CORRECTION Exercices Chapitre 2 - La probabilité.

Exercice 23 *Correction* : Soit x le nombre de filles en seconde année. On a les événements et probabilités suivants :

- $G =$"être un garçon" et $p(G) = \dfrac{10}{16+x}$,
- $F =$"être une fille" et $p(F) = \dfrac{6+x}{16+x}$,
- $A_1 =$"être en première année" et $p(A_1) = \dfrac{10}{16+x}$,
- $A_2 =$"être en seconde année" et $p(A_2) = \dfrac{10}{16+x}$,
- $G/A_1 =$"être un garçon sachant que l'élève est en première année" et $p(G/A_1) = \dfrac{4}{10}$,
- $F/A_1 =$"être une fille sachant que l'élève est en première année" et $p(F/A_1) = \dfrac{6}{10}$,
- $G/A_2 =$"être un garçon sachant que l'élève est en seconde année" et $p(G/A_2) = \dfrac{6}{6+x}$,
- $F/A_2 =$"être une fille sachant que l'élève est en seconde année" et $p(F/A_2) = \dfrac{x}{6+x}$.

Il s'agit de trouver le nombre de filles de seconde année x tel que les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(G\cap A_1) &=& p(G)\times p(A_1)\ (1)\\ p(G\cap A_2) &=& p(G)\times p(A_2)\ (2)\\ p(F\cap A_1) &=& p(F)\times p(A_1)\ (3)\\ p(F\cap A_2) &=& p(F)\times p(A_2)\ (4)\end{array}\right.$$

Intéressons-nous à la première équation. On a tout d'abord $p(G\cap A_1) = P(G/A_1)P(A_1) = \dfrac{4}{10}\times\dfrac{10}{16+x} = \dfrac{4}{16+x}$ et donc $(1) \Leftrightarrow \dfrac{4}{16+x} = \dfrac{10}{16+x}\times\dfrac{10}{16+x} \Leftrightarrow x = 9$. On vérifiera sans mal que $x = 9$ est bien solution de (2),(3) et (4). Conclusion, il faut 9 filles en seconde année pour que "sexe" et "année" soient des facteurs indépendants.

Exercice 24 *Correction* : Il faut déterminer $p(M/T)$ et on utilise pour cela la formule de Bayes :

$$p(M/T) = \frac{p(M)\times p(T/M)}{p(M)\times p(T/M) + p(\overline{M})\times p(T/\overline{M})}$$

On a les implications $p(M) = 0,01 \Rightarrow p(\overline{M}) = 0,99$ et $p(\overline{T}/\overline{M}) = 0,95 \Rightarrow p(T/\overline{M}) = 0,05$, on en déduit alors que

$$p(M/T) = \frac{0,01\times 0,95}{0,01\times 0,95 + 0,99\times 0,05} = \frac{95}{590} = \frac{19}{118} \simeq 0,161.$$

Explication : Supposons que l'enquête soit faite sur 10000 personnes dont 1% est malade, soit 100 personnes. Un malade a un test positif avec une probabilité de $0,95$, par conséquent $100\times 0,95 = 95$ personnes ont eu un test positif. Un non-malade a un test négatif avec une probabilité de $0,95$ donc $9900\times 0,95 = 9405$ personnes non-malades ont eu un test négatif. Sur les 10000 personnes, $495 + 95 = 590$ ont eu un test positif donc $p(M/T) = \dfrac{95}{590}$.

Exercice 25 *Correction* : On tire un boulon au hasard dans une boîte en contenant 100 donc Ω, l'univers constitué des événements élémentaires représentant les résultats possibles de l'expérience aléatoire, est de cardinal 100. On suppose que les boulons sont indiscernables au toucher, il y a donc équiprobabilité des tirages. Soit X la variable aléatoire décrivant la longueur d'un boulon.

1. Si A est l'événement : "Le boulon mesure moins de $4,2$ cm",
$$p(A) = p(X < 4,2) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{17}{100} = 0,17.$$
2. Si B est l'événement : "Le boulon mesure plus de $4,4$ cm",
$$p(B) = p(X \geq 4,4) = \frac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{59}{100} = 0,59.$$

3. Si C est l'événement : "Le boulon est utilisable",

$$p(C) = p(4,2 \leq X < 4,6) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Exercice 26 *Correction* :

1. On obtient le tableau ci-dessous :

	Nombre de puces défectueuses	Nombre de puces non défectueuses	Total
Nombre de puces produites par l'atelier A	20	980	1000
Nombre de puces produites par l'atelier B	24	776	800
Total	44	1756	1800

2. On récupère à l'aide du tableau les données suivantes :
   (a) $p(D) = \frac{44}{1800}$, $p(A \cap D) = \frac{20}{1800}$, $p(A/D) = \frac{20}{44}$.
   (b) $p(\overline{D}) = \frac{1756}{1800}$, $p(B \cap \overline{D}) = \frac{776}{1800}$, $p(B/\overline{D}) = \frac{776}{1756}$.
3. On a $p(A \cap D) = \frac{20}{1800}$ et $p(A/D) \times p(D) = \frac{20}{44} \times \frac{44}{1800} = \frac{20}{1800}$ donc
   $$p(A \cap D) = p(A/D) \times p(D).$$
   On vérifie de même que $p(B \cap \overline{D}) = p(B/\overline{D}) \times p(\overline{D})$.

Exercice 27 *Correction* : On définit pour chaque pièce les événements suivants :
D : "la pièce est défectueuse",
B : "la pièce est non défectueuse",
A : "la pièce est acceptée",
R : "la pièce est refusée".
On a les probabilités suivantes : $p(D) = 0,03$, $p(B) = 0,97$, $p(R/D) = 0,98$, $p(A/B) = 0,96$, $p(A/D) = 0,02$ et $p(R/B) = 0,04$. On a par conséquent

$p_0 = p(D \cap A) = p(A/D)p(D) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006.$

On a ensuite $p_1 = p(D \cap A) + p(B \cap R)$ où les événements $D \cap A$ et $B \cap R$ induisent une erreur de contrôle. Comme $p(D \cap A) = 0,0006$ et $p(B \cap R) = p(R/B)p(B) = 0,04 \times 0,97 = 0,0388$, on a

$p_1 = 0,0006 + 0,0388 = 0,0394,$

$p_2 = p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap B) = 0,0006 + p(A/B)p(B) = 0,0006 + 0,96 \times 0,97 = 0,9318,$

$p_3 = p(D/A) = \frac{p(A \cap D)}{p(A)} = \frac{0,0006}{0,9318} \simeq 0,00064.$

Exercice 28 *Correction* :

1. Ici le hasard intervient à deux niveaux, le choix de la machine et la conformité de la pièce. $\{M_A, M_B, M_C\}$ forme un système complet d'événements où M_A (respectivement M_B et M_C) est l'événement "la pièce est fabriquée par A (respectivement par B et C)". Si T est l'événement "la pièce est défectueuse", on a l'égalité $p(T) = p(T \cap M_A) + p(T \cap M_B) + p(T \cap M_C) = p(T/M_A)p(M_A) + p(T/M_B)p(M_B) + p(T/M_C)p(M_C) = 0,02 \times 0,6 + 0,03 \times 0,3 + 0,04 \times 0,1 = 0,025$.
2. On cherche la probabilité de l'événement B/T. On connaît $p(T/B)$ donc $p(B/T) = \frac{p(B \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T/B)p(B)}{p(T)} = \frac{0,03 \times 0,3}{0,025} = 0,36$.

Exercice 29 *Correction* : *Correction* : On peut assimiler l'expérience aléatoire à un tirage successif avec remise. $\Omega = \{(a, b, c, d), a, b, c, d \in \{G, F\}\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 2^4 = 16$.

$p(A) = \frac{1}{16}$,

$p(B) = C_4^1 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$,
$p(C) = C_4^2 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,
$p(D) = \frac{1}{16}$,
$p(E) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ (on a considéré l'événement complémentaire $\overline{E} = D$: "Monsieur et Madame A n'ont pas de fille),
$p(F) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ (on a considéré l'événement complémentaire $\overline{F}$: "Monsieur et Madame A n'ont pas de fille ou pas de garçon - Formule de Morgan).

Exercice 30 *Correction* :

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}$,
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,
- $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
- $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A})p(B)$ si $\overline{A}$ et B sont deux événements indépendants. Dans ce cas, $p(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Si les deux événements ne sont pas indépendants, on n'a pas de résultat.
- $p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(\overline{A} \cap B)$. Si les deux événements $\overline{A}$ et B sont indépendants, $p(\overline{A} \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Si les deux événements ne sont pas indépendants, on n'a pas de résultat.
- $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$.

Exercice 31 *Correction* : Soit Ω l'univers constitué des tirages simultanés de 2 boules dans l'urne qui en contient 5. On a $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = 10$. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher, le tirage est donc équiprobable.

1. L'événement A peut se réaliser de deux manières différentes : les deux boules tirées sont rouges (événement A_1) ou elles sont noires (événement A_2). Les deux événements étant incompatibles, $p(A) = p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2)$. Comme $p(A_1) = \frac{\text{Card}(A_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ et $p(A_2) = \frac{\text{Card}(A_2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, on en déduit $p(A) = \frac{4}{10}$.
2. L'événement B peut se réaliser de 4 manières différentes et élémentaires (chacune ayant la probabilité $\frac{1}{10}$ de se produire) : on en déduit $p(B) = \frac{4}{10}$.

(3. $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$ or $B \cap A = \{\{R_1, R_2\}, \{N_1, N_2\}\}$ donc, $p(B/A) = \frac{2/10}{4/10} = \frac{1}{2}$.)

Exercice 32 *Correction* : Soient les événements suivants :
A : "obtenir un résultat impair ou tirer une boule de A",
B : "obtenir le '2' ou le '4' ou tirer une boule de B",
C : "obtenir le '6' ou tirer une boule de C",
Bl : "la boule tirée est bleue".

On a les probabilités $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ et $p(C) = \frac{1}{6}$. On ne peut pas déterminer $p(Bl)$ immédiatement car il n'y a pas équiprobabilité pour chacune des urnes. On fait donc intervenir la notion d'urne. On cherche $p(C/Bl)$. On a $p(C/Bl) = \frac{p(C \cap Bl)}{p(Bl)}$ et on sait que $Bl = (Bl \cap A) \cup (Bl \cap B) \cup (Bl \cap C)$. En effet, A, B et C forment un système complet d'événements (c'est-à-dire une partition). Ainsi $p(Bl) = p(Bl \cap A) + p(Bl \cap B) + p(Bl \cap C) = p(Bl/A)p(B) + p(Bl/B)p(B) + p(Bl/C)p(C)$. On connaît de plus $p(Bl/A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p(Bl/B) = \frac{6}{11}$ et $p(Bl/C) = \frac{9}{10}$. Par conséquent,

$$p(Bl) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{6}{11} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{10} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{329}{660} \text{ et finalement, } p(Bl/C) = \frac{\frac{99}{660}}{\frac{329}{660}} = \frac{99}{329} \simeq 0,30.$$

Exercice 33 *Correction* :

1. Le nombre de groupes de 3 cartes parmi les 52 est $N = C_{52}^3 = \frac{52 \times 51 \times 50}{3!} = 22100$.

2. On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages.
   - Si le roi de coeur est tiré avec les 2 autres cartes, $p(A) = \dfrac{C_1^1 \times C_{51}^2}{22100} = \dfrac{1275}{22100}$.
   - Si un roi est tiré ainsi que 2 autres cartes qui ne sont pas des rois, $p(B) = \dfrac{C_4^1 \times C_{48}^2}{C_{52}^3} = \dfrac{4512}{22100}$.
   - Si un coeur est tiré ainsi que 2 autres cartes qui ne sont pas des coeurs, $p(C) = \dfrac{C_{13}^1 \times C_{39}^2}{C_{52}^3} = \dfrac{9633}{22100}$.
   - Si le roi de coeur est tiré ainsi qu'un autre coeur et une carte qui n'est pas un coeur, on obtient $p(D) = \dfrac{C_1^1 \times C_{12}^1 \times C_{39}^1}{C_{52}^3} = \dfrac{468}{22100}$.
   - On peut utiliser deux méthodes :
     - On a exactement un coeur, deux coeurs ou trois coeurs.
       Le nombre de tirages contenant exactement un coeur est $N_1 = C_{13}^1 \times C_{39}^2 = 9633$.
       Le nombre de tirages contenant exactement deux coeurs est $N_2 = C_{13}^2 \times C_{39}^1 = 3042$.
       Le nombre de tirages contenant exactement trois coeurs est $N_3 = C_{13}^3 = 286$.
       Ces événements sont disjoints donc le nombre total de tirages est la somme des cardinaux de chacun des événements soit $N = 9633 + 3042 + 286 = 12961$ ce qui donne finalement $p(E) = \dfrac{12961}{22100}$.
     - Utilisons l'événement complémentaire c'est-à-dire l'événement "n'obtenir aucun coeur parmi les trois cartes". Le cardinal de cet événement est $C_{39}^3 = 9139$ donc $p(E) = \dfrac{C_{52}^3 - C_{39}^3}{22100} = \dfrac{22100 - 9139}{22100} = \dfrac{12961}{22100}$.

   - Attention, dans le cas de l'événement F, on est en présence de deux cas disjoints pour une même formulation :
     - si le roi est le roi de coeur, on a alors le roi de coeur, un autre coeur et une autre carte qui n'est ni un roi ni un coeur d'où le nombre de cas $N_1 = C_1^1 \times C_{12}^1 \times C_{36}^1 = 432$.
     - si le roi n'est pas le roi de coeur, il y a alors un roi qui n'est pas de coeur et deux coeurs d'où le nombre de cas $N_2 = C_3^1 \times C_{12}^2 = 198$.

     Finalement, la probabilité recherchée est donnée par $p(F) = \dfrac{N_1 + N_2}{22100} = \dfrac{432 + 198}{22100} = \dfrac{630}{22100}$.

Exercice 34 *Correction* : On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Tirages successifs avec remise. Au total, il y a à chaque tirage 9 possibilités donc $N = 9^3 = 729$.
   - Dans le sac, 4 boules sont vertes donc $p(A) = \dfrac{4^3}{9^3} = \dfrac{64}{729}$.
   - On a 6 boules qui ne sont pas rouges donc $p(B) = \dfrac{6^3}{729} = \dfrac{216}{729}$.
   - On a 1 boule blanche donc $p(C) = \dfrac{1^3}{729} = \dfrac{1}{729}$.
   - Soit N le nombre de tirages favorables à l'événement considéré.
     $vvr \to N = 4 \times 4 \times 3 = 48$ donc $p(D) = \dfrac{48}{729}$.
   - $1^{ère}$ *méthode* : $\left\{\begin{array}{l} vvr \to 4 \times 4 \times 3 = 48 \\ vrv \to 4 \times 3 \times 4 = 48 \\ rvv \to 3 \times 4 \times 4 = 48 \end{array}\right.$ donc $p(E) = \dfrac{3 \times 48}{729} = \dfrac{144}{729}$.

     $2^{ème}$ *méthode* : on choisit la place de la boule rouge puis les places des 2 boules vertes, alors $p(E) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^2 \times 4 \times 4 \times 3}{729} = \dfrac{144}{729}$.
   - $1^{ère}$ *méthode* : $\left\{\begin{array}{l} vrn \to 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ vnr \to 4 \times 1 \times 3 = 12 \\ rvn \to 3 \times 4 \times 1 = 12 \\ rnv \to 3 \times 1 \times 4 = 12 \\ nvr \to 1 \times 4 \times 3 = 12 \\ nrv \to 1 \times 3 \times 4 = 12 \end{array}\right.$ donc $p(F) = \dfrac{6 \times 12}{729} = \dfrac{72}{729}$.

     $2^{ème}$ *méthode* : on choisit la place de la boule verte, la place de la boule rouge puis la place de la boule noire, ainsi $p(F) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times 4 \times 3 \times 1}{729} = \dfrac{72}{729}$.
2. Tirages successifs sans remise. Le nombre de tirages total est égal à $N = 9 \times 8 \times 7 = A_9^3 = 504$.
   - $p(A) = \dfrac{A_4^3}{504} = \dfrac{24}{504}$.

- $p(B) = \dfrac{A_6^3}{504} = \dfrac{120}{504}$.
- Le tirage étant sans remise, il n'y a pas de tirage favorable donc $p(C) = p(\emptyset) = 0$.
- $vvr \to 4 \times 3 \times 3 = 36$ donc $p(D) = \dfrac{36}{504}$.
- 1ère *méthode* : $\begin{cases} vvr \to 4 \times 3 \times 3 = 36 \\ vrv \to 4 \times 3 \times 3 = 36 \\ rvv \to 3 \times 4 \times 3 = 36 \end{cases}$ donc $p(E) = \dfrac{3 \times 36}{504} = \dfrac{108}{504}$.

  2ème *méthode* : On choisit la place de la boule rouge puis les places des 2 boules vertes, on a $p(E) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^2 \times 4 \times 3 \times 3}{504} = \dfrac{108}{504}$.
- 1ère *méthode* : $\begin{cases} vrn \to 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ vnr \to 4 \times 1 \times 3 = 12 \\ rvn \to 3 \times 4 \times 1 = 12 \\ rnv \to 3 \times 1 \times 4 = 12 \\ nvr \to 1 \times 4 \times 3 = 12 \\ nrv \to 1 \times 3 \times 4 = 12 \end{cases}$ donc $p(F) = \dfrac{6 \times 12}{504} = \dfrac{72}{504}$.

  2ème *méthode* : On choisit la place de la boule verte, la place de la boule rouge puis la place de la boule noire, $p(F) = \dfrac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times 4 \times 3 \times 1}{504} = \dfrac{72}{504}$.

3. Tirage simultané. Le nombre de tirages total est égal à $N = C_9^3 = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$.
   - $p(A) = \dfrac{C_4^3}{84} = \dfrac{4}{84}$.
   - $p(B) = \dfrac{C_6^3}{84} = \dfrac{20}{84}$.
   - Le tirage étant simultané, il n'y a pas de tirage favorable donc $p(C) = p(\emptyset) = 0$.
   - La question n'a pas de sens dans ce cas car il n'y a pas d'ordre dans un tirage simultané.
   - $p(E) = \dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{84} = \dfrac{18}{84}$.
   - $p(F) = \dfrac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{84} = \dfrac{12}{84}$.