tableau 2.

On pose $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 & 15 & 18 \\ 54 & 18 & 16 \end{pmatrix}$ respectivement matrices des achats et matrice des prix.

1. Calculer le produit $PA$ et interpréter le résultat obtenu.
2. Calculer le déterminant de $A$, que peut-on en déduire pour $A$ ?
3. On pose $A' = \begin{pmatrix} 0 & -0,4 & 0,6 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $A' \times A$ en faisant figurer les calculs.
4. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $x$, $y$ et $z$ désignent respectivement le nombre de chantiers où chacune des entreprises $E_1$, $E_2$, $E_3$ est présente.
   (a) Calculer le produit $AX$ et interpréter le résultat obtenu.
   (b) Résoudre matriciellement l'équation $AX = \begin{pmatrix} 156 \\ 67 \\ 53 \end{pmatrix}$ et interpréter le résultat obtenu.

**Exercice 10** Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $M$ est-elle inversible ?
2. $I$ désigne la matrice unité carrée d'ordre 3.
   (a) Calculer $M^2$ et $M^3$. En déduire $M^n$ pour $n \geq 3$.
   (b) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$.
   (c) En déduire que $(I - M)$ est inversible et calculer $(I - M)^{-1}$.

**Exercice 11** $M$ étant une matrice carrée, on pose $M^1 = M$ et, pour tout entier naturel $n$ non nul, $M^{n+1} = M \times M^n$.

On considère la matrice $D$ définie par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer $D^2$, $D^3$ puis $D^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
2. Étant données les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, montrer que $P \times P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $P' \times P$. Que peut-on conclure ?
3. On considère la matrice $A$ définie par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \times D \times P' = A$.

4. Soit $n$ un entier naturel non nul. Sachant que
$$A^n = (P \times D \times P') \times (P \times D \times P') \times \ldots (P \times D \times P')$$
(produit de $n$ facteurs $(P \times D \times P')$), utiliser la question 2. pour montrer que $A^n = P \times D^n \times P'$. En déduire les termes de la matrice $A^n$ en fonction de $n$.

**Exercice 12** Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$.
On considère les applications linéaires $f$ et $g$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :
$$\begin{array}{lll} f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} & f(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3} & f(\vec{e_3}) = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}, \\ g(\vec{e_1}) = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} & g(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} & g(\vec{e_3}) = 3\vec{e_1} - \vec{e_2} - 2\vec{e_3}. \end{array}$$

1. Déterminer les matrices $A$ et $B$ de $f$ et $g$ respectivement, rapportées à la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer $A + B$, $3A$, $AB$ et $A^2$.
3. (a) Déterminer deux réels $x$ et $y$ tels que $A^2 = xA + yI$ où $I$ est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$, exprimer $A^3$ en fonction de $A$ et de $I$.
   (c) Résoudre le système
$$\begin{cases} x + 2y + 2z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 4 \end{cases}$$
4. On considère le vecteur $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, déterminer les vecteurs $f(\vec{u})$, $(f + g)(\vec{u})$, $(f_o g)(\vec{u})$, $(f_o f)(\vec{u})$, $f^{-1}(\vec{u})$.
5. Déterminer les vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ tels que $f(\vec{u}) = -\vec{u}$.
6. On considère les trois vecteurs
$$\vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}, \quad \vec{v_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}, \quad \vec{v_3} = \vec{e_1} - \vec{e_3}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelle est la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ?
   (c) Déterminer sa matrice inverse $P^{-1}$.
   (d) Déterminer $f(\vec{v_1})$, $f(\vec{v_2})$, $f(\vec{v_3})$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.
   (e) Quelle est la matrice $D$ de l'application linéaire $f$, rapportée à la base $\mathcal{B}'$ ?

**Exercice 13** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Soient les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 2, 0)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= y_1 \\ x_2 + 2x_3 &= y_2 \\ x_1 + x_2 &= y_3 \end{cases}$$
   On exprimera $x_1$, $x_2$ et $x_3$ en fonction de $y_1$, $y_2$ et $y_3$.
   (d) En déduire la matrice inverse $P^{-1}$.
2. On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}, \quad f(\vec{e_2}) = 2\vec{e_2}, \quad f(\vec{e_3}) = 3\vec{e_3}.$$
   (a) Déterminer la matrice $A$ de $f$ rapportée à la base $\mathcal{B}$, puis calculer $A^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

(b) Effectuer le calcul $P^{-1}AP = M$.

(c) En déduire $M^n$.

**Exercice 14**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système linéaire
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 11x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

2. On donne dans l'espace $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :
$$\vec{v}_1 = (2,-1,1), \quad \vec{v}_2 = (2,-1,2), \quad \vec{v}_3 = (1,-1,2), \quad \vec{v}_4 = (9,-6,11).$$
   (a) Démontrer que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ sont linéairement dépendants et donner une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   (b) Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\vec{v}_4$ dans cette base.

3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ ; on considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(\vec{e}_1) = \vec{v}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{v}_2, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{v}_3.$$
   (a) Donner la matrice de $f$ dans la base naturelle.

   (b) Soit $\vec{w} = (1,-1,1)$. Calculer $f(\vec{w})$.

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer sans calcul que $A$ est une matrice inversible.

   (b) Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 = 2A - I$.

   (c) Déterminer $A^{-1}$.

   (d) Résoudre matriciellement
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $M$ par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $I$ désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. (a) $M$ est-elle inversible ? (justifier la résponse).

   (b) Calculer $M^2$ puis $M^3$ ; en déduire une relation entre $M^3$ et $M$.

   (c) En utilisant la relation précédente, montrer que $M^5 = M$.

   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de $M - \lambda I$ et en déduire les valeurs de $\lambda$ qui annulent ce déterminant.

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array}\right.$$
   Quel lien y a-t-il avec la question 1. (d) ?

   (b) On pose $\vec{\epsilon}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{\epsilon}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{\epsilon}_3 = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.
   Calculer matriciellement les images par $f$ de $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{\epsilon}_2$ et $\vec{\epsilon}_3$.

3. (a) Montrer que $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) On appelle $P$ la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Former $P$ puis calculer $P^{-1}$.
   (c) On note $B$ la matrice de $f$ par rapport à la base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. Donner l'expression de $B$ dans cette base.
   (d) En utilisant ce qui précède, calculer $M^5$.

**Exercice 16** Dans tout ce qui suit, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. On pose $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{e}_2 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.
   (a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Expliquer pourquoi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice $P$ de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (d) Effectuer le produit matriciel de $P$ par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de $P^{-1}$.
2. Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $B$ par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$.
   (b) Donner l'expression de $B^n$ pour $n$ entier naturel non nul.
   (c) Calculer $\det(B)$.
3. On appelle $A$ la matrice de $f$ par rapport à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on rappelle l'égalité suivante, qu'on admettra, $B = P^{-1}AP$.
   (a) Déduire de l'égalité précédente l'expression de $A$.
   (b) Montrer que $A$ est une matrice inversible.
4. Soit le système linéaire suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & a \\ z & = & b \\ x + y + z & = & c \end{array} \right. \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des constantes réelles données.}$$

   (a) Résoudre ce système linéaire.
   (b) On appelle $M$ la matrice du système (1), déterminer $M^{-1}$.

**Exercice 17**

1. On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer $A + B$ et $A \times B$.
   (b) Calculer le déterminant de $A$ et en déduire celui de $C$.
   (c) Calculer la matrice inverse de $A$.

2. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base naturelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \quad f(\vec{k}) = -\vec{i} + 3\vec{k}.$$
   (a) Écrire la matrice de$f$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (b) Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Calculer l'image de $\vec{u}$ par $f$.
3. On pose $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{K} = -\vec{i} + 3\vec{k}$.
   (a) Démontrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.
   (c) Soit $\vec{v} = 4\vec{I} + 6\vec{J} + 8\vec{K}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (d) Soit $\vec{w} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

**Exercice 18**

1. On considère les matrices $A$ et $B$ suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer les produits $A^2$ et $A \times B$.
   (b) Exprimer la matrice $AB$ en fonction de la matrice $I$, identité d'ordre 3.
   (c) En déduire la matrice $A^{-1}$.
2. Soit le système
$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ x + 2y + z &= 7 \\ 2x + y + z &= 8 \end{cases}$$
   Résoudre ce système (on pourra utiliser 1. (c)).
3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base naturelle $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ et $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Soit le vecteur $\vec{t} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$.
   Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Une application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est définie par :
$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$
   (a) Déterminer la matrice de $A$ de $f$ rapportée à la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer les images de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par $f$.

**Exercice 19**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Que vaut la trace de $A$ ?
   (b) Calculer $A^2$ et exprimer $A^2$ en fonction de $A$.
   (c) A est-elle inversible ?

(d) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $x$, $y$ et $z$ sont des réels.

i. Calculer $AX$.

ii. Résoudre le système linéaire $AX = 6X$.

2. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base naturelle de l'espace $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $f$, de matrice $A$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   (a) Quelle est l'image de $\vec{k}$ par $f$ ?

   (b) Soient $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2 = -3\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   Déterminer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3)$.

3. (a) Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

   (c) Donner l'expression de la matrice $B$ de $f$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

# Chapitre 2

# Les déterminants

Dans l'analyse des modèles économiques, on utilise couramment les déterminants. Ils servent par exemple à déterminer si un système d'équations linéaires admet ou non une solution, à calculer une solution si elle existe et à décider de la qualité de l'approximation par linéarisation d'un système d'équations non-linéaires. Les déterminants sont également les outils-clés pour déterminer la nature d'une forme quadratique et, par conséquent, comme test du second ordre pour distinguer les maxima des minima dans les problèmes d'optimisation.

## 2.1 Définitions

Le déterminant est un nombre qui pour n'importe quelle matrice carrée donnée permet de tester la non-singularité de la matrice

- pour une matrice $(a)$ de format $1 \times 1$, ce nombre ne peut être que "$a$" lui-même puisque $a$ est inversible si et seulement si $a$ est différent de 0,
- pour une matrice $n \times n$, sa forme échelonnée en ligne (ou triangulaire) ne doit pas comporter de ligne composée uniquement de zéros

1. Pour une matrice $2 \times 2$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
2. Pour une matrice $3 \times 3$, $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ (cette expression sera également obtenue en développant le déterminant de $A$ à l'aide de la règle de Sarrus).
3. Pour une matrice d'ordre $n \geq 4$, l'astuce consiste à se ramener à des déterminants d'ordre inférieur jusqu'à obtenir des déterminants d'ordre 2 ou 3. On utilisera en général pour cela les développements des déterminants selon les lignes ou les colonnes.

*Illustration*. Afin d'échelonner les matrices, on utilise les mêmes techniques que lors de l'inversion d'un système.

1. pour une matrice $2 \times 2$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow a_{11}(L_2) - a_{21}(L_1) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

   Dans le cas où $a_{11}$ est non nul, $A$ sera inversible si et seulement si $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(A) \neq 0$.

2. pour une matrice $3 \times 3$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow a_{11}(L_2) - a_{21}(L_1) \\ (L_3) \leftarrow a_{11}(L_3) - a_{31}(L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \leftarrow (L_1) \\ (L_2) \leftarrow (L_2) \\ (L_3) \leftarrow (a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12})(L_2)-(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(L_3) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}) \end{bmatrix}$$

Dans le cas où $a_{11}$ est non nul, $A$ sera inversible si et seulement si $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \det(A) \neq 0$.

**Remarque 2.1.1** Dans les deux expressions précédentes, on note que tous les termes de la matrice $A$ interviennent.

Pour des matrices carrées de taille $n$ supérieures, on a le

**Théorème 2.1.1** - *Méthode des cofacteurs*
*Soit $A$ une matrice de format $n \times n$ où $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors quels que soient $i$ ou $j$, on a*

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{i,k}) \text{ (développement suivant les éléments de la ligne } i\text{)} \\ &= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{hj} \det(A_{h,j}) \text{ (développement suivant les éléments de la colonne } j\text{)} \end{aligned}$$

*où $A_{i,j}$ est la sous-matrice de format $(n-1) \times (n-1)$ obtenue par la suppression dans $A$ de la ligne $i$ et de la colonne $j$).*

$\det(A_{i,j})$ est appelé le *mineur* de $a_{ij}$, $X_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé le *cofacteur* de l'éléments $a_{ij}$.

**Remarque 2.1.2** La répartition des signes $(-1)^{i+j}$ devant les mineurs est alternée à partir du signe $+$ pour l'élément $a_{11}$. Par exemple, pour un déterminant d'ordre 5, on a la répartition suivante :

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

**Théorème 2.1.2** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. Alors*

$$\boxed{A \text{ est une matrice inversible si et seulement si } \det(A) \neq 0}.$$

**Exemple 2.1.1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ issue de l'exemple 1.1.1. On sait que $A$ est inversible puisqu'elle s'écrit comme un produit de matrices inversibles. Vérifions le à l'aide des déterminants, on développe la matrice selon une ligne ou une colonne (où il y généralement une majorité de zéros, afin de simplifier les calculs). Par exemple, si on développe

– selon la première ligne :
$$|A| = (-1)^{1+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (0) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times (0) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
– selon la première colonne :
$$|A| = (-1)^{1+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times (0) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (0) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Bien évidemment, quelle que soit la ligne ou la colonne utilisée, on retrouvera le même déterminant.

**Exemple 2.1.2** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Étudions l'inversibilité de $A$. On développe le déterminant de $A$ selon la troisième ligne (par exemple) :

$$|A| = (-1)^{3+3} \times (2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \times (4) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

On décide de développer le premier et le second déterminant selon la première colonne car ils offrent tous les deux le même avantage. Donc

$$|A| = 2 \times \left[(-1)^{1+1} \times (2) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (4) \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right] - 4 \times$$
$$\left[(-1)^{1+1} \times (2) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times (4) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right] = 2 \times (+12 - 8) - 4 \times (-44 + 44) = 8 \neq 0,$$

ce qui signifie que $A$ est inversible et donc que tout sytème linéaire utilisant cette matrice admet une solution unique.

**Remarque 2.1.3** Dans l'exemple précédent, on a pu remarquer que le second déterminant de taille $3 \times 3$ était nul, ce qui signifie que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ est non-inversible ou *singulière*. On peut également remarquer qu'une matrice inversible de taille $4 \times 4$ peut très bien impliquer des sous-matrices de taille inférieure pouvant être quant-à elles non-inversibles.

**Exemple 2.1.3** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Étudions l'inversibilité de $A$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times (1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$ donc $A$ est non-inversible.

**Remarque 2.1.4** Si $A$ est construite de telle façon qu'au moins une ligne ou au moins une colonne soit combinaison linéaire de lignes ou de colonnes respectivement alors $A$ est non-inversible ce qui est le cas ici. En effet, $(L_3) = 2 \times (L_1) + (L_2)$. Malgré tout, il est difficile de le voir à l'oeil nu.

**Remarque 2.1.5** Considérons un système linéaire basé sur $A$, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{rrrcll} 2x & +3y & +z & = & 1 & (L_1) \\ x & -y & & = & 1 & (L_2) \leftarrow 2(L_2) - (L_1) \\ 5x & +5y & +2z & = & 1 & (L_3) \leftarrow 2(L_3) - 5(L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcrl} 2x & +3y & +z & = & 1 & (L_1) \\ & -5y & -z & = & 1 & (L_2) \\ & -5y & -z & = & -3 & (L_3) \end{array} \right.$$

et on voit bien ainsi que $(L_2)$ et $(L_3)$ sont incompatibles.

## 2.2 Propriétés

**Proposition 2.2.1** *Pour toute matrice $A$ carrée d'ordre $n$,*

$$\boxed{\det(A) = \det(A^t)}.$$

*Donc toute propriété concernant les relations entre les lignes d'une matrice et la valeur de son déterminant est aussi vraie lorsqu'on applique la relation entre les colonnes et la valeur du déterminant.*

**Proposition 2.2.2** *Si la matrice $B$ est obtenue à partir d'une permutation de deux lignes (ou deux colonnes) de la matrice $A$ de format $n \times n$ alors*

$$\boxed{\det(B) = -\det(A)}$$

**Proposition 2.2.3** *Si deux lignes (ou colonnes) de $A$ sont égales*

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

**Proposition 2.2.4** *On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes).*

**Proposition 2.2.5** *Si la matrice $B$ est construite en multipliant chaque élément de la ligne (colonne) i de la matrice $A$ par un scalaire $\lambda$ alors*

$$\boxed{\det(B) = \lambda \det(A)}$$

**Proposition 2.2.6** *Si la matrice $B$ est construite en multipliant chaque élément de la matrice $A$ par un scalaire $\lambda$ alors*

$$\boxed{\det(B) = \lambda^n \det(A)}$$

**Proposition 2.2.7** *Si la matrice $A$ contient une ligne (colonne) composée uniquement de zéros alors*

$$\boxed{\det(A) = 0}$$

**Proposition 2.2.8** *Le déterminant de la matrice identité $I$ d'ordre $n$ est égal à* 1.

**Proposition 2.2.9** *Le déterminant d'une matrice diagonale $A$ est égal au produit de ses éléments diagonaux principaux.*

**Proposition 2.2.10** *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux principaux.*

**Théorème 2.2.1** *Soient $A$ et $B$ deux matrices quelconques de format $n \times n$ alors*

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

**Théorème 2.2.2** *Si $A$ est inversible alors*

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

## 2.3 Utilisations du déterminant

Puisque le déterminant nous apprend si $A^{-1}$ existe ou pas et si le système $Ax = b$ admet une solution unique ou non, il n'est pas surprenant qu'on puisse se servir du déterminant pour obtenir une formule pour $A^{-1}$ et une formule pour la solution du système. On a besoin pour cela de la *matrice adjointe* de $A$ ou *co-matrice* de $A$.

**Définition 2.3.1** *Considérons une matrice carrée $A$ d'ordre $n$, la matrice des cofacteurs $X_{ij}$ des éléments $a_{ij}$ de $A$ notée $Adj(A)$ (ou $Com(A)$) est appelée matrice adjointe de $A$ (ou comatrice de $A$).*

$$Adj(A) = Com(A) = [X_{ij}] = [(-1)^{i+j}\det(A_{ij})].$$

**Théorème 2.3.1** *Soit $A$ une matrice carrée non-singulière. Alors,*

$$A \times (Adj(A))^t = (Adj(A))^t \times A = \det(A) \times I_n \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité d'ordre } n.$$

**Théorème 2.3.2** *Soit $A$ une matrice carrée non-singulière. Alors,*

1. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(Adj(A))^t$, *et*
2. *(règle de Cramer) la solution unique $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système $Ax = b$ d'ordre $n$ est*
$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \text{ pour } i = 1, \ldots, n$$
*où $B_i$ est la matrice $A$ dans laquelle le membre de droite $b$ (ou second membre) remplace la i-ième colonne de $A$.*

<u>*Illustration*</u> pour les systèmes d'ordre 3 : on considère le système :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

La règle de Cramer énonce que $(x_1, x_2, x_3)$ est solution du précédent système avec

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

**Exemple 2.3.1** Reprenons le système de l'exemple 1.1.1 soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 4 \\ 2x + z &= 5 \\ x &= 6 \end{cases}$$

- Utilisons le théorème 2.3.2 et 1. pour retrouver l'inverse de $P$. On a $\det(P) = 1$ et $\text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}(\text{Adj}(P))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. On retrouve bien le résultat.
- Utilisons le théorème 2.3.2 et 2. pour retrouver la solution du système.
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = 6, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = 4 \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{|P|} = -7.$$
On retrouve bien le résultat.

## 2.4 Applications économiques

*Cas de l'offre et de la demande*

Prenons l'exemple de l'offre et de la demande dans une économie à deux biens. Notons $Q_1^s$ et $Q_2^s$ les quantités de chaque bien offertes par les firmes sur le marché et $Q_1^d$ et $Q_2^d$ les demandes correspondantes exprimées par les consommateurs. Notons $P_1$ et $P_2$ les prix des biens et $Y$ le revenu des consommateurs. Nous allons étudier dans ce paragraphe des outils de base de l'économie appliquée : les fonctions d'offre et de demande à élasticité constante.

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q_1^d & = & K_1 P_1^{a_{11}} P_2^{a_{12}} Y^{b_1}, \\ Q_2^d & = & K_2 P_1^{a_{21}} P_2^{a_{22}} Y^{b_2}, \\ Q_1^s & = & M_1 P_1^{n_1}, \\ Q_2^s & = & M_2 P_2^{n_2}. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Dans ces fonctions, les élasticités intéressantes sont constantes et sont données par les exposants $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, $b_1$, $b_2$, $n_1$ et $n_2$. Par exemple, pour le bien 1, nous avons les élasticités suivantes :

- $a_{11}$ = élasticité-prix de la demande,
- $a_{12}$ = élasticité-prix croisée de la demande (avec le prix du bien 2),
- $b_1$ = élasticité revenu de la demande,
- $n_1$ = élasticité-prix de l'offre.

Un second avantage de ces fonctions est qu'on peut les rendre linéaires en prenant le logarithme népérien dans les deux membres des équations (2.1) et en posant :

$$q_i^s \equiv \ln Q_i^s,\ q_i^d \equiv \ln Q_i^d,\ p_i \equiv \ln P_i \text{ et } y \equiv \ln Y.$$

Les élasticités sont maintenant des coefficients du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} q_1^d & = & k_1 + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1 y, \\ q_2^d & = & k_2 + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + b_2 y, \\ q_1^s & = & m_1 + n_1 p_1, \\ q_2^s & = & m_2 + n_2 p_2. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

où les $a_{ij}$, $b_i$ et $n_i$ sont les élasticités, et les $k_i$ et $m_i$ sont les logarithmes des $K_i$et $M_i$.

L'égalisation de l'offre et de la demande conduit aux prix d'équilibre : $Q_i^s = Q_i^d$, et donc $q_i^s = q_i^d$ pour $i = 1, 2$. Si $Q_1^s \geq Q_1^d$, la demande des consommateurs engendrera un prix $P_1$ inférieur ; si $Q_1^s \leq Q_1^d$, la demande des consommateurs engendrera un prix $P_1$ supérieur. L'égalité $q_i^s = q_i^d$ aboutit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -(-a_{11} + n_1)p_1 + a_{12}p_2 = m_1 - k_1 - b_1 y \\ a_{21}p_1 - (-a_{22} + n_2)p_2 = m_2 - k_2 - b_2 y \end{array}\right. \tag{2.3}$$

où les revenus sont considérés comme exogènes (une variable exogène est par définition explicative, elle est tirée d'observations et souvent d'un consensus qui permet de l'utiliser dans un modèle). La règle de Cramer permet de résoudre explicitement le système (2.3) pour les deux variables endogènes $p_1$ et $p_2$ (endogène signifie généré à l'intérieur du système) :

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 - k_1 - b_1 y & a_{12} \\ m_2 - k_2 - b_2 y & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & a_{12} \\ a_{21} & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}} = \frac{(-a_{22} + n_2)(-m_1 + k_1 + b_1 y) + a_{12}(-m_2 + k_2 + b_2 y)}{(-a_{11} + n_1)(-a_{22} + n_2) - a_{12}a_{21}}, \tag{2.4}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & m_1 - k_1 - b_1 y \\ a_{21} & m_2 - k_2 - b_2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(-a_{11} + n_1) & a_{12} \\ a_{21} & -(-a_{22} + n_2) \end{vmatrix}} = \frac{(-a_{11} + n_1)(-m_2 + k_2 + b_2 y) + a_{21}(-m_1 + k_1 + b_1 y)}{(-a_{11} + n_1)(-a_{22} + n_2) - a_{12}a_{21}}. \tag{2.5}$$

Ces expressions sont compliquées, les obtenir par la méthode du pivot de Gauss appliquée au système (2.3) aurait été fastidieux avec beaucoup de risque d'erreur.
Les équations (2.4) et (2.5) permettent d'observer comment les prix d'équilibre varient en fonction des paramètres du modèle, c'est-à-dire, ici, en fonction des élasticités.

Faisons l'hypothèse que les deux biens sont des *biens normaux*, c'est-à-dire que leur demande augmente lorsque le revenu des consommateurs augmente et, en conséquence, qu'elle diminue lorsque les prix augmentent. Appliquée à notre modèle, cette hypothèse induit que $b_1$ et $b_2$ sont positifs et que $a_{11}$ et $a_{22}$ sont négatifs. Supposons maintenant qu'une variation du prix du bien 1 ait un effet plus important sur la demande du bien 1 que sur celle du bien 2, et que l'on ait la même relation pour le bien 2. Mathématiquement, cela se traduit par $|a_{11}| > |a_{12}|$ et $|a_{21}| > |a_{22}|$, et implique que les dénominateurs de (2.4) et (2.5) sont positifs. On peut remarquer dans les équations (2.4) et (2.5) que, pour le bien i, si on augmente l'élasticité-prix de la demande $a_{ii}$, l'élasticité-prix de l'offre $n_i$ ou l'élasticité-revenu $b_i$, alors le prix d'équilibre $p_i$ diminuera. Les effets de ces paramètres sur $p_j$ dépendent du signe de l'élasticité croisée $a_{ji}$. Si $a_{ji}$ est positif, cela signifie qu'une augmentation de $p_i$ augmente la demande $q_j^d$ en bien $j$. Les biens $i$ et $j$ sont appelés *biens substituables* ou *biens substituts*. À l'observation d'une augmentation du prix du bien $i$, le consommateur répondra en substituant le bien j au bien i. Dans ce cas, une augmentation de $a_{ii}$ ou $n_i$, ou une diminution de $b_i$ impliquent une diminution du prix d'équilibre $p_j$. Si $a_{ji}$ est négatif, les biens i et j sont appelés *biens complémentaires*, ou encore on dit que le bien j est complémentaire au bien i. Dans ce cas, une augmentation de $a_{ii}$ ou $n_i$, ou une diminution de $b_i$ entraînent une augmentation du prix d'équilibre $p_j$.

Cette approche permet également d'apprécier les effets, sur les prix d'équilibre, de la mise en place de taxes. Supposons que le gouvernement impose une taxe proportionnelle $t$ sur la consommation du bien 1. Le prix pour les consommateurs est donc augmenté et s'établit à $(1+t)P_1$ au lieu de $P_1$. Cela modifie les fonctions de demande dans le système (2.1) mais pas les fonctions d'offre. Les logarithmes des fonctions de demande dans (2.2) deviennent

$$\begin{aligned} q_1^d &= k_1 + a_{11}\ln(1+t) + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1 y, \\ q_2^d &= k_2 + a_{21}\ln(1+t) + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + b_2 y \end{aligned}$$

et les équations d'équilibre s'écrivent alors

$$\begin{cases} -(-a_{11}+n_1)p_1 + a_{12}p_2 = m_1 - k_1 - a_{11}\ln(1+t) - b_1 y, \\ a_{21}p_1 - (-a_{22}+n_2)p_2 = m_2 - k_2 - a_{21}\ln(1+t) - b_2 y. \end{cases}$$

La solution de ce système, obtenue par la règle de Cramer est

$$p_1 = \frac{(-a_{22}+n_2)(-m_1+k_1+a_{11}\ln(1+t)+b_1y) + a_{12}(-m_2+k_2+a_{21}\ln(1+t)+b_2y)}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}, \tag{2.6}$$

$$p_2 = \frac{(-a_{11}+n_1)(-m_2+k_2+a_{21}\ln(1+t)+b_2y) + a_{21}(-m_1+k_1+a_{11}\ln(1+t)+b_1y)}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}. \tag{2.7}$$

Le coefficient de $\ln(1+t)$ dans $p_1$ est

$$-\frac{-a_{11}(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}.$$

Il est généralement négatif, compris entre 0 et $-1$. Ainsi, la mise en place d'une taxe sur le bien 1 devrait diminuer le prix d'équilibre (hors taxe) du bien 1. Le coefficient de $\ln(1+t)$ dans $p_2$ est

$$\frac{n_1 a_{21}}{(-a_{11}+n_1)(-a_{22}+n_2) - a_{12}a_{21}}.$$

Ainsi, la taxe sur le bien 1 augmentera le prix d'équilibre du bien 2 si celui-ci est un bien substituable au bien 1 ($a_{21} \geq 0$) ou au contraire le diminuera si c'est un bien complémentaire du bien 1 ($a_{21} \leq 0$).

## 2.5 Exercices

**Exercice 20** Un modèle de chaîne haute fidélité en vente promotionnelle est constituée de 3 éléments :
- un amplificateur-récepteur de radio de prix $x$,
- une platine CD de prix $y$,
- une paire d'enceintes acoustiques de prix $z$.

(Les prix sont donnés en euros).
Si une remise de 10% est faite sur le prix $x$ et une remise de 10% sur le prix $y$, la chaîne complète coûterait 435, 6 euros.
Si les remises sur les prix $x$ et $z$ étaient respectivement de 20% et de 10%, la chaîne complète coûterait 422, 4 euros.
Finalement, si les remises sur les prix $y$ et $z$ étaient respectivement de 10% et de 20%, la chaîne complète coûterait 421, 3 euros.

1. Former le système de trois équations à trois inconnues $x$, $y$ et $z$ qui résulte des données précédentes.
2. Calculer $x$, $y$ et $z$.

**Exercice 21** Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de trois méthodes différentes.

**Exercice 22** Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer la matrice inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 23** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 5 \\ 4 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

et déterminer les valeurs de $\lambda$ qui annulent ces déterminants.

**Exercice 24** Soit le système $(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 9 \\ x + 2y - z & = & -6 \end{array} \right.$ .

1. Écrire la matrice $A$ du système
2. Montrer que $A$ est inversible. En déduire que $(S)$ admet une solution unique
3. Calculer $A^{-1}$.
4. Résoudre $(S)$.

**Exercice 25**

1. Calculer les déterminants suivants :
   (a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
   (b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(d) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

2. Développer $D_5$ suivant la $2^{\text{ème}}$ colonne : $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

**Exercice 26** Résoudre les systèmes suivants (on pourra utiliser les formules de Cramer) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z & = & 6 \\ 3x+y-5z & = & -3 \\ 8x+3y+6z & = & -5 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+z & = & 0 \\ x+2y+4z & = & 0 \\ 5x-4y+6z & = & 0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y-8z & = & 0 \\ x-4y+3z & = & 0 \\ 2x-y+z & = & 0 \end{array}\right..$$

# Chapitre 3

# Valeurs propres et vecteurs propres

## 3.1 Définitions et exemples

**Définition 3.1.1** *Soit $A$ une matrice carrée. Une valeur propre de $A$ est un nombre $\lambda$ qui, quand il est sosutrait à chaque élément de la diagonale principale de $A$, transforme $A$ en une matrice singulière.*

**Remarque 3.1.1** Soustraire un scalaire $\lambda$ à chaque élément de la diagonale principale de $A$ est identique à soustraire $\lambda$ fois la matrice identité à $A$. Par conséquent $\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I$ est une matrice singulière.

**Exemple 3.1.1** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. En soustrayant 2 à chaque élément de la diagonale principale, la matrice $A$ devient une matrice singulière. Par conséquent, 2 est une valeur propre de $A$.

**Exemple 3.1.2** Soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. En soustrayant soit 2 soit 3 à la matrice diagonale principale, on aboutit aux matrices singulières $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ respectivement. Donc 2 et 3 sont des valeurs propres de $A$.

Cet exemple illustre un principe général concernant les valeurs propres d'une matrice diagonale.

**Théorème 3.1.1** *Les éléments diagonaux principaux d'une matrice diagonale $D$ sont les valeurs propres de $D$.*

Le théorème suivant est une autre conséquence directe de la définition d'une valeur propre.

**Théorème 3.1.2** *Une matrice carrée est singulière si et seulement si 0 est une valeur propre de $A$.*

**Exemple 3.1.3** Trouver, en étudiant simplement la structure de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres.
*Réponse* : "0" car $B$ est singulière ($(L_1) = -(L_2)$) et "2" car $B - 2I$ est singulière.

**Exemple 3.1.4** Une matrice $M$ dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, telle que $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de Markov et joue un rôle essentiel dans les systèmes économiques dynamiques. On remarque que $M - 1.I$ est singulière donc 1 est une valeur propre de $M$.

Pour la plupart des matrices il n'est pas possible de trouver par intuition les valeurs propres, une démarche plus générale est alors nécessaire.
On sait que $\lambda$ est une valeur propre de $A$, c'est-à-dire que $A - \lambda I$ est une matrice singulière, si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.1}$$

Pour une matrice carrée d'ordre $n$, le membre de gauche de l'équation (3.1) est un polynôme de degré $n$, fonction de la variable $\lambda$, appelé *polynôme caractéristique* de $A$. Donc $\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $\lambda$ annule le polynôme caractéristique de $A$.

**Exemple 3.1.5** Soit une matrice carrée d'ordre 2 quelconque, le polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

est de degré 2 et admet au plus deux racines.

On rappelle maintenant qu'une matrice carrée $B$ est non-singulière si l'unique solution de $Bx = 0$ est $x = 0$. Inversement, $B$ est singulière si et seulement si le système $Bx = 0$ admet une solution non nulle.

On a donc le théorème suivant :

**Théorème 3.1.3** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ et soit $\lambda$ un scalaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *En soustrayant $\lambda$ à chaque élément de la diagonale principale de $A$, la matrice transformée de $A$ devient une matrice singulière,*
2. *$A - \lambda I$ est une matrice singulière,*
3. *$\det(A - \lambda I) = 0$,*
4. *$(A - \lambda I)x = 0$ pour un vecteur non nul*
5. *$Ax = \lambda$ pour un vecteur non nul $x$.*

**Définition 3.1.2** *Quand $\lambda$ est une valeur propre de $A$, un vecteur non nul $x$ tel que $(A - \lambda I)x = 0$ est appelé un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

Faire l'analyse spectrale revient à connaître les valeurs propres d'une matrice et les vecteurs propres associés.

**Exemple 3.1.6** Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$.
Les valeurs propres de $A$, c'est-à-dire $-3$ et $2$, sont les racines du polynôme caractéristique. Pour déterminer les vecteurs propres associés, on résout $(A - \lambda I)x = 0$ pour chaque valeur propre de $A$ :

- $(A - (-3)I)x = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$.
  Il existe pour ce système une infinité de solutions, on peut prendre par exemple $x_1 = 3$ et $x_2 = -2$ et en conclure qu'un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On pouvait considérer d'autres vecteurs tels que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ correspondant à d'autres choix de $x_1$ et $x_2$ mais on remarquera que tous ces vecteurs sont colinéaires. En fait, $(A - (-3)I)x = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$ ou $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$. Dans le premier cas, $x = (x_1, x_2) = (x_1, -\frac{2}{3}x_1) = x_1(1, -\frac{2}{3})$ et dans le second, $x = (x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}x_2, x_2) = x_2(-\frac{3}{2}, 1)$.

  L'ensemble (espace vectoriel de dimension 1 dans le cas de la valeur propre précédente) de toutes les solutions de l'équation linéaire $(A - \lambda I)x$ (incluant $x = 0$) est appelé l'*espace propre* de $A$ pour la valeur $\lambda$.

- $(A-2I)x = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & 0 \end{cases}$.

  La solution la plus simple est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mais tout multiple de ce vecteur est également un vecteur propre associé à 2. En effet, $(A-2I)x = 0 \Leftrightarrow x = (x_1, x_1) = x_1(1,1)$ ou $x = (x_2, x_2) = x_2(1,1)$. Dans les deux cas, l'espace propre pour la valeur propre 2 est engendré par le vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$.

**Exemple 3.1.7** Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
$\det(B - \lambda I) = (5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) \Rightarrow Sp(B) = \{-1, 4, 5\}$. On peut en déduire ensuite que $v_1 = (0,1,0)$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 5$, $v_2 = (2,0,3)$ un vecteur propre associé à $\lambda = 4$ et $v_3 = (1,0,-1)$ un vecteur propre associé à $\lambda = -1$.

**Remarque 3.1.2** Dans certains problèmes, on aura besoin d'utiliser la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système linéaire $(A - \lambda I)x = 0$ en cherchant un vecteur propre $x$.

## 3.2 Résolution des systèmes d'équations de récurrence linéaires homogènes

On s'intéresse dans cette partie à des systèmes d'équations de récurrence d'ordre 1, homogènes et stationnaires, qui s'écrivent sous la forme $X_n = AX_{n-1}$ où $X_{n-1}$ représente le vecteur dans $\mathbb{R}^k$ des états à la date $n-1$, où $X_n$ représente le vecteur dans $\mathbb{R}^k$ des états atteints à la date $n$ et où $A$ est la matrice de transformation entre la date $n-1$ et la date $n$.
Comme le vecteur d'états $X_n$ ne dépend que du seul vecteur $X_{n-1}$ des états à la date immédiatement antérieure, les équations de récurrence sont d'ordre 1.
Comme la relation est une transformation linéaire et non affine, ce sont des équations homogènes, qui sont toujours vérifiées pour le vecteur d'états nul.
Enfin, comme la matrice $A$ est indépendante de la date à laquelle on se place, on a des équations stationnaires.

### 3.2.1 Exemples

#### (a) Equations en dimension 1

Un exemple typique d'une telle équation est

$$y_{n+1} = ay_n \tag{3.2}$$

pour une constante $a$ quelconque. Cette équation de récurrence traduit le fait que le niveau de $y$, quelle que soit la période, sera proportionnel à son niveau de la période précédente, avec $a$ comme constante de proportionnalité (exemple : intérêts annuels composés). Une solution de (3.2) est l'expression $y_n$ en fonction de la valeur initiale $y_0$, de $a$ et de $n$ soit

$$y_n = a^n y_0.$$

**Exemple 3.2.1** Soit $y_n$ le montant d'argent placé sur un compte d'épargne dont le capital n'a pas été touché et dont les intérêts sont composés annuellement à l'année $n$. L'année suivante, il y aura

$$y_n + \frac{t}{100} y_n = \left(1 + \frac{t}{100}\right) y_n \text{ où } t$$

est le taux d'intérêt annuel. Donc si $y_0 = 1000$, $t = 5$ et $n = 4$, le montant d'argent à la quatrième année se chiffre par $y_4 = (1,05)^4 \times 1000 = 1215,5$ euros.

### 3.2.2 Systèmes en dimension 2

Considérons maintenant un système de deux équations de récurrence linéaires homogènes tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & ax_n + by_n \\ y_{n+1} & = & cx_n + dy_n \end{array} \right. \tag{3.3}$$

où la valeur de chaque variable dépend linéairement du niveau des deux variables à la période précédente.

**Exemple 3.2.2** Modèle d'emploi dynamique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & qx_n + py_n \\ y_{n+1} & = & (1-q)x_n + (1-p)y_n \end{array} \right.$$

où $x_n$ représente le nombre de personnes actives et employées durant la période $n$ et $y_n$ le nombre de personnes actives mais sans emploi à la période $n$, $p$ est la probabilité qu'une personne sans emploi trouve un travail à la période suivante et $q$ la probabilité qu'une personne active reste employée d'une période à l'autre.
Ainsi, sous forme matricielle, le système d'equations de récurrence (3.3) devient :

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = Az_n. \tag{3.4}$$

La solution de (3.4) est donnée par

$$z_n = A^n z_0$$

en supposant que $z_0$ soit connu.

### 3.2.3 Le modèle de population de Leslie

On pourra se référer au "TP Démographie des populations avec structure d'âge : Matrices de Leslie" de Thomas DELATTRE et Cédric WOLF disponible sur $http://ecobio.univ-rennes1.fr/Fiches_perso/CWolf/$ afin de se familiariser avec ce concept.

## 3.3 Systèmes théoriques en dimension 2 et dimension $k$

On est ramené, pour résoudre (3.4), à calculer $A^n$, ce qui est très souvent long et fastidieux.
Supposons que $A$ admette deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$, de vecteurs propres $v_1$ et $v_2$ respectifs alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Av_1 & = & \lambda_1 v_1 \\ Av_2 & = & \lambda_2 v_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow [Av_1 \ Av_2] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2]$$

$$\Leftrightarrow A[v_1 \ v_2] = [v_1 \ v_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

En posant $[v_1 \ v_2] = P$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, la relation (3.5) peut s'écrire

$$AP = PD$$

ou encore

$$A = PDP^{-1}$$

si $P$ est inversible. Ainsi, le calcul de $A^n$ devient très simple puisque

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

comme cela a été vu dans l'introduction.

Cette démarche s'applique aussi pour des systèmes de dimension $k$.

**Théorème 3.3.1** *Soit $A$ une matrice de format $k \times k$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $A$ et $v_1, v_2, \dots, v_k$ les vecteurs propres associés. Soit $P = [v_1 \ v_2 \dots v_k]$ la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs propres alors, si $P$ est inversible,*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} = D.$$

*Réciproquement, si $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale $D$, alors les colonnes de $P$ sont des vecteurs propres de $A$ et les éléments de la diagonale principale de $D$ sont les valeurs propres de $A$.*

**Remarque 3.3.1** Une hypothèse fondamentale du théorème précédent est que la matrice $P$, dont les colonnes sont les vecteurs propres de $A$, soit une matrice inversible. Cette hypothèse stipule donc que la matrice $A$ de format $k \times k$ possède $k$ vecteurs propres linéairement indépendants.

**Théorème 3.3.2** *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ $k$ valeurs propres disctinctes de la matrice $A$ de format $k \times k$. Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs propres associés. Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont alors linéairement indépendants.*

**Corollaire 3.3.1** *Si la matrice $A$ de format $k \times k$ possède $k$ valeurs propres distinctes alors $P = [v_1 \dots v_k]$ est inversible.*

**Théorème 3.3.3** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $k$ avec $k$ valeurs propres réeles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ et soient $v_1, v_2, \dots, v_k$ des vecteurs propres associés. La solution générale du système d'équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ est*

$$z_n = \underbrace{(Z_0)_1}_{c_1} \lambda_1^n v_1 + \underbrace{(Z_0)_2}_{c_2} \lambda_2^n v_2 + \dots + \underbrace{(Z_0)_k}_{c_k} \lambda_k^n v_k$$

*où $Z_0 = ((Z_0)_1 \dots (Z_0)_k)^t = P^{-1}z_0$.*

On peut utiliser le théorème 3.3.1 pour retrouver ce résultat : $z_{n+1} = Az_n \Leftrightarrow z_n = A^n z_0 = PD^nP^{-1}z_0$

$$\Leftrightarrow z_n = [v_1 \dots v_k] \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} Z_0 = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + \dots + c_k\lambda_k^n v_k.$$

## 3.4 Propriétés des valeurs propres

On sait que les valeurs propres de la matrice $A$ de format $k \times k$ sont les valeurs qui annulent le polynôme caractéristique de $A$ soit

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Il existe donc trois possibilités pour les racines de $p(\lambda)$ :
- $p(\lambda)$ a $k$ racines réelles distinctes,
- $p(\lambda)$ a quelques racines multiples,
- $p(\lambda)$ a quelques racines complexes,

cas non mutuellement exclusifs pour $k \geq 4$.

**Exemple 3.4.1**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \Rightarrow Sp(A) = \{-3, -2\}$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p_B(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \Rightarrow Sp(B) = \{1, 2, 3\}$.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_C(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \Rightarrow Sp(C) = \{3\}$, 3 étant de multiplicité 2.
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_D(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow Sp(D) = \{1+i, 1-i\}$.
5. Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_E(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) \Rightarrow Sp(E) = \{1, 2+i, 2-i\}$.

**Définition 3.4.1** *La trace d'une matrice carrée $A$, notée $tr(A)$ est la somme de ses éléments diagonaux principaux.*

**Théorème 3.4.1** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $k$ avec les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Alors,*

*1.* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = tr(A)$,

*2.* $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_k = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i = \det(A)$

**Exemple 3.4.2** Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 3 est une valeur propre de $B$. Soit $v = (a, b, c, d)$ un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ alors

$$(B - 3I)v = \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\lambda = 3$. Donc cette valeur propre de $B$ est d'ordre de multiplicité au moins égal à 3. Comme de plus, $tr(B) = 16 = 3+3+3+x$, on en déduit que $x = 7$ est également valeur propre de $B$.

## 3.5 Valeurs propres multiples

On porte notre attention dans ce paragraphe sur un point qui peut remettre en cause le processus de diagonalisation : les valeurs propres multiples.

### 3.5.1 Matrices de format $2 \times 2$ non diagonalisables

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ces matrices admettent toutes les deux une valeur propre double $\lambda = 3$.

- Un vecteur propre de $A$ est une solution $v$ de l'équation
$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Un vecteur $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est une solution de ce système si et seulement si c'est un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Pour $B$, $(B - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Donc tout couple de vecteurs linéairement indépendants convient. Ainsi, grâce au théorème 3.3.1, la matrice $B$ est diagonalisable et en fait, on remarque qu'elle est déja diagonale.

Par ailleurs, il n'y a pas de matrice $P$ qui diagonalise $A$ parce que, toujours d'après le théorème 3.3.1, une telle matrice $P$ devrait avoir pour colonnes des vecteurs propres indépendants de $A$ mais $A$ n'a qu'un seul vecteur propre.

Une matrice $A$ qui a une valeur propre d'ordre de multiplicité $m > 1$ mais qui n'a pas $m$ vecteurs propres linéairement indépendants associés à cette valeur propre est appelée une *matrice non diagonalisable*. On a le

**Théorème 3.5.1** *Soit $A$ une matrice de format $2 \times 2$ avec deux valeurs propres identiques. Alors, $A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est déja une matrice diagonale.*

Que peut-on faire avec une matrice non diagonalisable ? On peut tenter d'arriver à une matrice presque diagonale (*décomposition de Jordan*).

**Exemple 3.5.1** Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ étudiée précédemment, admettant 3 comme valeur propre. Cette matrice admet un seul vecteur propre indépendant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche alors un vecteur $v_2$ appelé *vecteur propre généralisé pour $A$ associé à $\lambda = 3$*, solution de

$$(A - 3I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on prend $P = [v_1\ v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on peut vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Théorème 3.5.2** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre 2 avec des valeurs propres identiques $\lambda = \lambda^\star$. Alors,*

1. *soit $A$ a deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\lambda^\star$, auquel cas $A$ est la matrice $\lambda^\star I$,*
2. *soit $A$ a seulement un vecteur propre indépendant $v_1$. Dans ce cas, il existe un vecteur propre généralisé $v_2$ tel que $(A - \lambda^\star I)v_2 = v_1$. Si $P = [v_1 v_2]$ alors*
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 \\ 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}.$$

### 3.5.2 Cas d'une matrice $3 \times 3$ non diagonalisable

**Exemple 3.5.2** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique de $A$ est $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(2 - \lambda)$. Les valeurs propres de $A$ sont 2 et 3 (de multiplicité 2).

- Pour la valeur propre simple $\lambda = 2$, l'espace des solutions de
$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est un espace de dimension 1 engendré par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Pour la valeur propre double $\lambda = 3$, l'espace des solutions de
$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est un espace de dimension 1 engendré par $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il y a donc seulement un vecteur propre indépendant associé à la valeur propre de multiplicité 2. On a besoin d'un vecteur $v_3$ indépendant de $v_1$ et $v_2$ pour former la matrice de passage $P = [v_1 v_2 v_3]$. On cherche $v_3$, vecteur propre généralisé associé à $A$ pour la valeur propre $\lambda = 3$ vérifiant donc $(A - 3I)v_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut alors prendre $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Les calculs avec les vecteurs propres généralisés peuvent être un peu plus compliqués pour des matrices de format $3 \times 3$ car on peut avoir une valeur propre $\lambda^\star$ d'ordre de multiplicité 3 avec seulement un vecteur propre indépendant $v_1$. Dans ce cas, on calcule $v_2$ et $v_3$ tels que

$$(A - \lambda^\star I)v_2 = v_1 \text{ et } (A - \lambda^\star I)v_3 = v_2.$$

Si $P = [v_1 v_2 v_3]$ alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^\star & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}$.

**Exemple 3.5.3** On considère $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice admet $\lambda = 2$ comme valeur propre d'ordre de mulitplicité 3 mais seulement un vecteur propre indépendant $v_1$. On définit $v_2$ et $v_3$ par

$$\begin{cases} (A - 2I)v_2 = v_1 \\ (A - 2I)v_3 = v_2 \end{cases}.$$

Ainsi, avec $P = [v_1 v_2 v_3]$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

### 3.5.3 Résolution d'équations de récurrence avec des matrices non diagonalisables

On se pose le problème de la résolution du système des équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ quand $A$ est une matrice de taille $2 \times 2$ non diagonalisable. Choisissons $P$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda^\star & 1 \\ 0 & \lambda^\star \end{pmatrix}$. Le changement de variables $z = PZ$ fait passer du système $z_{n+1} = Az_n$ au système $Z_{n+1} = (P^{-1}AP)Z_n$.

$$Z_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = \lambda X_n + Y_n \qquad (3.6a) \\ \quad Y_{n+1} = \lambda Y_n \qquad (3.6b) \end{array} \right.$$

On peut résoudre (3.6b) pour $Y_n$ : $Y_n = c_1\lambda^n$ et substituer cette solution dans la première équation (3.6a) : $X_{n+1} = \lambda X_n + c_1\lambda^n$. On itère ensuite, à partir de $n = 0$, pour trouver sa solution générale :

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & c_0 \\ X_1 & = & \lambda X_0 + c_1\lambda^0 = \lambda c_0 + c_1 \\ X_2 & = & \lambda X_1 + c_1\lambda^1 = \lambda(\lambda c_0 + c_1) + c_1\lambda = \lambda^2 c_0 + 2c_1\lambda \\ X_3 & = & \lambda^3 c_0 + 3c_1\lambda^2 \\ X_4 & = & \lambda^4 c_0 + 3c_1\lambda^2 \\ & \vdots & \\ X_n & = & \lambda^n c_0 + nc_1\lambda^{n-1} \end{array}$$

Si on remplace $X_n$ dans l'équation précédente, on a

$$X_{n+1} = \lambda(c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1}) + c_1\lambda^n = c_0\lambda^{n+1} + (n+1)c_1\lambda^n = \lambda X_n + Y_n.$$

Par conséquent, $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0\lambda^n + nc_1\lambda^{n-1} \\ c_1\lambda^n \end{pmatrix}$. On utilise ensuite le changement de coordonnées $z = PZ$ pour écrire la solution générale du système initial $z_{n+1} = Az_n$ soit

$$z_n = PZ_n = [v_1 v_2] \begin{pmatrix} c_0 r^n + nc_1 r^{n-1} \\ c_1 r^n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z_n = (c_0 r^n + nc_1 r^{n-1})v_1 + c_1 r^n v_2. \qquad (3.7)$$

**Théorème 3.5.3** *Supposons que $A$ soit une matrice carrée d'ordre 2 avec une valeur propre multiple $\lambda$ et seulement un vecteur propre indépendant $v_1$. Soit $v_2$ un vecteur propre généralisé associé à $v_1$ et $\lambda$. Alors la solution du système d'équations de récurrence $z_{n+1} = Az_n$ est (3.7).*

**Exemple 3.5.4** La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable car elle admet une valeur propre double $\lambda = 3$ et un seul vecteur propre indépendant $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On considère le système linéaire d'équations de récurrence associé à $A$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 4x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 2y_n \end{array} \right. .$$

Grâce qu théorème précédent, la solution générale de ce système est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & c_0 3^n + c_1(n3^{n-1} + 3^n) \\ y_n & = & -c_0 - c_1 n3^{n-1} \end{array} \right. .$$

Généralisons maintenant le théorème 3.5.3 en dimension 3 : soit le changement de variable $z = PZ$ alors $W_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)W_n = TW_n$. En effet, si $w_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$, on a $w_{n+1} = Aw_n \Leftrightarrow PW_{n+1} = APW_n \Leftrightarrow W_{n+1} = P^{-1}APW_n$

$$\Leftrightarrow W_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} X_{n+1} &= \lambda_1 X_n + Y_n && (3.8a) \\ Y_{n+1} &= \lambda_1 Y_n && (3.8b) \\ Z_{n+1} &= \lambda_2 Z_n && (3.8c) \end{aligned} \right.$$

(3.8$c$) $\Leftrightarrow Z_n = \lambda_2^n Z_0$. Ensuite, (3.8$b$) $\Leftrightarrow Y_n = \lambda_1^n Y_0$ et enfin, dans (3.8a), $X_{n+1} = \lambda_1 X_n + \lambda_1^n Y_0$. Or

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_0 & = & c_0,\ Y_0 = c_1 \\ X_1 & = & \lambda_1 c_0 + \lambda_1^0 c_1 = \lambda_1 c_0 + c_1 \\ & \vdots & \\ X_n & = & \lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1} \end{array} \right.$$

Dans (3.8a), on a $X_{n+1} = \lambda_1^{n+1} c_0 + (n+1) c_1 \lambda_1^n$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_1^n c_1 \\ \lambda_2^n c_2 \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ensuite le changement de coordonnées $z = PZ$, on obtient

$$\begin{aligned} w_n = PW_n = [v_1 v_2 v_3] \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix} &= [v_1 v_2 v_3] T^n \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = PT^n P^{-1} w_0 \\ = (\lambda_1^n c_0 + n c_1 \lambda_1^{n-1}) v_1 + \lambda_1^n c_1 v_2 + \lambda_2^n c_2 v_3 \text{ où } c_0 &= X_0 = P^{-1} x_0. \end{aligned}$$

### 3.5.4 Exercice récapitulatif (corrigé)

Déterminer la solution du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & y_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 2y_n + 4z_n \end{array} \right.$$

pour des conditions initiales données.

*Correction.*

La matrice associée au système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminons le spectre de $A$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2-\lambda^2)(3-\lambda).$$

Donc $Sp(A) = \{2, 3\}$ où 2 est une valeur propre de multiplicité 2. Déterminons maintenant les sous-espaces propres associés.

- $E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 2X\}$ avec $X = (x, y, z)$.

$$AX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -y - z & = & 0 \\ 2y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

  donc en choisissant $x = 1$, $v_1 = (1, 0, 0)$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda = 2$. Comme $dim(E_2) \neq 2$, $A$ n'est pas diagonalisable.
  Recherchons un vecteur propre généralisé. On cherche $v_2 = (x, y, z)$ tel que

$$(A-2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ -y-z & = & 0 \\ 2y+2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $v_2 = (x,y,z) = (x,1,-1) = x(1,0,0)+(0,1,-1)$. En choisissant $x = 0$, on obtient $v_2 = (0,1,-1)$.

- $E_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = 3X\}$ avec $X = (x,y,z)$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y & = & 0 \\ -2y-z & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -2y \end{array}\right.$$

donc en choisissant $y = 1$, $v_3 = (1,1,2)$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

Donc, si $P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = T \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$. Ainsi, en vérifiant que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où la solution en fonction des conditions initiales car $X_n = A^n X_0$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_n & = & x_0 2^n + y_0((n+1)2^n - 3^n) + z_0((2+n)2^{n-1} - 3^n) \\ y_n & = & y_0(2^{n+1} - 3^n) + z_0(2^n - 3^n) \\ z_n & = & y_0 52 \times 3^n - 2^{n+1}) + z_0(2 \times 3^n - 2^n) \end{array}\right.$$

## 3.6 Processus de Markov

Dans ce paragraphe, on introduit une application importante des valeurs propres et vecteurs propres à des problèmes économiques : la solution des processus de Markov.
On travaille avec un processus dynamique dans lequel le temps est traité comme une variable discrète, ainsi la dynamique est donnée par des équations de récurrence. Supposons que le processus sous-jacent à l'étude puisse être décrit par un nombre fini d'états $S_1, \ldots, S_k$. À chaque période le système se situe en un et seulement un de ces $k$ états.

**Définition 3.6.1** *Un processus stochastique est une règle qui donne la probabilité que le système ou un individu dans ce système soit dans l'état i au temps $n+1$, connaissant les probablités d'être dans les divers états aux périodes précédentes. Cette probabilité pourrait, en principe, dépendre de l'intégralité de l'histoire antérieure du système qui correspond aux états qui ont été réalisés aux périodes $1, 2, \ldots, n$. Quand la probabilité du système, pour tout état i et au temps $n+1$, dépend seulement de ce qu'était l'état du système au temps n, le processus stochastique est appelé un processus de Markov. Pour un processus de Markov, seulement le passé immédiat a de l'importance.*

Les éléments-clés d'un processus de Markov sont :

1. la probabilité $x^i(n)$ que l'état $i$ survienne à la période $n$, ou alternativement, la fraction de la population qui est dans l'état $i$ à la période $n$ et
2. les probabilités de transition $m_{ij}$, où $m_{ij}$ est la probabilité que le processus soit dans l'état $i$ à la période $n+1$ s'il est en l'état $j$ au temps $n$.

La matrice dans laquelle on place les probabilités de transition est appelée matrice de transition ou matrice stochastique ou encore matrice de changement d'états :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \ldots & m_{kk} \end{pmatrix}$$

On remarque que ces probabilités sont écrites de façon à ce que les premiers indices caractérisent la période suivante et les seconds indices la période actuelle. En termes probabilistes, $m_{ij}$ est la probabilité (conditionnelle) que le système soit en l'état $i$ à la période suivante, sachant qu'il se trouve en l'état $j$ à cette période. Compte tenu de son état à la période actuelle, le système évolue vers un et un seul état à la période suivante. Par conséquent, la somme des termes $m_{ij}$ par rapport à $i$ doit être égale à 1 ; ce qui revient à dire que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice doit être égale à 1. Comme on définit une matrice de Markov comme étant toute matrice non négative $(m_{ij})$ dont la somme des éléments de chaque ligne $\sum_i m_{ij}$ est égale à 1, c'est la transposée de $M$ qui est une matrice de Markov.
Nous supposons que les probabilités $m_{ij}$ sont fixées et indépendantes de $n$. Pour décrire cette hypothèse, nous disons que le processus est temporellement homogène ou que les probabilités de transition sont stationnaires.
Pour révéler la dynamique sous-jacente d'un processus de Markov, supposons que $x^j(n)$ soit la fraction de la population de taille $N$ qui est en l'état $j$ à la période $n$. Alors, le nombre total des membres de la population en l'état $j$ à la période $n$. Alors le nombre total des membres de la population en l'état $j$ à la période $n$ est $x^j(n)N$. Par hypothèse, $m_{ij}x^j(n)N$ de ces membres seront dans l'état $i$ à la période $(n+1)$. Le nombre total des membres de la population dans l'état $i$ à la période $(n+1)$, $x^i(n+1)N$, est la somme par rapport à $j$ de ces nombres correspondants aux membres qui passent de l'état $j$ à l'état $i$ :

$$x^i(n+1)N = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}x^j(n)N \text{ pour tout } i = 1, \dots, k$$

ou, en notation matricielle, après avoir divisé par $N$,

$$\begin{pmatrix} x^1(n+1) \\ \vdots \\ x^k(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(n) \\ \vdots \\ x^k(n) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

ce qui donne $\mathbf{x}(n+1) = M\mathbf{x}(n)$. Le système d'équations (3.9), dans lequel $M^t$ est une matrice de Markov, est appelé un système de Markov ou processus de Markov stationnaire.

**Exemple 3.6.1** Considérons le modèle d'emploi suivant. Chaque personne dans la population est soit employée soit sans emploi. Les deux états de ce modèle sont « être employé » et « être sans emploi ». Soit $x^1(n)$ la fraction de la population étudiée qui est employée à la fin de la période $n$ et $x^2(n)$ la fraction sans-emploi. Supposons qu'une personne employée a une probabilité de 90% de rester employée à la période suivante (et, par conséquent, une probabilité de 10% de se retrouver sans emploi à la période suivante), et qu'une personne sans-emploi a une probabilité de 40% (et, par conséquent, 60% de chance de rester sans emploi).
En déduire le taux de chômage à long terme.

*Correction.*
Les évolutions sont retracées par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^1(n+1) & = & 0,9x^1(n) + 0,4x^2(n) \\ x^2(n+1) & = & 0,1x^1(n) + 0,6x^2(n) \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1(n+1) \\ x^2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Une valeur propre du système est $\lambda = 1$. En utilisant le résultat de la trace, nous concluons que l'autre valeur propre est $\lambda = 1,5 - 1 = 0,5$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale du système (3.10) est

$$\begin{pmatrix} x^1(n) \\ x^2(n) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} 1^n + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 0,5^n. \tag{3.11}$$

Puisque $1^n = 1$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, dans le long terme, la solution générale (3.11) du système de Markov (3.10) tend vers $w_1 = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $w_1$ devrait être un vecteur de probabilité dont la somme des composantes est égale à 1, prenons $c_1$ égal à $1/5$ c'est-à-dire l'inverse de la somme des composantes de $w_1$. On en déduit que la solution du système (3.10) tend vers $\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ quand $n$ tend vers l'infini et que nos hypothèses conduisent au taux de chômage de long terme de 20% pour cette population.

Il existe beaucoup de résultats généraux concernant les processus de Markov que l'analyse de cet exemple illustre :

1. $\lambda_1 = 1$ est toujours une valeur propre de la matrice de Markov sous-jacente, cela est aussi vrai pour sa matrice transposée.
2. Pour une matrice de format $2 \times 2$, la trace, qui correspond à la somme des valeurs propres, est toujours une nombre compris entre 0 et 2. Par conséquent, la seconde valeur propre$\lambda_2$ prend une valeur comprise entre $-1$ et $+1$.
3. Si $a_{ii} < 1$, alors les éléments de $(A - 1I)$ ont les signes $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$. Ainsi, la valeur propre $\lambda_1 = 1$ a un vecteur propre $w_1$ dont tous les éléments sont positifs. Ce vecteur propre peut servir de vecteur de probabilité $v_1$ en divisant chaque composante de $w_1$ par la somme des composantes de $w_1$.
4. La solution générale est $1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$. Puisque $\lambda_2^n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, chaque solution tend vers $v_1$. En particulier, les composantes de $v_1$ donnent la distribution de long terme des états.

Ces quatre propriétés restent valables pour une large classe de processus pour lesquels la matrice de transition ou au moins une puissance de la matrice de transition a toutes ses composantes strictement positives.

**Définition 3.6.2** *Soit $M$ une matrice de Markov définie comme une matrice non négative dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Alors, $M$ est appelée une matrice de Markov régulière si $M^r$ a seulement des éléments positifs pour un entier $r$. Dans ce cas, si $r = 1$, c'est-à-dire si chaque élément de $M$ est positif, $M$ est appelée une matrice positive.*

**Théorème 3.6.1** *Soit $M$ une matrice de Markov régulière. Alors,*

1. *1 est une valeur propre de $M$ d'ordre de multiplicité 1,*
2. *toute autre valeur propre $\lambda$ de $M$ satisfait $|\lambda| < 1$,*
3. *la valeur propre 1 a un vecteur propre associé $w_1$ avec des composantes strictement positives et*
4. *si nous notons $v_1$ le vecteur $w_1$ divisé par la somme de ses composantes, alors $v_1$ est un vecteur de probabilité et chaque solution $x(n)$ de $x(n+1) = Mx(n)$ tend vers $v_1$ quand $n$ tend vers $+\infty$.*

**Exemple 3.6.2** Supposons que les familles françaises soient classées comme
- urbaines,
- suburbaines,
- rurales,

et que chaque année :
- 20% des familles urbaines se déplacent en banlieue et 5% vont à la campagne,
- 2% des habitants des banlieues se déplacent dans les zones urbaines et 8% vont dans les zones rurales,
- 10% des familles rurales migrent dans les zones urbaines et 20% vont en banlieue.

Étudier, à long terme, les déplacements des familles.

*Correction.*
Soient $U_n$, $S_n$ et $R_n$ les fractions de la population classée, respectivement à l'horizon de $n$ années. Alors, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ S_{n+1} \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,02 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 & 0,2 \\ 0,05 & 0,08 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ S_n \\ R_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

La matrice $A$ du système admet pour valeurs propres 1 ; 0,7 et 0,65 donc $A$ est diagonalisable. Les vecteurs propres associés sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La solution générale du problème est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} U_n \\ S_n \\ R_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix} \times 1^n + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times 0,7^n + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times 0,65^n \tag{3.13}$$

Puisque $1^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,65^n = 0$, dans le long terme, la solution générale (3.13) du système de Markov (3.12) tend vers $w_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2/15 \\ 10/15 \\ 3/15 \end{pmatrix}$ quand $n$ tend vers l'infini. Comme $w_1$ devrait être un vecteur de probabilité dont la somme des composantes est égale à 1, on prend $c_1$ égal à 1. On en déduit qu'à long terme, 2/15 de la population vivra dans les villes, 2/3 en banlieue et 1/5 à la campagne.

## 3.7 Exercices

**Exercice 27** Soient $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 9 & a \\ b & 9 \end{pmatrix}$.
Préciser selon les valeurs de $a$ et $b$ les cas où $C$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 28** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -36 & 28 \\ 6 & 23 & -14 \\ 4 & 14 & -9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 7 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elle, préciser si elle est diagonalisable danns $\mathbb{R}$. Si oui, la diagonaliser et donner la matrice de passage. Si non, justifier.

**Exercice 29** Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $A$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 30**

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$ en donnant la matrice de passage $P$ telle que $M^{-1}PM$ soit diagonale.
2. Montrer que $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 31** Soit $A$ une matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $P$ inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ avec $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $C_1 = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $C_1$ est un vecteur propre de $A$. Pour quelle valeur propre ?
2. Donner une équation liant $C_2 = P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1$ et $A$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver $C_1$ et $C_2$ comme ci-dessus.

**Exercice 32** Soit la matrice $A$ définie par $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $A$.
2. Vérifier que $A$ n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer la décomposition $A = \Delta + N$ où $\Delta$ est diagonalisable et $N$ est nilpotente avec $\Delta.N = N.\Delta$

**Exercice 33** Dans chacun des cas suivants, calculer les valeurs propres de $A$ :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
5. $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 34** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$.
2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que
   (a) $AX = 5X$,
   (b) $AX = 2X$.

   Vérifier que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution de (a) et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution de (b).
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $P$ est inversible et calculer l'inverse de $P$.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$.
4. Calculer $A^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

**Exercice 35** Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes suivantes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $AX_1$, $AX_2$ et $AX_3$. Que peut-on en déduire ?
2. $A$ est-elle diagonalisable ?
3. $A$ est-elle inversible ?

**Exercice 36** Calculer les valeurs propres de la matrice $A$ dans les cas suivants, dire si $A$ est diagonalisable :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 37** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$.
   Vérifier que le spectre de $A$ est $\{-1; 2; 5\}$. $A$ est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :
   (a) $AX = -X$,
   (b) $AX = 2X$,
   (c) $AX = 5X$.
3. Déterminer une matrice $P$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale $D$.
4. Calculer $A^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

**Exercice 38** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$.
2. Déterminer les vecteurs propres de $A$. En déduire que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 39** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$. En déduire que $A$ est diagonalisable.
2. Déterminer les vecteurs propres de $A$.
3. Diagonaliser $A$ en précisant la matrice de passage $P$.
4. Soient les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par $U_0 = 1$, $V_0 = 1$ et pour tout entier $n$

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} & = & -U_n + 2V_n \\ V_{n+1} & = & U_n \end{array}.$$

Vérifier que $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$.

5. Calculer $U_n$ pour tout entier $n$.

**Exercice 40** 3 enfants A,B,C jouent avec une balle.

- Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est 0,75 et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est 0,25.
- Lorsque B a la balle, il l'envoie respectivement à A ou à C avec la probabilité 0,75 et 0,25.
- C envoie toujours la balle à B.

On désigne par $A_n$, $B_n$, $C_n$ les probabilités qu'à l'issue du n$^{\text{ième}}$ lancer, ce soit A, B ou C qui ait la balle.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée $M$ d'ordre 3 telle que :
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer les valeurs propres de $M$ et les vecteurs propres associés.
3. En déduire que $M = P^{-1}DP$, où $D$ est une matrice diagonale et $P$ une matrice que l'on déterminera.
4. Calculer $M^n$.
5. Calculer les limites à l'infini des probabilités $A_n$, $B_n$ et $C_n$.
On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

**Exercice 41** Dans les cas suivants, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A$. Dire si $A$ est diagonalisable.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 42** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$. On vérifiera que le polynôme caractéristique s'écrit$(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ et que la somme des valeurs propres est égale à la trace de $A$.
2. Déterminer les vecteurs propres de $A$. En déduire que $A$ est diagonalisable.
3. Donner une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$, inversibles, telles que $D = P^{-1}AP$.

**Exercice 43** <u>Problème</u> : De combien de façons peut-on vider un tonneau de $n$ litres avec un pot de 1 litre et un pot de 2 litres ?

Il est nécessaire de bien s'entendre sur la signification du problème. Ainsi un tonneau de 3 litres peut être vidé en prélevant 1 litre puis 2 litres, ou bien 2 litres puis 1 litre, ou bien 3 fois 1 litre. Ces 3 façons seront considérées comme différentes.

Soit $U_n$ le nombre recherché.

1. Vérifier que $U_1 = 1$ et $U_2 = 2$. Calculer $U_3$.
2. On admettra que la suite $(U_n)$ vérifie la relation : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.
   (a) Déterminer la matrice $A$ telle que : $\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que $A$ est diagonalisable.

(c) Déterminer une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible telles que $D = P^{-1}AP$.

(d) Calculer $A^n$ pour $n$ entier naturel non nul.

(e) En déduire $U_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 44** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 45** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient $X_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $X_2 = (0, 0, 1, 1)$.
   Calculer $AX_1$ et $AX_2$. En déduire que 0 et 1 sont 2 valeurs propres de $A$.
2. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Préciser sa dimension.
3. On admet que 0 est une valeur propre double. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 46** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A$.
   Montrer que $A$ est diagonalisable puis diagonaliser $A$, c'est-à-dire trouver une matrice diagonale $D$ et une matrice $P$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer $A^n$.
3. Soient les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par leurs premiers termes $u_0$, $v_0$, $w_0$ et les relations suivantes :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & -4u_{n-1} - 6v_{n-1} \\ v_n & = & 3u_{n-1} + 5v_{n-1} \\ w_n & = & 3u_{n-1} + 6v_{n-1} + 5w_{n-1} \end{array} \right.$$
   Calculer $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$ et de $u_0, v_0, w_0$.