MESURES ET ANALYSES STATISTIQUES DE DONNÉES

Probabilités

Master Génie des Systèmes Industriels, mentions ACCIE et RIM

Université du Littoral - Côte d'Opale, La Citadelle

Laurent SMOCH

(smoch@lmpa.univ-littoral.fr)

Septembre 2012

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville
Université du Littoral, zone universitaire de la Mi-Voix, bâtiment H. Poincarré
50, rue F. Buisson, BP 699, F-62228 Calais cedex

Table des matières

Chapitre 1

Le dénombrement

1.1 Notations

1.1.1 Préliminaires

- Soit E un ensemble fini, le **cardinal** de E, noté $Card(E)$ ou $|E|$, désigne le nombre de ses éléments.
- $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des **parties** de E (y compris l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide noté $\emptyset$).
  Exemple 1.1.1 Si on se donne $E = \{0, 1, 2\}$, l'ensemble des parties de E est donné par
  $$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0, 1\}; \{0, 2\}; \{1, 2\}; E\}$$
- Soient A et B deux parties de E alors
  - $\boxed{A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}}$ définit l'**intersection** de A et de B,
  - $\boxed{A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}}$ définit la **réunion** de A et de B,
  - $\boxed{\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}}$ définit le **complémentaire** de A dans E,
  - $\boxed{A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}}$ définit "A privé de B" (on écrit également A/B),
  - $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ définit la **différence symétrique** de A et de B.
    On a par conséquent $\boxed{A \triangle B = \{x \in E / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\}}$.

  Exemple 1.1.2 Si on se donne les ensembles $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ alors
  - $A \cap B = \{2\}$,
  - $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
  - $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$,
  - $\overline{B} = \{0, 1, 5, 6\}$,
  - $A - B = A \cap \overline{B} = \{0, 1\}$,
  - $B - A = B \cap \overline{A} = \{3, 4\}$,
  - $A \triangle B = \{0, 1, 3, 4\}$.

1.1.2 Ensemble produit

Soient deux ensembles finis E et F.

1. On appelle **ensemble produit** ou **produit cartésien** de E par F, l'ensemble noté
   $$\boxed{E \times F = \{(x, y) / x \in E,\ y \in F\}}$$
   Exemple 1.1.3 Soient les ensembles $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \{a, b\}$. On a alors
   $$E \times F = \{(0, a); (0, b); (1, a); (1, b); (2, a); (2, b)\}.$$

2. E^2 est le produit cartésien de E.

$$\boxed{E^2 = \{(x,y)/x \in E,\ y \in E\}}$$

Dans l'exemple précédent, on a $E^2 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$ et $F^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

3. On peut généraliser la définition du produit cartésien. Soient p ensembles finis E_1,E_2,...,E_p alors

$$\boxed{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1,x_2,\ldots,x_p)/x_1 \in E_1, x_2 \in E_2,\ldots,x_p \in E_p\}}$$

1.1.3 Notation factorielle

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$), on définit $\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}$ qui se lit “factorielle n”.

Exemple 1.1.4 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Par convention, on pose $\boxed{0! = 1}$.

Exercice 1 Simplifiez $a = \dfrac{n!}{(n-1)!}$ $n \in \mathbb{N}^*$, $b = \dfrac{n!}{(n-2)!}$ avec $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$.

Exercice 2 Écrire à l'aide de deux factorielles le produit $5 \times 6 \times 7 \times 8$.

1.2 Le dénombrement

1.2.1 Ensemble produit

1. Soient deux ensembles finis E et F de cardinaux respectifs n et p. Le cardinal du produit cartésien de E par F est donné par

$$\boxed{\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)}$$

En effet, $E \times F = \{(x,y)/x \in E, y \in F\}$. Comme x et y peuvent prendre respectivement n et p valeurs, il y a $n \times p$ couples (x,y) possibles.

Exemple 1.2.1 Soient les ensembles $E = \{0,1,2\}$ et $F = \{a,b\}$. On a $\mathrm{Card}(E \times F) = 3 \times 2 = 6$.

2. Lorsque $F = E$,

$$\boxed{\mathrm{Card}(E^2) = \mathrm{Card}(E \times E) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(E) = (\mathrm{Card}(E))^2}$$

Exemple 1.2.2 Dans l'exemple précédent, on a $\mathrm{Card}(E^2) = 3^2 = 9$ et $\mathrm{Card}(F^2) = 2^2 = 4$.

3. On peut généraliser la définition du cardinal. Soient p ensembles finis E_1,E_2,...,E_p alors

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_p)}$$

1.2.2 Nombre d'applications d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n

1. Le nombre d'applications de E dans F est

$$\boxed{n^p = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}}$$

Exemple 1.2.3 Soient $E = \{0,1\}$ et $F = \{a,b,c\}$. Le nombre d'applications de E dans F est $3^2 = 9$.

– Considérons une application de E dans F, représentée par la Figure 1.1. Cette application est caractérisée par le couple (a,a) avec la convention “0 a pour image a” et “1 a pour image a”.
– Considérons maintenant une nouvelle application, représentée par la Figure 1.2. Cette application est caractérisée par le couple (a,c) tel que $\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \to & a \\ 1 & \to & c \end{array}\right.$.

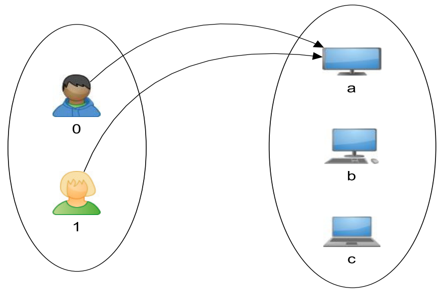

FIGURE 1.1

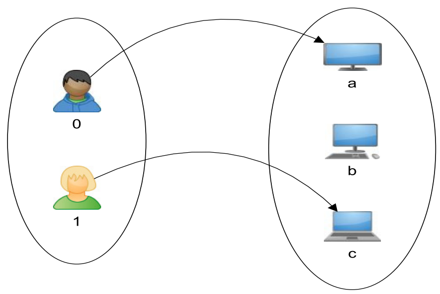

FIGURE 1.2

– Les neuf applications de E dans F sont donc caractérisées par les 9 couples (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c) et (c, b). Un couple (x, y) caractérise l'application
$$0 \to x$$
$$1 \to y$$
x et y pouvant prendre les valeurs a, b, c.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Soit un ensemble de 5 éprouvettes que l'on veut répartir dans trois rangements. Chaque rangement pouvant contenir $0, 1$ ou plusieurs éprouvettes, quel est le nombre de répartitions distinctes ?

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ À l'intérieur d'un laboratoire, un numéro de téléphone fixe est composé d'un indicatif (2 numéros) et d'une suite ordonnée de 8 numéros. Pour un indicatif donné, combien y a-t-il de numéros possibles ?

2. p-listes ordonnées avec remise
Soit un ensemble $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de cardinal n. On appelle **p-liste** d'éléments de F, une liste ordonnée de p éléments de F (appelée encore p-uplet) de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, les x_i étant deux éléments *distincts ou non* de F. Ces p-uplets sont au nombre de n^p puisqu'il y a n choix possibles pour les p éléments.

Exemple 1.2.4 Soit $F = \{e_1, e_2, e_3\}$.
– Les 2-listes ordonnées avec remise (ce qui signifie que les éléments peuvent se répéter) ou 2-uplets sont au nombre de $3^2 = 9$ c'est-à-dire qu'il existe 9 couples (x, y) formés par deux éléments distincts ou non de F. Ces éléments sont (e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_1), (e_1, e_3), (e_3, e_1), (e_2, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_2), (e_3, e_3).
– Les 3-listes ordonnées avec remise (ou 3-uplets, ou triplets) sont au nombre de $3^3 = 27$, on peut citer entre-autres (e_1, e_1, e_1), (e_2, e_1, e_3), (e_3, e_2, e_3).

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Combien peut-on former de sigles d'entreprises de deux lettres ? de trois lettres ? de quatre lettres ?

Exercice 6 On extrait à l'aveugle 3 pièces métalliques d'un conteneur qui en compte 9 : 4 pièces de type A, 3 pièces de type B, 1 pièce de type C et 1 pièce de type D. Combien y a-t-il de résultats permettant d'obtenir successivement avec remise

(a) 3 pièces de type A ?

(b) aucune pièce de type B ?

(c) 3 pièces de type C ?

(d) dans cet ordre : 2 pièces de type A et 1 pièce de type B ?

(e) 2 pièces de type A et 1 pièce de type B ?

(f) 1 pièce de type A, 1 pièce de type B et 1 pièce de type C ?

1.2.3 Parties d'un ensemble et cardinaux

1. Le nombre de parties d'un ensemble E de cardinal n est 2^n.

$$\boxed{\mathrm{Card}(E) = n \Rightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.}$$

Exemple 1.2.5 On a vu dans un exemple précédent que $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0,1\}; \{0,2\}; \{1,2\}; E\}$ si $E = \{0,1,2\}$, ce qui confirme bien que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.

2. Si A et B sont deux parties de E,

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)}$$

Exercice 7 Parmi les 20 employés d'une entreprise, 8 connaissent l'anglais, 5 l'allemand, 3 les deux langues. Dénombrez ceux qui connaissent au moins une langue.

3. Le complémentaire d'une partie A de E est défini par

$$\boxed{\overline{A} = \complement_E^A \text{ avec } \mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)}\,.$$

Exemple 1.2.6 Soient $E = \{0,1,2,3,4\}$ et $A = \{2,4\}$ alors $\overline{A} = \{0,1,3\}$ et $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 5 - 2 = 3$.

Exercice 8 Un sondage d'opinion, relatif à l'ambiance d'un cours de "Mesures et analyses statistiques de données", a été réalisé parmi 83 étudiants de Master 1 GSI en 2012 et donne les résultats suivants :

	Très satisfaits	Assez satisfaits	Assez déçus	Très déçus
Filles de moins de 23 ans	9	6	2	2
Filles de 23 ans et plus	7	9	4	2
Garçons de moins de 23 ans	6	6	4	3
Garçons de 23 ans et plus	2	4	6	11

On pose : F les femmes, P les étudiants de 23 ans et plus, D les étudiants assez déçus ou très déçus, A les étudiants assez déçus ou assez satisfaits. On note $\overline{F}$, $\overline{A}$, $\overline{D}$ les ensembles complémentaires de F, A et D. Déterminez le nombre d'éléments des ensembles suivants en précisant ce qu'il représente :

(a) F, $\overline{P}$, $\overline{D}$ et A,

(b) $F \cap \overline{P} \cap D \cap A$,

(c) $(F \cap D) \cup (P \cap A)$,

(d) $\overline{F} \cap (P \cap \overline{D} \cap \overline{A})$.

1.2.4 Arrangements

1. Soient un ensemble F de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle **arrangement, d'ordre p, des éléments de F**, un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ où les éléments x_i sont des éléments distincts de F.

   Déterminons le nombre d'arrangements d'ordre p, noté A_n^p :
   - si $p > n$: $A_n^p = 0$
   - si $p \leq n$: pour x_1, il y a n choix possibles. x_1 étant choisi, il y a $n-1$ choix possibles pour x_2 et ainsi de suite. Enfin, $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ étant choisis, il reste $n-(p-1) = n-p+1$ choix possibles pour x_p. Le nombre d'arrangements d'ordre p est donc

     $$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}$$

     Cette égalité peut se réécrire $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \times \dfrac{(n-p)(n-p-1)\ldots 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots 2\times 1}$, ce qui signifie que

     $$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

2. Cas particuliers : Avec la convention $0! = 1$ le résultat précédent implique

   $$\boxed{A_n^0 = 1} \text{ et } \boxed{A_n^n = 1}$$

Exercice 9 L'équipe de direction d'un laboratoire de chimie de 20 membres est constituée d'un directeur, d'un directeur technique et d'un directeur Recherche et Développement. Combien d'équipes de direction peut-on constituer, sachant qu'une même personne ne peut cumuler les postes ?

Exercice 10 Soit le mot $FIABILITE$. À l'aide de ce mot, combien d'anagrammes et combien de mots - au sens large - de 5 lettres distinctes peut-on former ?

1.2.5 Permutations

1. On appelle **permutation** d'un ensemble F de cardinal n, un arrangement d'ordre n de F. Le nombre de ces permutations est donné par $P_n = A_n^n = n!$.
2. Permutation avec répétition

   Exemple 1.2.7 Déterminons le nombre d'anagrammes du mot $FINI$.
   Si on considère les deux I comme différents, I_1 et I_2, les 4 lettres de FI_1NI_2 étant distinctes, il existe $4! = 24$ anagrammes. Dans ces 24 mots, les mots FI_1NI_2 et FI_2NI_1 apparaissent. Chaque mot est comptabilisé deux fois. Le nombre d'anagrammes de $FINI$ est donc $\dfrac{4!}{2!} = 12$.

   Exemple 1.2.8 Déterminons le nombre d'anagrammes du mot $ENSEMBLE$.
   Si on numérote les trois E, on obtient $E_1NSE_2MBLE_3$. Les huit lettres étant distinctes, il existe $8!$ anagrammes de $E_1NSE_2MBLE_3$. Dans ces $8!$ mots, le mot $ENSEMBLE$ apparaît $3! = 6$ fois, chaque mot est donc comptabilisé $3!$ fois. Le nombre d'anagrammes de $ENSEMBLE$ est donc $\dfrac{8!}{3!}$.

   Exemple 1.2.9 Déterminons le nombre d'anagrammes du mot $MATHEMATIQUES$.
   En procédant comme précédemment, on obtient $\dfrac{13!}{2!2!2!2!}$ anagrammes.

3. Cas général
   Soit une famille E de cardinal n, définie par $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, la lettre a_1 étant répétée r_1 fois, la lettre a_2 r_2 fois, la lettre a_k r_k fois avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Le nombre de permutations est alors

$$\boxed{\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$$

Exercice 11 Supposons qu'un protocole d'expérimentation soit constitué de 10 étapes.

(a) Si on considère que toutes les étapes sont différentes, combien de protocoles distincts peut-on réaliser ?

(b) Si 4 et 6 de ces étapes sont identiques, combien de protocoles distincts peut-on obtenir ?

1.2.6 Combinaisons

1. Soit un ensemble F ayant n éléments distincts. On appelle **combinaison d'ordre p de F** toute partie à p éléments ($0 \leq p \leq n$).

   Remarque 1.2.1 Deux combinaisons distinctes d'ordre p diffèrent par la nature de leurs éléments et non pas par l'ordre.

   Exemple 1.2.10 Soit $F = \{a, b, c, d\}$. Les combinaisons d'ordre 3 de F sont $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

   Exemple 1.2.11 Avec les éléments a, b, c, on peut constituer
   - une combinaison de 3 éléments : $\{a, b, c\}$,
   - six arrangements de 3 éléments : (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) et (c, b, a).

   Le nombre de combinaisons d'ordre p est noté C_n^p ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et est défini par

   $$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}}$$

   Les C_n^p sont encore appelés **coefficients binomiaux**.

Exercice 12 Un support de tubes à essais contient 2 tubes de 20 mL, 4 tubes de 10 mL, 4 tubes de 5 mL et 6 tubes de 2 mL. On prend au hasard 5 tubes sur le support. De combien de façons différentes peut-on obtenir un total de 40 mL ?

2. Propriétés des nombres C_n^p
   - On a le résultat

     $$\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}} \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } 0 \leq p \leq n.$$

     En particulier, $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
   - On a également

     $$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } 1 \leq p \leq n.$$

3. Binôme de Newton
   On a la formule

   $$\boxed{(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p}} \quad \text{pour } n \geq 0.$$

   Exemple 1.2.12
   $$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C_5^0x^0y^5 + C_5^1x^1y^4 + C_5^2x^2y^3 + C_5^3x^3y^2 + C_5^4x^4y^1 + C_5^5x^5y^0 \\ &= y^5 + 5y^4x + 10y^3x^2 + 10y^2x^3 + 5yx^4 + x^5\end{aligned}.$$

Exercice 13 Développez à l'aide de la formule du binôme les expressions suivantes où a est un nombre réel quelconque

(a) $E = (a+1)^4$

(b) $F = (a-3)^5$

4. **Le triangle de Pascal**
   Ce triangle permet par simple addition de récupérer les coefficients C_n^p à partir des C_{n-1}^p.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$p-1$	p
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$		
$n-1$								C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n									C_n^p

1.2.7 Combinaisons avec répétition

Soit un ensemble F de cardinal n. On nomme **combinaison d'ordre p, avec répétition des éléments de** E, une liste de p éléments tous extraits de E, les répétitions étant autorisées mais l'ordre dans la liste n'intervient pas.

Le nombre de combinaisons avec répétition, d'ordre p, est noté

$$\boxed{\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p = C_{n+p-1}^{n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$$

Exemple 1.2.13 5 clients vous commandent 5 composants électroniques parmi les 8 que vous fabriquez. Quel est le nombre de commandes globales distinctes dans les cas suivants ?

- Les composants sont tous différents : $C_8^5 = \dfrac{8!}{5!3!} = 56$.
- Les composants sont tous quelconques : $C_{8+5-1}^5 = C_{12}^5 = 792$.

1.2.8 Modèle fondamental : schéma d'urne

Il est très pratique dans les exercices de considérer l'ensemble E impliqué comme une **urne** contenant n boules numérotées de 1 à n, chacune des boules s'interprétant comme un élément de E, et de laquelle on tire p boules. On aura très souvent les cas suivants :

- *Tirages successifs avec remise* : On tire au hasard une boule dans l'urne puis on la remet dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant. Si on effectue ainsi p tirages avec remise, le résultat global s'interprète comme une p-liste. Il y a donc n^p tirages avec remise (de p éléments) possibles.
- *Tirages successifs et sans remise* : On tire au hasard une boule dans l'urne que l'on conserve, la boule n'est donc pas remise dans l'urne qui contient ainsi après chaque tirage une boule de moins. Si on effectue ainsi p tirages sans remise ($p \leq n$), le résultat global s'interprète comme une p-liste d'éléments 2 à 2 distincts ou encore comme un arrangement de p éléments de E. Il y a donc A_n^p tirages sans remise (de p éléments) possibles.
- *Tirages simultanés* : On tire simultanément p boules de l'urne (et non plus successivement, cela revient à dire que l'ordre du tirage des boules est sans importance). Un tel tirage s'interprète comme un sous-ensemble de E et donc comme une combinaison de p éléments de E. Il y a donc C_n^p tirages simultanés (de p éléments) possibles.

1.3 Exercices

Exercice 14 Soit Ω un ensemble. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses parties.

1. Considérons l'ensemble $\Omega_1 = \{1\}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_1)$.
2. Considérons l'ensemble $\Omega_2 = \{1, 2\}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_2)$.
3. Considérons l'ensemble $\Omega_3 = \{1, 2, 3\}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_3)$.

Exercice 15 Une classe de Master 1 se compose de 20 garçons et 8 filles.

1. De combien de façons peut-on désigner trois garçons pour tenir les rôles des 3 premiers de la promotion ?
2. De combien de façons peut-on désigner trois garçons et deux filles pour tenir les 5 premiers rôles de la promotion ?

Exercice 16 Afin de tester leur résistance, 4 appareils électriques d'un même type sont mis et laissés en fonctionnement pendant un laps de temps conséquent. Chaque appareil peut subir une défaillance complète (appelée défaillance catalectique, un court-circuit en est un exemple), une défaillance partielle n'entraînant pas d'arrêt, ou aucune défaillance.

1. De combien de manières dictinctes les 4 appareils peuvent-ils se comporter ?
2. Parmi toutes les réponses possibles, quelles sont celles qui imposeront de revoir la fabrication des appareils, c'est-à-dire 3 "défaillances catalectiques" ou plus ?

Exercice 17 Un programme informatique génère de manière aléatoire des nombres compris entre 1 à 20. On lance le programme.

1. Calculez les cardinaux des événements suivants :
   A : "obtenir un nombre pair",
   B : "obtenir un nombre impair",
   C : "obtenir un nombre divisible par 3",
   D : "obtenir un nombre au moins égal à 2".
2. Déterminez $B \cap C$ et en déduire $\text{Card}(B \cup C)$.

Exercice 18 Les 8 analytes (de type I ou II) de 4 échantillons différents ont été soumis à une spectrophotométrie d'absorption atomique permettant de mesurer leur teneur en plomb. On suppose que les 32 mesures sont distinctes, elles sont ensuite ordonnées au sein de leur échantillon, de la plus grande teneur à la plus petite (par exemple, $T_{2,4}$ désigne la 2e plus forte teneur en plomb d'un analyte provenant de l'échantillon 4). On récupère alors 3 mesures au hasard.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Calculez les cardinaux des événements suivants :
   A : "une seule 2e plus forte teneur en plomb",
   B : "une seule 2e plus forte teneur en plomb provenant de l'échantillon 1 ou 2",
   C : "uniquement les 3e plus fortes teneurs en plomb",
   D : "au moins une plus forte teneur en plomb",
   E : "une 4e plus forte teneur en plomb et une 3e plus forte teneur provenant de l'échantillon 3 ou 4",
   F : "une seule 2e plus forte teneur en plomb et deux teneurs provenant du 3e échantillon".

Exercice 19 3 lots P_1, P_2, P_3 de Streptomycine ont été titrés par dosage au maltol. Les résultats sont classés dans 6 intervalles numérotés de 1 à 6. On note la classe d'appartenance de chacun des lots P_1, P_2, P_3 dans cet ordre et on forme un nombre de 3 chiffres, P_1 indiquant le chiffre des centaines, P_2 celui des dizaines et P_3 celui des unités.

1. Combien y a-t-il de nombres possibles ?
2. Calculez les cardinaux des événements suivants :
   A : “les trois chiffres du nombre sont égaux”,
   B : “les trois chiffres du nombre sont différents”,
   C : “deux des trois chiffres au moins sont égaux”,
   D : “le nombre formé est pair”,
   E : “le nombre formé commence par 3”,
   F : “le nombre formé est divisible par 9”.

Exercice 20 Un consultant en maintenance industrielle doit visiter 5 entreprises dans les villes suivantes : Arras, Boulogne, Cherbourg, Digne et Epernay.

1. Combien de circuits différents peut-il réaliser ?
2. Il commence son voyage par Arras. Combien de circuits différents peut-il réaliser ?
3. Il commence son voyage par Arras et doit terminer par Epernay. Combien de circuits différents peut-il réaliser ?

Exercice 21 Résoudre dans l’ensemble des entiers naturels les équations suivantes :

1. $A_n^3 = 210n$
2. $C_n^2 = 6$
3. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$

Exercice 22 On effectue 20 fois une même expérience qui n’a que deux issues possibles : soit elle réussit, soit elle échoue.

1. Combien y a-t-il de suites d’observations des réussites et échecs ?
2. Combien y a -t-il de suites d’observations comptant 5 réussites ?