Master 1 GSI - Mentions ACCIE et RIM - ULCO, La Citadelle, 2012/2013

Mesures et Analyses Statistiques de Données - Probabilités

CORRECTION TP 2 - Probabilités sous `R`

Exercice 1 *Correction* :

1. ```
   > options(digits=7)
   > dbinom(0 :10,10,1/3)
   ```
2. ```
   > options(digits=4)
   > dbinom(0 :10,10,1/3)
   ```
3. `> dbinom(1,10,1/3)`
4. `> sum(dbinom(46 :54,100,0.5))`
5. `> pbinom(1,10,1/3)`

Exercice 2 *Correction* :

1. `> ppois(4,2.7,lower.tail=FALSE)`
2. `> pnorm(1.96,lower.tail=FALSE)`
3. `> dnorm(0.975)`

Exercice 3 *Correction* :

1. `> rpois(10,2.7)`
2. `> rnorm(10)`
3. `> rchisq(10,2)`
4. `> rbinom(10,100,0.5)`

Exercice 4 *Correction* :

"`> qnorm(0.975)`" fournit la valeur de x telle que $P(X \leq x) = 0,975$ si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

"`> dnorm(0)`" fournit l'ordonnée du point sur la courbe de densité associée à $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ qui admet pour abscisse 0.

"`> pnorm(1.96)`" fournit la probabilité pour que $X \leq 1,96$ si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

"`> rnorm(20)`" fournit un échantillon gaussien centré réduit de taille 20.

"`> rnorm(10,mean=5,sd=0.5)`" fournit un échantillon gaussien de moyenne 5 et d'écart-type 0,5.

"`> x=seq(-3,3,0.1) ;pdf=norm(x) ;plot(x,pdf,type="l")`". La commande génère successivement :

– une subdivision régulière $\{x_i\}$ de $[-3;3]$ de pas $0,1$;
– un vecteur de composantes $\mathrm{pdf}_i = P(X \leq x_i)$ si $W \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$;
– le nuage de points (x_i,pdf_i) reliés par des segments.

“`> runif(3)`” fournit un échantillon de la distribution uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ de taille 3.

“`> rt(5,10)`” fournit un échantillon de la distribution de student $t(10)$ de taille 5.

Exercice 5 *Correction* :

1. En mathématiques, la distribution de Bernoulli ou loi de Bernoulli, du nom du mathématicien suisse Jacques Bernoulli, est une distribution discrète de probabilité, qui prend la valeur 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $q = 1-p$. En d'autres termes,
$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x=1, \\ 1-p & \text{si } x=0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ ou, de manière équivalente, $\mathbb{P}(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}1_{\{0,1\}}(x)$.
2. (a) k désignant le nombre de succès à l'issue des n épreuves, il ne peut excéder n. Il suffit donc de restreindre à $k \in \{1,\ldots,5\}$.

```
> x<-array(data=c(0 :5),dim=c(1,6))
```

(b)
```
> y<-array(data=c(0),dim=c(5,6))
> for(j in 1 :6)
+ {
+   for(i in 1 :5) #n dans la loi binomiale
+   {
+     if(j<=i+1)
+     {
+       y[i,j]=choose(i,j-1)*0.4∧(j-1)*0.6 ∧(i-j+1)
+     }
+   }
+ }
```

(c)
```
> plot(x,y[1,],type="h",col="red")
```

(d)
```
> for(i in 2 :5)
+ {
+   points(x+i*0.03,y[i,],type="h")
+ }
```

3.
```
> x<-array(data=c(-1 :5),dim=c(1,7))
> z<-array(data=c(0),dim=c(2,7))
> for(j in 1 :6)
+ {
+   z[1,1+j]=sum(y[1,1 :j])
+   z[2,1+j]=sum(y[5,1 :j])
+ }
> plot(x,z[1,],type="s", col="red", xlim=c(-1,5), ylim=c(0,1))
> lines(x,z[2,], type="s", col="blue")
```

Exercice 6 *Correction* :

1. $m = E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$ or $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} -e^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to+\infty} -e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ donc $m = E(X) = 0$.
2. $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \overset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ or $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} -te^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to+\infty} -e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ donc $\sigma^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ car f est la densité associée à la loi de probabilité $\mathcal{N}(0,1)$ (et vérifie donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$).

Exercice 7 *Correction* :

```
> w0<-seq(-3,3,length=500)
> plot(w0,pnorm(w0),type="l",xlab="",ylab="")
> lines(w0,dnorm(w0),type="l",xlab="",ylab="")
```

Exercice 8 *Correction* :

1. Le tableau est obtenu par l'intermédiaire des calculs suivants :
   - $\overline{x}_e = \dfrac{84}{8} = 10,5 \Rightarrow \overline{x} = 10,5$
   - $\sigma_e^2 = \dfrac{966}{8} - (10,5)^2 = 10,5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{8}{8-1}} \times 3,24 = 3,464.$

   On pose l'hypothèse H_0 : "$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(10,5;3,464)$".
   - La colonne Z s'obtient facilement en posant $Z = \dfrac{X-10,5}{3,464}$.
   - Comme $Z = \dfrac{X-10,5}{3,464} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, on récupère la colonne $F(X)$ grâce à la table de la loi normale centrée réduite. Par exemple,
     $F(5) = p(X \leq 5) = p(Z \leq -(-1,5877)) = 1 - p(Z \leq 1,5877) = 1 - 0,9438 = 0,0562$.
   - Les colonnes $\tilde{N}(X) = P(X < X_i)$ et $N(X) = P(X \leq X_i)$ sont obtenues en sommant les fréquences d'apparition de chacun des termes :
     $n = 8 \Rightarrow p(X = X_i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.

   Comme dans les autres cas (pour d'autres lois), le test de Kolmogorov consiste à comparer la distribution de fréquences relatives cumulées d'une variable observée avec la distribution théorique que cette variable aurait (dans notre cas, si elle était distribuée normalement). On superpose les deux distributions et on cherche la classe où l'écart entre la distribution théorique et la distribution observée est le plus grand et on vérifie (à l'aide de la table I) si cet écart est significativement grand, c'est-à-dire si dans notre cas, l'hypothèse de normalité peut être rejetée au seuil considéré. On a $D = \max|N(X) - F(x)| = 0,1824$, or $D_{8;0,05} = 0,457 > D$ donc on ne rejette pas H_0.

   Sous `R` :
   Les différentes colonnes du tableau (et la valeur de D) s'obtiennent par le biais des commandes :

```
> X1<-c(5,7,8,11,12,13,13,15)
> Z1<-(X1-mean(X1))/sd(X1)
> M1<-1/length(X1)*(seq(0,length(X1)-1,1))
> N1<-1/length(X1)*(seq(1,length(X1),1))
> F1<-pnorm(X1,mean(X1),sd(X1))
> absM1<-abs(M1-F1)
> absN1<-abs(N1-F1)
> D<-max(absM1,absN1)
```

   Le résultat du test est donné par la commande :

```
> ks.test(X1,"pnorm",mean(X1),sd(X1))

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data : X1
D = 0.1824, p-value = 0.9529
alternative hypothesis : two-sided

Message d'avis :
In ks.test(X1, "pnorm", mean(X1), sd(X1)) :
impossible de calculer les p-values correctes avec des ex-aequos
```

   Remarque 0.1 Dans un test statistique, la valeur p (en anglais p-value) est la probabilité d'obtenir la même valeur (ou une valeur encore plus extrême) du test si l'hypothèse nulle était vraie. Si cette valeur p est inférieure à la valeur du seuil préalablement défini (traditionnellement 5% ou 1%), on rejette l'hypothèse nulle.
   En d'autres termes, la valeur p est la probabilité de commettre une erreur de première espèce, c'est-à-dire de

rejeter à tort l'hypothèse nulle et donc d'obtenir un faux positif.
En général, on considère les seuils suivants :
- $< 0,01$: très forte présomption contre l'hypothèse nulle,
- $0,01 - 0,05$: forte présomption contre l'hypothèse nulle,
- $0,05 - 0,1$: faible présomption contre l'hypothèse nulle,
- $> 0,1$: pas de présomption contre l'hypothèse nulle.

Remarque 0.2 On peut éviter le message d'avertissement concernant les ex-aequos en modifiant légèrement l'une des valeurs, par exemple 13 en 13,001 :

```
> X1[7]=13.001
> ks.test(X1,"pnorm",mean(X1),sd(X1))

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data : X1
D = 0.1824, p-value = 0.9122
alternative hypothesis : two-sided
```

On observe effectivement une valeur du niveau de significativité assez différente de la précédente. Comme la p-value est supérieure à $\alpha = 0,05$, H_0 n'est pas rejetée.

Remarque 0.3 On aurait pu également utiliser le test de Lillierfors. Ce test n'est pas disponible "en standard" avec `R`, mais il se trouve dans le package "nortest" :

```
> library(nortest)
> lillie.test(X1)

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test

data : X1
D = 0.1824, p-value = 0.6034
```

2. Le tableau complété est donné ci-après.

X	Z	$\tilde{N}(X)$	$N(X)$	$F(X)$	$\lvert\tilde{N}(X) - F(X)\rvert$	$\lvert N(X) - F(X)\rvert$
5	-1,0141	**0**	0,125	0,1553	**0,1553**	0,0303
5,5	-0,9239	**0,125**	0,25	0,1778	**0,0528**	0,0722
5,5	-0,9239	**0,25**	0,375	0,1778	**0,0722**	0,1972
6	-0,8338	**0,375**	0,5	0,2022	**0,1728**	0,2978
14	0,6085	**0,5**	0,625	0,7286	**0,2286**	0,1036
16	0,9690	**0,625**	0,75	**0,8340**	**0,209**	**0,0840**
16	0,9690	**0,75**	0,875	**0,8340**	**0,084**	**0,0410**
17	**1,1493**	**0,875**	1	**0,8749**	1×10^{-4}	**0,1251**
10,625 5,5469	Moyenne Ec. type cor.			Maximum	**0,2978**	

Donc, $D = 0,2978$ et $D_{8;0,95} = 0,457 > D$, on ne rejette pas H_0.

Sous `R` :

```
> X2<-c(5,5.5,5.5,6,14,16,16,17)
> ks.test(X2,"pnorm",mean(X2),sd(X2))

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data : X1
D = 0.2978, p-value = 0.4771
alternative hypothesis : two-sided

Message d'avis :
In ks.test(X1, "pnorm", mean(X2), sd(X2)) :
```

```
impossible de calculer les p-values correctes avec des ex-aequos
```

Si on change les valeurs qui se répètent,

```
> X2[2]=5.501
> X2[6]=16.001
> ks.test(X2,"pnorm",mean(X2),sd(X2))

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data : X2
D = 0.2978, p-value = 0.3989
alternative hypothesis : two-sided
```

on obtient bien la conclusion attendue à savoir un non-rejet de l'hypothèse selon laquelle les données sont distribuées normalement.

Exercice 9 *Correction* :

Titrage : x_i	$(x_i - \overline{x})^2$	d_j	a_j	$a_j d_j$
40	400	40	0,5739	22,956
45	225	25	0,3291	8,2275
55	25	10	0,2141	2,141
60	0	5	0,1224	0,612
60	0	0	0,0399	0
60	0			
65	25			
65	25			
70	100			
80	400			
Somme	1200			$33,9365$
Moyenne	60			
T_n	1200	W	$0,95973836$	
$\sum(a_j d_j)^2$	$1151,686032$			

Pour les valeurs de a_j, on verra la table D associée. On trouve $W = 0,95973836$. On lit dans la table de Shapiro-Wilk (table E) pour $n = 10$ et un risque de 5% la valeur $W_{10;0,05} = 0,842$. Comme $W > W_{10;0,05}$, on accepte au risque de 5% l'hypothèse de normalité de la distribution statistique donnée.

Sous `R` :
Le test de Shapiro-Wilk est disponible dans le package “stats". La fonction correspondante est `shapiro.test` :

```
> X<-c(60,80,55,45,60,65,65,60,70,40)
> shapiro.test(X)

Shapiro-Wilk normality test

data : X
W = 0.9594, p-value = 0.7789
```

Comme la p-value est supérieure à α, on ne rejette pas H_0.

Exercice 10 *Correction* :

```
> a<-c(21,16,9,3,1)
> b<-rep(0 :4,a)
> exopois <- function(x) {
+     -sum(dpois(b, x, log = T))
+ }
> x <- seq(0, 3, le = 100)
```

```
> plot(x, tapply(x, as.factor(1 :100), exopois), type = "b")
> abline(v = mean(b))
```

TABLE A - Valeurs critiques pour le test de Dixon (unilatéral)

Statistique	n	Niveau de signification α			
		0,10	0,05	0,025	0,01
$r_{1,0}$	3	0,886	0,941	0,970	0,988
	4	0,679	0,765	0,829	0,889
	5	0,557	0,642	0,710	0,780
	6	0,482	0,560	0,625	0,698
	7	0,434	0,507	0,568	0,637
$r_{1,1}$	8	0,479	0,554	0,615	0,683
	9	0,441	0,512	0,570	0,635
	10	0,409	0,477	0,534	0,597
$r_{2,1}$	11	0,517	0,576	0,625	0,679
	12	0,490	0,546	0,592	0,642
	13	0,467	0,521	0,565	0,615
$r_{2,2}$	14	0,492	0,546	0,590	0,641
	15	0,472	0,525	0,568	0,616
	16	0,454	0,507	0,548	0,595
	17	0,438	0,490	0,531	0,577
	18	0,424	0,475	0,516	0,561
	19	0,412	0,462	0,503	0,547
	20	0,401	0,450	0,491	0,535
	21	0,391	0,440	0,480	0,524
	22	0,382	0,430	0,470	0,514
	23	0,374	0,421	0,461	0,505
	24	0,367	0,413	0,452	0,497
	25	0,360	0,406	0,445	0,489

TABLE B - Valeurs critiques pour le test de Cochran

p laboratoires	n résultats sur l'échantillon par laboratoire									
	$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$		$n = 6$	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%
2	–	–	0,995	0,975	0,979	0,939	0,959	0,906	0,937	0,877
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,883	0,798	0,834	0,746	0,793	0,707
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684	0,721	0,629	0,676	0,590
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598	0,633	0,544	0,588	0,506
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532	0,564	0,480	0,520	0,445
7	0,838	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480	0,508	0,431	0,466	0,397
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438	0,463	0,391	0,423	0,360
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403	0,425	0,358	0,387	0,329
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373	0,393	0,331	0,357	0,303
11	0,684	0,570	0,504	0,417	0,418	0,348	0,366	0,308	0,332	0,281
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326	0,343	0,288	0,310	0,262
13	0,624	0,515	0,450	0,371	0,369	0,307	0,322	0,271	0,291	0,243
14	0,599	0,492	0,427	0,352	0,349	0,291	0,304	0,255	0,274	0,232
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276	0,288	0,242	0,259	0,220
16	0,553	0,452	0,388	0,319	0,316	0,262	0,274	0,230	0,246	0,208
17	0,532	0,434	0,372	0,305	0,301	0,250	0,261	0,219	0,234	0,198
18	0,514	0,418	0,356	0,293	0,288	0,240	0,249	0,209	0,223	0,189
19	0,496	0,403	0,343	0,281	0,276	0,230	0,238	0,200	0,214	0,181
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220	0,229	0,192	0,205	0,174

TABLE C - la loi de Fisher-Snédécor

Cette table donne, pour $\alpha = 0,025$, pour ν_1 et ν_2 donnés, les valeurs $F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}$ telles que $p(\{X < F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha}\}) = 1 - \alpha$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	19	20	24	30	40	60	120	∞
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	991,8	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,18	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,58	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,34	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,18	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,48	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,02	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,68	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,44	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,24	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,09	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,96	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,86	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,77	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,70	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,63	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,58	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,90	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,53	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,48	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,44	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,41	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,37	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,35	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,32	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,29	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95	1,88
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,27	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93	1,85
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,25	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91	1,83
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,23	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89	1,81
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,21	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,09	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,96	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,84	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,74	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

TABLE D - Coefficients de Shapiro-Wilk

Les colonnes des tableaux ci-dessous donnent les coefficients de Shapiro-Wilk $(a_1, \ldots, a_\rho)$ où ρ est l'entier tel que $n = 2\rho$ ou $n = 2\rho + 1$ selon la parité de n.

i \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739
2			0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291
3					0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141
4							0,0561	0,0947	0,1224
5									0,0399

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,5150	0,5056	0,4963	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,3290	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,2260	0,2347	0,2412	0,2460	0,2495	0,2521	0,2540	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,1240	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6		0,0303	0,0539	0,0727	0,0880	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7				0,0240	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8						0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9								0,0163	0,0303	0,0422
10										0,0140

i \ n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,4590	0,4542	0,4493	0,4450	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,2510	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,2150	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1064	0,1870
6	0,1399	0,1443	0,1480	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,1630
7	0,1092	0,1150	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,0530	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,0610	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11		0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,0540	0,0598	0,0650	0,0697
12				0,0107	0,0200	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13						0,0094	0,0178	0,0253	0,0320	0,0381
14								0,0084	0,0159	0,0227
15										0,0076

TABLE E - Valeurs de Shapiro-Wilk

Les valeurs intérieures du tableau ci-dessous donnent les coefficients $W_{\alpha,n}$ utilisés dans le test de Shapiro-Wilk (n est la taille de l'échantillon et α est la valeur du risque).

n \ α	0,05	0,01
3	0,767	0,753
4	0,748	0,687
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,730
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,850	0,792
12	0,859	0,805
13	0,856	0,814
14	0,874	0,825
15	0,881	0,835
16	0,837	0,844
17	0,892	0,851
18	0,897	0,858
19	0,901	0,863
20	0,905	0,868
21	0,908	0,873
22	0,911	0,878
23	0,914	0,881
24	0,916	0,884
25	0,918	0,888
26	0,920	0,891

n \ α	0,05	0,01
27	0,923	0,894
28	0,924	0,896
29	0,926	0,898
30	0,927	0,900
31	0,929	0,902
32	0,930	0,904
33	0,931	0,906
34	0,933	0,908
35	0,934	0,910
36	0,935	0,912
37	0,936	0,914
38	0,938	0,916
39	0,939	0,917
40	0,940	0,919
41	0,941	0,920
42	0,942	0,922
43	0,943	0,923
44	0,944	0,924
45	0,945	0,926
46	0,945	0,927
47	0,946	0,928
48	0,947	0,929
49	0,947	0,929
50	0,947	0,930

TABLE F - Quantiles de la loi du χ^2_ν

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ telles que $P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1-\alpha$.

ν	$1-\alpha$									
	$0,005$	$0,010$	$0,025$	$0,050$	$0,100$	$0,900$	$0,950$	$0,975$	$0,990$	$0,995$
1	$0,0000393$	$0,000157$	$0,000982$	$0,00393$	$0,0158$	$2,71$	$3,84$	$5,02$	$6,63$	$7,88$
2	$0,0100$	$0,0201$	$0,0506$	$0,103$	$0,211$	$4,61$	$5,99$	$7,38$	$9,21$	$10,60$
3	$0,072$	$0,115$	$0,216$	$0,352$	$0,584$	$6,25$	$7,81$	$9,35$	$11,34$	$12,84$
4	$0,207$	$0,297$	$0,484$	$0,711$	$1,064$	$7,78$	$9,49$	$11,14$	$13,28$	$14,86$
5	$0,412$	$0,554$	$0,831$	$1,145$	$1,61$	$9,24$	$11,07$	$12,83$	$15,09$	$16,75$
6	$0,676$	$0,872$	$1,24$	$1,64$	$2,20$	$10,64$	$12,59$	$14,45$	$16,81$	$18,55$
7	$0,989$	$1,24$	$1,69$	$2,17$	$2,83$	$12,02$	$14,07$	$16,01$	$18,48$	$20,28$
8	$1,34$	$1,65$	$2,18$	$2,73$	$3,49$	$13,36$	$15,51$	$17,53$	$20,09$	$21,96$
9	$1,73$	$2,09$	$2,70$	$3,33$	$4,17$	$14,68$	$16,92$	$19,02$	$21,67$	$23,59$
10	$2,16$	$2,56$	$3,25$	$3,94$	$4,87$	$15,99$	$18,31$	$20,48$	$23,21$	$25,19$
11	$2,60$	$3,05$	$3,82$	$4,57$	$5,58$	$17,28$	$19,68$	$21,92$	$24,73$	$26,76$
12	$3,07$	$3,57$	$4,40$	$5,23$	$6,30$	$18,55$	$21,03$	$23,34$	$26,22$	$28,30$
13	$3,57$	$4,11$	$5,01$	$5,89$	$7,04$	$19,81$	$22,36$	$24,74$	$27,69$	$29,82$
14	$4,07$	$4,66$	$5,63$	$6,57$	$7,79$	$21,06$	$23,68$	$26,12$	$29,14$	$31,32$
15	$4,60$	$5,23$	$6,26$	$7,26$	$8,55$	$22,31$	$25,00$	$27,49$	$30,58$	$32,80$
16	$5,14$	$5,81$	$6,91$	$7,96$	$9,31$	$23,54$	$26,30$	$28,85$	$32,00$	$34,27$
17	$5,70$	$6,41$	$7,56$	$8,67$	$10,09$	$24,77$	$27,59$	$30,19$	$33,41$	$35,72$
18	$6,26$	$7,01$	$8,23$	$9,39$	$10,86$	$25,99$	$28,87$	$31,53$	$34,81$	$37,16$
19	$6,84$	$7,63$	$8,91$	$10,12$	$11,65$	$27,20$	$30,14$	$32,85$	$36,19$	$38,58$
20	$7,43$	$8,26$	$9,59$	$10,85$	$12,44$	$28,41$	$31,41$	$34,17$	$37,57$	$40,00$
21	$8,03$	$8,90$	$10,28$	$11,59$	$13,24$	$29,62$	$32,67$	$35,48$	$38,93$	$41,40$
22	$8,64$	$9,54$	$10,98$	$12,34$	$14,04$	$30,81$	$33,92$	$36,78$	$40,29$	$42,80$
23	$9,26$	$10,20$	$11,69$	$13,09$	$14,85$	$32,01$	$35,17$	$38,08$	$41,64$	$44,18$
24	$9,89$	$10,86$	$12,40$	$13,85$	$15,66$	$33,20$	$36,42$	$39,36$	$42,98$	$45,56$
25	$10,52$	$11,52$	$13,12$	$14,61$	$16,47$	$34,38$	$37,65$	$40,65$	$44,31$	$46,93$
26	$11,16$	$12,20$	$13,84$	$15,38$	$17,29$	$35,56$	$38,89$	$41,92$	$45,64$	$48,29$
27	$11,81$	$12,88$	$14,57$	$16,15$	$18,11$	$36,74$	$40,11$	$43,19$	$46,96$	$49,64$
28	$12,46$	$13,56$	$15,31$	$16,93$	$18,94$	$37,92$	$41,34$	$44,46$	$48,28$	$50,99$
29	$13,12$	$14,26$	$16,05$	$17,71$	$19,77$	$39,09$	$42,56$	$45,72$	$49,59$	$52,34$
30	$13,79$	$14,95$	$16,79$	$18,49$	$20,60$	$40,26$	$43,77$	$46,98$	$50,89$	$53,67$
40	$20,71$	$22,16$	$24,43$	$26,51$	$29,05$	$51,81$	$55,76$	$59,34$	$63,69$	$66,77$
50	$27,99$	$29,71$	$32,36$	$34,76$	$37,69$	$63,17$	$67,50$	$71,42$	$76,15$	$79,49$
60	$35,53$	$37,48$	$40,48$	$43,19$	$46,46$	$74,40$	$79,08$	$83,30$	$88,38$	$91,95$
70	$43,28$	$45,44$	$48,76$	$51,74$	$55,33$	$85,53$	$90,53$	$95,02$	$100,4$	$104,2$
80	$51,17$	$53,54$	$57,15$	$60,39$	$64,28$	$96,58$	$101,9$	$106,6$	$112,3$	$116,3$
90	$59,20$	$61,75$	$65,65$	$69,13$	$73,29$	$107,6$	$113,1$	$118,1$	$124,1$	$128,3$
100	$67,33$	$70,06$	$74,22$	$77,93$	$82,36$	$118,5$	$124,3$	$129,6$	$135,8$	$140,2$

TABLE G - Fonction de répartition de la loi de Student $t_{\nu,\alpha}$.

α	$0,05$		$0,01$		$0,001$	
$1-\alpha$ et $1-\dfrac{\alpha}{2}$	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	$6,314$	$12,706$	$31,821$	$63,656$	$318,289$	$636,619$
2	$2,920$	$4,303$	$6,965$	$9,925$	$22,328$	$31,600$
3	$2,353$	$3,182$	$4,541$	$5,841$	$10,214$	$12,924$
4	$2,132$	$2,776$	$3,747$	$4,604$	$7,173$	$8,610$
5	$2,015$	$2,571$	$3,365$	$4,032$	$5,894$	$6,869$
6	$1,943$	$2,447$	$2,969$	$3,707$	$5,208$	$5,959$
7	$1,895$	$2,365$	$2,998$	$3,499$	$4,785$	$5,408$
8	$1,860$	$2,306$	$2,896$	$3,355$	$4,501$	$5,041$
9	$1,833$	$2,262$	$2,821$	$3,250$	$4,297$	$4,781$
10	$1,812$	$2,228$	$2,764$	$3,169$	$4,144$	$4,587$
11	$1,796$	$2,201$	$2,718$	$3,106$	$4,025$	$4,437$
12	$1,782$	$2,179$	$2,681$	$3,055$	$3,930$	$4,318$
13	$1,771$	$2,160$	$2,650$	$3,012$	$3,852$	$4,221$
14	$1,761$	$2,145$	$2,624$	$2,977$	$3,787$	$4,140$
15	$1,753$	$2,131$	$2,602$	$2,947$	$3,733$	$4,073$
16	$1,746$	$2,120$	$2,583$	$2,921$	$3,686$	$4,015$
17	$1,740$	$2,110$	$2,567$	$2,898$	$3,646$	$3,965$
18	$1,734$	$2,101$	$2,552$	$2,878$	$3,610$	$3,922$
19	$1,729$	$2,093$	$2,539$	$2,861$	$3,579$	$3,883$
20	$1,725$	$2,086$	$2,528$	$2,845$	$3,552$	$3,850$
25	$1,708$	$2,060$	$2,485$	$2,787$	$3,450$	$3,725$
30	$1,697$	$2,042$	$2,457$	$2,750$	$3,385$	$3,656$
40	$1,684$	$2,021$	$2,423$	$2,704$	$3,307$	$3,551$
50	$1,676$	$2,009$	$2,403$	$2,678$	$3,261$	$3,496$
60	$1,671$	$2,000$	$2,390$	$2,660$	$3,232$	$3,460$
100	$1,660$	$1,984$	$2,364$	$2,626$	$3,174$	$3,390$
∞	$1,646$	$1,960$	$2,327$	$2,576$	$3,091$	$3,291$

TABLE H - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

TABLE I - Valeurs critiques du test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon.

Taille de l'échantillon	Niveau de signification de D				Taille de l'échantillon	Niveau de signification de D			
	bilatéral		unilatéral			bilatéral		unilatéral	
	0,05	0,01	0,05	0,01		0,05	0,01	0,05	0,01
5	0,565	0,669	0,509	0,627	24	0,269	0,323	0,242	0,301
6	0,521	0,618	0,468	0,577	25	0,264	0,317	0,238	0,295
7	0,486	0,577	0,436	0,538	26	0,259	0,311	0,233	0,290
8	0,457	0,543	0,410	0,507	27	0,254	0,305	0,229	0,284
9	0,432	0,514	0,388	0,480	28	0,250	0,300	0,225	0,279
10	0,410	0,490	0,369	0,457	29	0,246	0,295	0,221	0,275
11	0,391	0,468	0,352	0,437	30	0,242	0,290	0,180	0,270
12	0,375	0,450	0,338	0,419	31	0,238	0,285	0,214	0,266
13	0,361	0,433	0,326	0,404	32	0,234	0,281	0,211	0,262
14	0,349	0,418	0,314	0,390	33	0,231	0,277	0,208	0,258
15	0,338	0,404	0,304	0,377	34	0,227	0,273	0,205	0,254
16	0,328	0,392	0,295	0,366	35	0,224	0,269	0,202	0,251
17	0,318	0,381	0,286	0,355	36	0,221	0,265	0,199	0,247
18	0,309	0,371	0,279	0,346	37	0,218	0,620	0,197	0,244
19	0,301	0,363	0,271	0,337	38	0,215	0,258	0,194	0,241
20	0,294	0,356	0,265	0,329	39	0,213	0,255	0,192	0,238
21	0,287	0,344	0,259	0,312	40	0,210	0,252	0,189	0,235
22	0,281	0,337	0,253	0,314	> 40	$1,360/\sqrt{n}$	$1,630/\sqrt{n}$	$1,220/\sqrt{n}$	$1,520/\sqrt{n}$
23	0,275	0,330	0,248	0,307					