CORRECTION Exercices Chapitre 1 - Dénombrements.

Exercice 1 <u>*Correction*</u> :

- $a = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1} = n.$
- $b = \dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1} = n(n-1).$

Exercice 2 <u>*Correction*</u> :

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = \frac{8!}{4!}.$$

Exercice 3 <u>*Correction*</u> : Soient les ensembles $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ et $F = \{R_1, R_2, R_3\}$. Une répartition de 5 éprouvettes dans les 3 rangements est une application de E dans F. Le nombre de répartitions est de 3^5. En effet, chaque éprouvette peut être rangée dans trois rangements distincts. Une répartition possible est $(R_1, R_2, R_2, R_1, R_3)$.

Exercice 4 <u>*Correction*</u> : Soient les ensembles $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ et $F = \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$ où E et F sont les ensembles composés respectivement des positions possibles et des nombres possibles pour chacun des numéros. Le nombre de répartitions possibles est alors de 10^8. Une répartition possible est $(2, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ce qui donne le numéro de téléphone 03/28/00/00/00 si l'indicatif est 03.

Exercice 5 <u>*Correction*</u> :

- Les sigles d'entreprises comportant deux lettres sont assimilables à des 2-listes avec remise (puisque les lettres du sigle peuvent être identiques). Il sont au nombre de 26^2, chaque lettre du sigle ayant 26 possiblités. On peut citer par exemple YO, OK, WY,...
- Les sigles d'entreprises comportant trois lettres sont au nombre de 26^3, on peut citer par exemple CIZ, KTY, TTT,...
- Les sigles d'entreprises comportant quatre lettres sont au nombre de 26^4, on peut citer par exemple CHIZ, KOTY, TYTT,...

Exercice 6 <u>*Correction*</u> :

1. Dans le conteneur, 4 pièces sont de type A donc $N = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$.
2. On a 6 pièces qui ne sont pas de type B donc $N = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$.
3. On a 1 pièce de type C donc $N = 1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$.
4. $AAB \to N = 4 \times 4 \times 3 = 48$.
5. $\left\{\begin{array}{l} AAB \to 4 \times 4 \times 3 = 48 \\ ABA \to 4 \times 3 \times 4 = 48 \\ BAA \to 3 \times 4 \times 4 = 48 \end{array}\right.$ et $N = 3 \times 48 = 144$.
6. $\left\{\begin{array}{l} ABD \to 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ ADB \to 4 \times 1 \times 3 = 12 \\ BAD \to 3 \times 4 \times 1 = 12 \\ BDA \to 3 \times 1 \times 4 = 12 \\ DAB \to 1 \times 4 \times 3 = 12 \\ DBA \to 1 \times 3 \times 4 = 12 \end{array}\right.$ et $N = 6 \times 12 = 72$.

Exercice 7 <u>*Correction*</u> : Soient A et D les ensembles constitués des employés parlant respectivement l'anglais et l'allemand, on a alors la représentation suivante :
On applique la formule précédente : $\text{Card}(A \cup D) = \text{Card}(A) + \text{Card}(D) - \text{Card}(A \cap D) = 8 + 5 - 3 = 10$. Ceux qui ne connaissent ni l'anglais ni l'allemand sont au nombre de $20 - 10 = 10$. De plus, $8 - 3 = 5$ ne parlent que l'anglais et $5 - 3 = 2$ ne parlent que l'allemand.

Exercice 8 <u>*Correction*</u> :

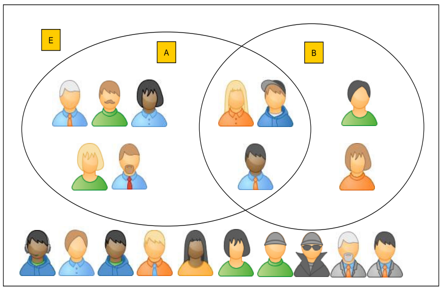

FIGURE 1 –

1. F : "l'étudiant est une fille", $\text{Card}(F) = 19 + 22 = 41$,
   $\overline{P}$: "l'étudiant(e) a moins de 23 ans", $\text{Card}(\overline{P}) = 19 + 19 = 38$,
   $\overline{D}$: "l'étudiant(e) est satisfait(e)", $\text{Card}(\overline{D}) = 24 + 25 = 49$,
   A : "l'étudiant(e) est assez déçu(e) ou assez satisfait(e)", $\text{Card}(A) = 25 + 16 = 41$,
2. $F \cap \overline{P} \cap D \cap A$: "filles de moins de 23 ans, assez déçues", $\text{Card}(F \cap \overline{P} \cap D \cap A) = 2$,
3. $(F \cap D) \cup (P \cap A)$: "filles assez ou très déçues OU étudiant(e)s de plus de 23 ans assez déçu(e)s ou assez satisfait(e)s", $\text{Card}(F \cap D) \cup (P \cap A) = \text{Card}(F \cap D) + \text{Card}(P \cap A) - \text{Card}((F \cap D) \cap (P \cap A)) = (2 + 2 + 4 + 2) + (9 + 4 + 4 + 6) - 4 = 10 + 23 - 4 = 29$,
4. $\overline{F} \cap (P \cap \overline{D} \cap \overline{A})$: "garçons de 23 ans et plus, très satisfaits", $\text{Card}(\overline{F} \cap (P \cap \overline{D} \cap \overline{A})) = 2$.

Exercice 9 *Correction* : Le nombre d'équipes de direction est $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Exercice 10 *Correction* :
- Le nombre d'anagrammes du mot $FIABILITE$ est $A_9^9 = 9!$.
- Le nombre de mots de 5 lettres distinctes que l'on peut former avec les lettres du mot $FIABILITE$ est A_9^5, on a par exemple $BFLTA$.

Exercice 11 *Correction* :
1. Le nombre de permutations est égal à $A_{10}^{10} = 10!$ soit $10!$ protocoles différents.
2. Le nombre de permutations avec répétitions est égal à $\dfrac{A_{10}^{10}}{4!6!} = \dfrac{10!}{4!6!}$ soit 210 protocoles différents.

Exercice 12 *Correction* : Pour obtenir 40 mL, il faut :
- prendre un tube de 20 mL et 4 tubes de 5 mL (1),
- prendre 3 tubes de 10 mL et 2 tubes de 5 mL (2),

et il n'y a pas d'autre moyen.
- Il y a $2 \times \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!} = 2 \times C_4^4 = 2$ façons d'obtenir (1), qui dépendent en fait du nombre de tubes de 20 mL.
- Il y a de plus $\dfrac{4 \times 3 \times 2}{3!} \times \dfrac{4 \times 3}{2!} = C_4^3 \times C_4^2 = 24$ choix possibles pour obtenir (2).

Exercice 13 *Correction* :
1. $E = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$.
2. $F = a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1$

Exercice 14 *Correction* :
1. $\mathcal{P}(\Omega_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ avec $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega_1)) = 2^1 = 2$,
2. $\mathcal{P}(\Omega_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ avec $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega_2)) = 2^2 = 4$,
3. $\mathcal{P}(\Omega_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ avec $\text{Card}(\mathcal{P}(\Omega_3)) = 2^3 = 8$.

Exercice 15 *Correction* :
- Supposons que l'ordre soit important (tirage successif sans remise).
  1. Soit l'événement A : "désigner 3 garçons pour les rôles du 1er, du 2ème et du 3ème de la promotion". Alors $\text{Card}(A) = 20 \times 19 \times 18 = 6840 = A_{20}^3$.

2. Soit l'événement B : "désigner 3 garçons et 2 filles pour les rôles des 5 premières places de la promotion". Alors $\mathrm{Card}(B) = (20 \times 19 \times 18) \times (8 \times 7) = 383040 = A_{20}^3 \times A_8^2$.

- Supposons que l'ordre ne soit pas important (tirage simultané).
  1. $\mathrm{Card}(A) = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3!} = \dfrac{6840}{6} = C_{20}^3 = 1140$.
  2. $\mathrm{Card}(B) = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3!} \times \dfrac{8 \times 7}{2!} = \dfrac{383040}{12} = C_{20}^3 \times C_8^2 = 31920$.

Exercice 16 *Correction* :

1. Il y a $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ comportements possibles. En effet, chaque appareil a 3 options possibles.
2. Les combinaisons de réponses qui imposeront de revoir la fabrication des appareils sont celles pour lesquelles on obtient au moins 3 défaillances catalectiques ou plus.
   – Il existe une seule façon de générer 4 défaillances catalectiques, celle où les quatre machines subissent une défaillance totale.
   – Il existe 8 façons de générer 3 défaillances catalectiques : 4 façons de choisir la machine qui n'a pas subi de défaillance totale et 2 façons de se comporter autrement.

Exercice 17 *Correction* :

1. (a) Soit l'événement A : "obtenir un nombre pair". Comme $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, on a $\mathrm{Card}(A) = 10$.
   (b) Soit l'événement B : "obtenir un nombre impair". Comme $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$, on a $\mathrm{Card}(B) = 10$.
   (c) Soit l'événement C : "obtenir un nombre divisible par 3". Comme $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, on a $\mathrm{Card}(C) = 6$.
   (d) Soit l'événement D : "obtenir un nombre au moins égal à 2". Comme $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, on a $\mathrm{Card}(D) = 19$.
2. On a $B \cap C = \{3, 9, 15\}$ donc $\mathrm{Card}(B \cap C) = 3$. On en déduit que $\mathrm{Card}(B \cup C) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(B \cap C) = 10 + 6 - 3 = 13$.

Exercice 18 *Correction* :

- On considère un tirage au hasard simultané.
  1. Soit Ω l'ensemble des sous-ensembles de 3 mesures prises simultanément parmi les 32. Par conséquent, le nombre de tirages possibles est égal à $\mathrm{Card}(\Omega) = \dfrac{32 \times 31 \times 30}{3!} = C_{32}^3 = 4960$.
  2. – On a $\mathrm{Card}(A) = 4 \times \dfrac{28 \times 27}{2!} = 4 \times C_{28}^2 = 1512$ (4 choix pour la 2e plus forte teneur et C_{28}^2 choix pour les deux autres teneurs).
     – On a $\mathrm{Card}(B) = 2 \times \dfrac{30 \times 29}{2!} = 2 \times C_{30}^2 = 870$.
     – On a $\mathrm{Card}(C) = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{3!} = C_4^3 = 4$.
     – Le complémentaire de D est défini par $\overline{D}$: "pas de plus forte teneur en plomb". On a alors $\mathrm{Card}(\overline{D}) = \dfrac{28 \times 27 \times 26}{3!} = C_{28}^3 = 3276$. Ainsi, $\mathrm{Card}(D) = 4960 - \mathrm{Card}(\overline{D}) = 1684$.
     – On supposera que la dernière mesure ne peut être ni une 4e plus forte teneur en plomb, ni une 3e plus forte teneur en plomb provenant de l'échantillon 3 ou 4. $\mathrm{Card}(E) = 4 \times 2 \times \dfrac{26}{1!} = 4 \times 2 \times C_{26}^1 = 208$.
     – Il faut distinguer deux cas : dans le premier, la 2e plus forte teneur n'est pas issue du 3e échantillon, dans le second, la 2e plus forte teneur est issue du 3e échantillon. Dans le premier cas, il y a $3 \times \dfrac{7 \times 6}{2!} = 3 \times C_7^2 = 63$ possibilités. Dans le second cas, il y a $1 \times 7 \times 21 = 147$ possibilités. Donc $\mathrm{Card}(F) = 63 + 147 = 210$.
- On considère un tirage au hasard successif (sans remise).
  1. Soit Ω l'ensemble des sous-ensembles de 3 mesures prises successivement sans remise parmi les 32. Par conséquent, le nombre de tirages possibles est égal à $\mathrm{Card}(\Omega) = A_{32}^3 = 29760$.
  2. – On a $\mathrm{Card}(A) = 4 \times \dfrac{28 \times 27}{2!} = 4 \times A_{28}^2 = 3024$ (4 choix pour la 2e plus forte teneur et C_{28}^2 choix pour les deux autres teneurs).
     – On a $\mathrm{Card}(B) = 2 \times A_{30}^2 = 1740$.
     – On a $\mathrm{Card}(C) = A_4^3 = 24$.
     – Le complémentaire de D est défini par $\overline{D}$: "pas de plus forte teneur en plomb". On a alors $\mathrm{Card}(\overline{D}) = A_{28}^3 = 19656$. Ainsi, $\mathrm{Card}(D) = 29760 - \mathrm{Card}(\overline{D}) = 10104$.

- On supposera que la dernière mesure ne peut être ni une 4e plus forte teneur en plomb, ni une 3e plus forte teneur en plomb provenant de l'échantillon 3 ou 4. Card$(E) = 4 \times 2 \times A_{26}^1 = 208$.
- Il faut distinguer deux cas : dans le premier, la 2e plus forte teneur n'est pas issue du 3e échantillon, dans le second, la 2e plus forte teneur est issue du 3e échantillon. Dans le premier cas, il y a $3 \times A_7^2 = 126$ possibilités. Dans la seconde situation, il y a $1 \times 7 \times 21 = 147$ possibilités. Donc Card$(F) = 126 + 147 = 273$.

Exercice 19 *Correction* :

1. Le nombre de nombres à trois chiffres est égal à $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$. En effet, le tirage peut être assimilé à un tirage successif avec remise.
2. - Soit l'événement A : "les trois chiffres du nombre sont égaux". Card$(A) = 6$.
   - Soit l'événement B : "les trois chiffres du nombre sont différents". Card$(B) = 6 \times 5 \times 4 = A_6^3 = 120$.
   - Soit l'événement C : "deux des trois chiffres au moins sont égaux". Son complémentaire est défini par l'ensemble $\overline{C}$: "les trois nombres sont différents" et Card$(\overline{C}) = 120$. On en déduit par conséquent que Card$(C) = 216 -$ Card$(\overline{C}) = 216 - 120 = 96$.
   - Soit l'événement D : "le nombre formé est pair". Card$(D) = 6 \times 6 \times 3 = 108$.
   - Soit l'événement A : "le nombre formé commence par un 3". Card$(E) = 6 \times 6$.
   - Soit l'événement A : "le nombre formé est divisible par 9". On rappelle qu'un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 9. Dans ce cas, $F = \{(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,3,4),(6,6,6),(5,2,2),\ldots\}$ et Card$(F) = 25$.

Exercice 20 *Correction* :

1. $n = 5! = 120$ (5 choix pour la première ville, 4 pour la deuxième et ainsi de suite).
2. La première ville étant déterminée, il reste $n = 4! = 24$ circuits possibles.
3. La première ville étant déterminée, il y a 3 choix pour la deuxième car la dernière ville à traverser est connue, puis deux choix pour la troisième et aucun pour la troisème. Il y a donc $3! = 6$ circuits possibles.

Exercice 21 *Correction* :

1. $A_n^3 = 210n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 210n \Leftrightarrow n(n^2 - 3n + 2) = 210n \Leftrightarrow n(n^2 - 3n - 208) = 0$. Les solutions de l'équation sont $n_1 = 0$, $n_2 = 16$ et $n_3 = -13$. Donc $n = 16$ est l'unique solution du problème.
2. $C_n^2 = 6 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 6 \Leftrightarrow n(n-1) = 12 \Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0$. Le trinôme s'annule pour $n_1 = 4$ et $n_2 = -3$. Donc $n = 4$ est l'unique solution du problème.
3. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)}{2!} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 5n \Leftrightarrow n^3 + 5n = 30n \Leftrightarrow n(n-5)(n+5) = 0$. Donc $n = 5$ est l'unique solution du problème.

Exercice 22 *Correction* :

1. $n = 2^{20}$.
2. $n = 2^{15}$ car 5 issues sur 20 sont connues.