MASTER 1 - Métiers de L'Enseignement en Mathématiques **La Mi-Voix - ULCO**

ANALYSE 2 Novembre 2010 - Contrôle Terminal, Semestre 1, Session 1

Durée de l'épreuve : 3h00 Documents et calculatrice interdits

(Les trois exercices sont indépendants. Un soin tout particulier sera apporté à la rédaction des réponses)

CORRECTION

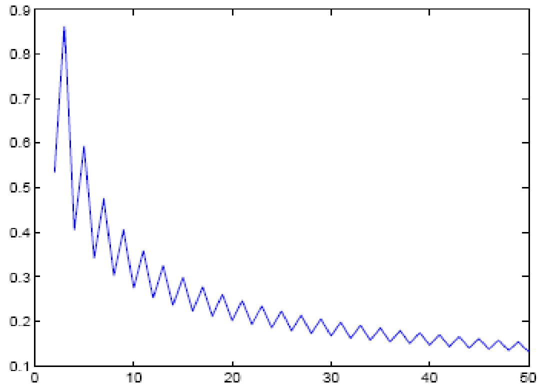
Exercice 1 *Critère des séries alternées.*

Soit la série numérique de terme général

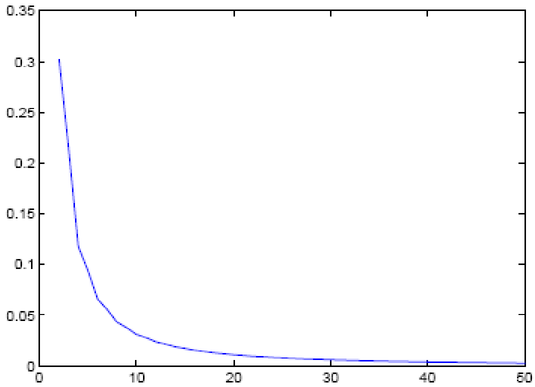
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}_+^\star,\ n \geq 2.$$

Le but de l'exercice est d'établir la nature de cette série en fonction du paramètre α, et de montrer que les équivalents sont à manipuler avec la plus grande prudence sur les séries à signe quelconque.

1. Vérifier que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série alternée.
2. Pour quelle raison l'applicabilité (ou la non-applicabilité) du théorème des séries alternées est-elle difficile à établir ? On donne ci-dessous, à titre indicatif, des représentations graphiques de $|u_n|$ pour quelques valeurs de α (bien-sûr, cela ne constitue en rien une preuve et ne permet pas d'appliquer le théorème, la nature de la série étant établie dans les questions suivantes).



Non décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 0,5$



Décroissance de $|u_n|$ avec $\alpha = 1,5$

3. Donner un équivalent de $|u_n|$ à l'infini. En déduire la convergence absolue de la série lorsque $\alpha > 1$.
4. Pour étudier la convergence de la série pour $0 < \alpha \leq 1$, il va falloir procéder autrement.
   (a) En utilisant un développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 2, montrer que l'on peut écrire :
   $$u_n = v_n + w_n,$$
   avec v_n une série alternée et w_n une série à terme de signe constant au-delà d'un certain rang. (*Attention* : il s'agit bien d'une égalité et non d'une équivalence !)
   (b) Établir la convergence de la série de terme général v_n, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.
   (c) Étudier la convergence de la série de terme général w_n suivant la valeur du réel α.
   (d) Conclure sur la convergence de $\sum_{n\geq 2} u_n$ suivant la valeur de $0 < \alpha \leq 1$.
5. Quelle (fausse) conclusion aurait-on tiré si on avait directement utilisé un équivalent de u_n à l'infini sans passer par un développement limité à l'ordre 2 comme suggéré dans la question 4. ?

<u>*Correction*</u> :

1. On est en présence d'une série alternée car u_{n+1} et u_n sont de signe opposé, du fait de l'oscillation autour de 1 de $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

2. La série est alternée, avec $|u_n|$ qui tend vers 0. On est bien tenté d'appliquer le théorème des séries alternées. Le problème est que la décroissance (ou pas) de $|u_n|$ est difficile à mettre en évidence en fonction des valeurs de α. En faisant quelques calculs à la main, on constate que pour $\alpha > 1$, la décroissance semble être assurée alors que pour $\alpha < 1$ elle semble compromise. Les graphiques vont dans ce sens.
3. On a l'équivalent $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, et la série est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
4. (a) En utilisant un D.L de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2, on obtient
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$
c'est-à-dire $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $w_n = -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + \circ\left(\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$. Il est important de noter qu'à ce stade, il s'agit bien d'une égalité, que l'on pourra donc conserver en tant qu'égalité entre séries.
(b) On sait que $\displaystyle\sum_n v_n$ converge pour tout $\alpha > 0$ (série de Riemann alternée ou théorème des séries alternées).
(c) On a $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$ de signe constant au-delà d'un certain rang (puisque $\circ\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ devient négligeable devant $-\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$ au delà d'un certain rang). Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\sum_n w_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_n -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ (série de Riemann).
(d) Comme $\displaystyle\sum_n v_n$ converge pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\displaystyle\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_n w_n$ converge, i.e. si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
En résumé, la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est
– divergente si $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$,
– semi-convergente si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$,
– absolument convergente si $\alpha > 1$.
5. Si au lieu de passer par un D.L à l'ordre 2 on avait utilisé un équivalent brutal, on aurait eu $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et on se serait empressé de conclure que la série converge pour tout $\alpha > 0$ (série de Riemann alterné), résultat évidemment faux puisque la série diverge pour $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Il est indispensable de pousser le D.L de $\ln(1+x)$ au delà de l'ordre 1 pour espérer conclure ! En effet, le premier terme $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ seul est un terme alterné dont la sommabilité est moins contraingnante qu'un terme à signe constant et ne suffit donc pas à conclure quant à la convergence de u_n. Un terme à l'ordre 1 de signe alterné peut cacher un terme à signe constant à l'ordre 2 qui peut faire diverger la série ! Il faut donc s'assurer que les termes négligés $\circ(\ldots)$ soient effectivement négligeables. On s'aperçoit ici que cela aurait été une erreur que de « négliger » ces termes d'ordre supérieur puisque le terme d'ordre 2 : $\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$ n'est pas sommable pour tout $\alpha > 0$ (et fait diverger la série pour $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$). Il est en revanche inutile d'aller au delà de l'ordre 2 puisqu'un terme à terme constant l'emporte forcément sur des termes d'ordre supérieurs quels que soient leurs signes.

Exercice 2 *Intégration - Polynômes de Bernoulli.*
On dit qu'une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = B_n \\ \forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1). \end{cases}$$

On vérifie facilement par récurrence que tous les B_n sont bien des fonctions polynomiales.

1. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n, donc de la forme $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}X^k$. Montrer alors que son coefficient dominant vérifie $\alpha_{n,n} = \dfrac{1}{n!}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
   (c) Montrer à l'aide des deux questions précédentes que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par
   $$B_n(X) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{n-1,j-1}}{j(j+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1,k}}{k+1}X^{k+1}.$$
   On dira que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Bernoulli.
2. Montrer que :
$$\begin{cases} B_1(X) &= X - \dfrac{1}{2} \\ B_2(X) &= \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{12} \end{cases}.$$
3. Calculer B_3 et B_4.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
5. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.
   (a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4.
   (b) Montrer que $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est impair.

Correction :

1. (a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, B_0 est bien un polynôme de degré 0 de coefficient dominant $\alpha_{0,0} = 1$. En supposant que, pour $n \geq 0$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\alpha_{n,n} \neq 0$, soit $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}X^k$, on déduit de l'égalité $B'_{n+1} = B_n$ que
   $$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1}X^{k+1} + \alpha_{n+1,0} = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j}X^j \tag{1}$$
   c'est-à-dire que B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant $\alpha_{n+1,n+1} = \dfrac{\alpha_{n,n}}{n+1} \neq 0$. Cette dernière relation de récurrence nous dit que $\alpha_{n,n} = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant acquis au rang $n \geq 0$, on a $\alpha_{n+1,n+1} = \dfrac{\alpha_{n,n}}{n+1} = \dfrac{1}{n!(n+1)} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.
   (b) Pour tout $n \geq 1$, on a :
   $$\int_0^1 B_n(t)dt = \int_0^1 B'_{n+1}(t)dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0 \tag{2}$$
   puisque $B_m(0) = B_m(1)$ pour $m \geq 2$.
   (c) Cette dernière identité combinée avec (1) permet de montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée. En effet, on a $B_0 = 1$ et en supposant B_n construit, la relation (2) nous dit que les coefficients $\alpha_{n+1,j} = \dfrac{\alpha_{n,j-1}}{j}$ sont uniquement déterminés pour tout j compris entre 1 et $n+1$. Enfin, avec

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)},$$

on déduit que

$$\alpha_{n+1,0} = -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)}.$$

On peut aussi remarquer que $\varphi_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1}$ est la primitive de B_n nulle en 0 et $B_{n+1} = \varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,0}$ avec $\alpha_{n+1,0} = \int_0^1 \varphi_{n+1}(t)dt$, ce qui détermine de manière unique la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne un algorithme de construction.

2. En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(X) = X, \\ \alpha_{1,0} = -\int_0^1 \varphi_1(t)dt = -\int_0^1 tdt = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$B_1(X) = \varphi_1(X) + \alpha_{1,0} = X - \frac{1}{2}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_2(X) &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ \alpha_{2,0} &= -\int_0^1 \varphi_2(t)dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

et :

$$B_2(X) = \varphi_2(X) + \alpha_{2,0} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \varphi_3(X) &= \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X \\ \alpha_{3,0} &= -\int_0^1 \varphi_3(t)dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right) dt = 0 \end{aligned}$$

et :

$$B_3(X) = \varphi_3(X) + \alpha_{3,0} = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X.$$

De même :

$$\begin{aligned} \varphi_4(X) &= \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 \\ \alpha_{4,0} &= -\int_0^1 \varphi_4(t)dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24}\right) dt = -\frac{1}{720} \end{aligned}$$

et :

$$B_4(X) = \varphi_4(X) + \alpha_{4,0} = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}.$$

4. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$

Pour montrer que cette suite est la suite des polynômes de Bernoulli, il suffit de prouver qu'elle vérifie les conditions (1) compte tenu de l'unicité prouvée à la question 1.c).
Pour $n = 0$, on a $C_0(X) = B_0(1 - X) = 1$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}(-B'_{n+1}(1 - X)) = (-1)^n B_n(1 - X) = C_n(X)$$

et pour $n \geq 2$,

$$C_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = C_n(1).$$

Ce qui donne le résultat attendu.

5. (a) Les calculs des questions 2. et 3. nous donnent
$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{12},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{720}.$$
   (b) De $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$$
   et de $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$, que
$$\forall n \geq 2,\ b_n = (-1)^n b_n.$$
   Il en résulte que $b_n = -b_n$ pour $n \geq 3$ qui est impair et $b_n = 0$ dans ce cas.

Exercice 3 *Séries de Fourier.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

<u>*Correction*</u> :

1. f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin(nt)dt + \int_{0}^{\pi} (1)\sin(nt)dt = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$
   donc $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \displaystyle\frac{4}{(2p+1)\pi}$ (on a utilisé la Proposition 1.1 : $\displaystyle\int_0^T = \int_0^{2\pi} = \int_x^{x+T} = \int_{-\pi}^{\pi}$ en posant $x = -\pi$).
   On en déduit que $S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x)$.
2. D'après le théorème de Dirichlet, la fonction f étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$, ou encore
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{4}{(2p+1)\pi}\sin((2p+1)x) = f(x).$$
   Si $x_0 \neq k\pi$ (x_0 n'est pas un point de discontinuité), $S(x) = f(x)$, et si $x_0 = k\pi$ (x_0 est un point de dicontinuité), étant donné que $f(x^+) = f(\pi^+) = \displaystyle\lim_{x\to\pi^+} f(x) = 1$ et $f(x^-) = f(\pi^-) = \displaystyle\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -1$, $S(x) = \displaystyle\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0$.
3. La convergence simple de la série de Fourier vers $f(x)$ en $x = \pi/2$ (qui n'est pas un point de discontinuité) donne :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}{(2p+1)\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$
   L'égalité de Parseval donne $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{(2p+1)^2\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ existe et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

   Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.