Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2011/2012

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 1 - Nombres réels.

1 Introduction. Propriétés des rationnels

Posant $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, on peut définir l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels comme étant le quotient de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^\star$ par la relation d'équivalence obtenue en posant $(p,q)\equiv(p',q')$ si (et seulement si) $pq' = qp'$. On a alors les propriétés suivantes :

Propriété 1.1

1. *$\mathbb{Q}$ est un corps commutatif pour les opérations usuelles d'addition et de multiplication.*
2. *$\mathbb{Q}$ est totalement ordonné par la relation d'ordre usuelle, et cette relation d'ordre satisfait à*
   (a) *quels que soient $a,b,c\in\mathbb{Q}$, l'inégalité $a\geq b$ implique $a+c\geq b+c$,*
   (b) *quels que soient $a,b,c\in\mathbb{Q}$, les inégalités $c\geq 0$ et $a\geq b$ impliquent $ac\geq bc$.*
3. *Quel que soit $x\in\mathbb{Q}$, il existe un entier $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>x$.*

Les propriétés 1. et 2. se traduisent en disant que $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné tandis que 3. se traduit en disant que $\mathbb{Q}$ est archimédien.
On notera qu'à l'encontre de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ possède une propriété de densité qui se traduit mathématiquement par : « entre deux nombres rationnels, il en existe toujours un troisième ». En effet, quels que soient $a,b\in\mathbb{Q}$, le nombre $c=(a+b)/2$ satisfait à $a<c<b$.

Pour la preuve de tous ces résultats, on se référera au document intitulé *Nombres rationnels* disponible à la fin du polycopié

2 Suites convergentes, suites de Cauchy (dans $\mathbb{Q}$)

Pour compléter $\mathbb{Q}$, on définit les réels comme limites de suites de nombres rationnels (méthode de Cantor).

Définition 2.1 *Une suite $(x_n)_n$ de rationnels est définie par la donnée d'une application $x : n\mapsto(x_n)_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.*

Définition 2.2 *Dans $\mathbb{Q}$ une suite $(x_n)_n$ est dite bornée s'il existe $M\in\mathbb{Q}$ tel que l'on ait $|x_n|\leq M$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$.*

Remarque 2.1 Pour que la suite $(x_n)_n$ soit bornée, il suffit qu'elle soit bornée à partir d'un certain rang, i.e. qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ et $M\in\mathbb{Q}$ tels que l'on ait $|x_n|\leq M$ pour $n\geq n_0$. En effet, la suite $(x_n)_n$ est alors bornée par le nombre $M'=\sup(|x_0|,|x_1|,\ldots,|x_{n_0}|,M)$.

Définition 2.3 *On dit que la suite $(x_n)_n$ tend (ou converge) dans $\mathbb{Q}$ vers a ($a\in\mathbb{Q}$) si, quel que soit $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbb{Q}$), il existe un entier n_ε tel que l'inégalité $n>n_\varepsilon$ entraîne $|x_n-a|<\varepsilon$.*

De par l'unicité de la limite, on peut poser sans ambiguïté $a=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et dire que a est la limite de la suite $(x_n)_n$. Une suite admettant une limite est dite convergente.

Définition 2.4 *On dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ si, quel que soit $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbb{Q}$), il existe un entier n_ε tel que les inégalités $n>n_\varepsilon$ et $p>n_\varepsilon$ entraînent $|x_n-x_p|<\varepsilon$.*

Définition 2.5 *On dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ si, quel que soit $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbb{Q}$), il existe un entier n_ε tel que $\forall n>n_\varepsilon$, $\forall p\geq 0$, $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.*

Propriété 2.1

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Si la suite $(x_n)_n$ tend vers zéro et si la suite $(y_n)_n$ est bornée, la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers zéro.*

4. *Si les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont de Cauchy, les suites $(x_n+y_n)_n$, $(x_n-y_n)_n$ et $(x_ny_n)_n$ sont de Cauchy.*
5. *Si la suite $(x_n)_n$ tend vers a et si la suite $(y_n)_n$ tend vers b, alors la suite $(x_n+y_n)_n$ tend vers $a+b$, la suite $(x_n-y_n)_n$ tend vers $a-b$ et la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers ab.*
6. *Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy ne convergeant pas vers zéro. Alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n>n_0$, on ait $x_n\neq 0$ et la suite $(1/x_n)_n$, définie pour $n>n_0$, est de Cauchy.*

Exercice 1 Démontrer les six propriétés précédentes.

Exercice 2 Montrer que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels telle que $|r_{n+1}-r_n|\leq\lambda^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où λ est un rationnel strictement compris entre 0 et 1, alors cette suite est de Cauchy.

Proposition 2.1 *Il existe des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes. ($(\mathbb{Q},|.|)$ n'est donc pas un espace métrique complet)*

Exercice 3 Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_0=2$ et $r_{n+1}=1+\dfrac{1}{r_n}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $r_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 5 Montrer que la suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{n!}$ est de Cauchy mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.

Le corps $\mathbb{Q}$ n'est donc pas complet pour la valeur absolue usuelle, ce qui est gênant du point de vue de l'analyse. En effet, pour construire de nouveau objets mathématiques (nombres, fonctions,...) il est utile d'utiliser la notion de limite de suite. Or la définition usuelle d'une limite présuppose que l'on connaisse la limite éventuelle ce qui s'avère dans la plupart des cas impossible. L'idée géniale de Louis-Augustin Cauchy fut d'introduire la notion de suite de Cauchy afin de s'affranchir de l'utilisation d'une limite « explicite ». En utilisant l'intuition que l'on avait à l'époque des réels (corps ordonné, théorème des segments emboîtés), il démontra que le corps des réels est complet c'est-à-dire qu'une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Nous savons depuis longtemps (au moins intuitivement avec l'utilisation des décimaux et des calculatrices dans nos activités numériques depuis l'enfance) que les rationnels forment une partie dense de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire tout réel est la limite (au sens de la valeur absolue archimédienne) d'une suite de rationnels, que la distance sur les rationnels est induite par la distance sur les réels. Il est dès lors évident que deux suites convergentes (ou de Cauchy, ce qui semble être la même chose pour les réels), vont « représenter » le même réel si et seulement si elles possèdent la même limite, c'est-à-dire que leur différence tend vers 0. De cette analyse, Cantor en déduit une méthode rigoureuse de la construction des nombres réels en ne présupposant que l'existence des rationnels. Ces derniers se déduisent rigoureusement des entiers naturels, pour lequel nous devons poser le postulat de leur existence ainsi que de l'existence d'une addition et du principe de récurrence.

3 Construction de $\mathbb{R}$; structure algébrique. Notations

Proposition 3.1 *On obtient une structure d'anneau commutatif sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ en définissant la somme $x+y$ de deux suites de Cauchy $x=(x_n)_n$ et $y=(y_n)_n$ comme étant la suite $(x_n+y_n)_n$, et leur produit comme étant la suite $(x_ny_n)_n$. Cet anneau admet pour unité la suite constante $u=(1)_n$ définie par $u_n=1$ quel que soit n et elle admet pour zéro la suite constante $(0)_n$ dont tous les termes sont nuls. Enfin, les suites d'éléments de $\mathbb{Q}$ convergeant vers zéro constituent un idéal $\mathcal{C}_0$ de $\mathcal{C}$.*

La théorie générale des idéaux permet alors d'affirmer immédiatement :

Proposition 3.2 *On obtient une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ en posant $x\equiv y$ si $x-y\in\mathcal{C}_0$, c'est-à-dire si la suite $(x_n-y_n)_n$ tend vers zéro. De plus, le quotient de $\mathcal{C}$ par cette relation d'équivalence est un anneau commutatif unifère pour les lois quotients définies par :*

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y},\ \overline{x}\,\overline{y}=\overline{xy}$$

où $\overline{x}$ désigne la classe de l'élément x.

Définition 3.1 *L'anneau quotient $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ est appelé droite numérique et désigné par $\mathbb{R}$. Ses éléments sont appelés nombres réels.*

Proposition 3.3 *$\mathbb{R}$ est un corps commutatif.*

Proposition 3.4 *On obtient un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ sur un sous-corps de $\mathbb{R}$ en associant à chaque nombre rationnel q la classe $C(q)$ constituée par les suites de Cauchy convergeant vers q.*

On trouvera des détails concernant la construction de $\mathbb{R}$ à la fin de ce polycopié dans le document intitulé *Nombres réels.*

4 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Pour pouvoir ordonner $\mathbb{R}$ on définit les ensemble $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ constitués par les suites de Cauchy destinées à représenter respectivement les nombres réels positifs et les nombres réels négatifs.

Définition 4.1 *Soit $x \in \mathcal{C}$ une suite de Cauchy. On dira que x appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_+$ (resp. $\mathcal{C}_-$) si, à chaque $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$), on peut associer un entier n_ε tel que l'inégalité $n > n_\varepsilon$ entraîne $x_n > -\varepsilon$ (resp. $x_n < \varepsilon$).*

Propriété 4.1 *On a*

1. *$\mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_- = \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- = \mathcal{C}$.*
2. *Si la suite $(x_n)_n$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_-$, il existe un rationnel $\beta > 0$ et un entier n_0 tels que l'on ait $x_n > \beta$ pour tout $n > n_0$.*
3. *(a) $x \in \mathcal{C}_-$ équivaut à $(-x) \in \mathcal{C}_+$.*
   (b) Les relations $x \in \mathcal{C}_+$ et $y \in \mathcal{C}_+$ entraînent $x + y \in \mathcal{C}_+$.
   (c) Les relations $x \in \mathcal{C}_+$ et $y \in \mathcal{C}_+$ entraînent $xy \in \mathcal{C}_+$.
4. *Soient x, x' deux suites de Cauchy équivalentes (i.e. telles que $x' - x \in \mathcal{C}_0$) alors elles appartiennent toutes deux à $\mathcal{C}_+$ ou toutes deux à $\mathcal{C}_-$.*

Cette dernière propriété permet de poser sans ambiguïté la définition suivante :

Définition 4.2 *Un nombre réel est dit positif (resp. négatif) s'il est représenté par une suite de Cauchy appartenant à $\mathcal{C}_+$ (resp. $\mathcal{C}_-$).*

L'ensemble des réels positifs (quotient de $\mathcal{C}_+$ par $\mathcal{C}_0$) est désormais désigné par $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des réels négatifs (quotient de $\mathcal{C}_-$ par $\mathcal{C}_0$) est désigné par $\mathbb{R}_-$. Des propriétés précédentes on déduit que :

Propriété 4.2

1. *On obtient une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ en posant $b \geq a$ si (et seulement si) $b - a \in \mathbb{R}$.*
2. *Quels que soient les nombres réels a, b, c, la relation $b \geq a$ entraîne $b + c \geq a + c$ et les relations $b \geq a$ et $c \geq 0$ entraînent $bc \geq ac$ (qui traduit le fait que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné.*

On trouvera des détails concernant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ à la fin de ce polycopié dans le document intitulé *Nombres réels.*

5 Approximation des réels par les rationnels. Axiome d'Archimède

L'identification de $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{R}$ pose le problème de situer les nombres rationnels par rapport à l'ensemble des nombres réels, et de préciser les relations d'ordre entre nombres rationnels et nombres réels. À la base de cette étude se trouve le théorème suivant :

Théorème 5.1 *(Axiome d'Archimède) Quel que soit le nombre réel a, il existe un entier p tel que $p > a$.*

Corollaire 5.1 *Quels que soient les nombres réels a, b tels que $a > 0$, il existe un entier p tel que $pa > b$.*

Proposition 5.1 *Quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre rationnel ε_1 satisfaisant à $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.*

Proposition 5.2 *Quels que soient les nombres réels ε, x tels que $\varepsilon > 0$, il existe un entier p unique satisfaisant à l'inégalité :*

$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon.$$

Proposition 5.3 *Quels que soient les nombres réels distincts x, y, il existe un nombre rationnel z compris entre eux.*

Proposition 5.4 *Entre deux nombres rationnels quelconques, il y a toujours un irrationnel.*

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont donc tous deux denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, $rx \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : « Entre 2 nombres rationnels, il y a toujours un nombre irrationnel. »
   (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

Exercice 7 Démontrer l'irrationnalité du nombre π.

Exercice 8 Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent, qu'il n'est pas rationnel.

Exercice 9 Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 10 On désigne par f une fonction monotone vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

1. Montrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, f(ra) = rf(a).$$
2. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout réel x.
3. Montrer que l'identité est l'unique fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y.

Exercice 11 Montrer que $E = \{r^3 / r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Si a et b sont des réels ≥ 0, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a + b}.$$

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
   (On pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x.)

6 Représentation décimale des nombres réels

Les résultats précédents montrent que les rationnels peuvent être approchés d'aussi près que l'on veut par des nombres rationnels. Nous allons voir que l'on peut, en particulier, les approcher par des nombres décimaux. Si on pose $\varepsilon = 10^{-n}$ dans la proposition 5.2, on obtient

Proposition 6.1 *Quels que soient le nombre réel x et l'entier n, il existe un entier unique p_n vérifiant la double inégalité*

$$p_n 10^{-n} \leq x < (p_n + 1)10^{-n}. \tag{2}$$

Le nombre décimal $p = p_n 10^{-n}$ est appelé la valeur décimale approchée par défaut d'ordre n du nombre réel x.

Théorème 6.1 *Il existe une bijection $x \mapsto x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des développements décimaux illimités propres telle que :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le nombre décimal $\zeta_n = x_0, x_1, \ldots, x_n$ est la valeur décimale approchée d'ordre n de x, définie par l'inégalité (2), avec $\zeta_n = p_n 10^{-n}$.*
2. *Le nombre réel x est représenté par la suite de Cauchy $(\zeta_n)_n$.*

Corollaire 6.1 *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Exercice 14

1. Soit $N_n = 0,19971997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$.
2. Soit $M = 0,199719971997\ldots$. Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec

$p = 0,11111\ldots+0,22222\ldots+0,33333\ldots+0,44444\ldots+0,55555\ldots+0,66666\ldots+0,77777\ldots+0,88888\ldots+0,99999\ldots$

Exercice 15 On se donne un entier $b \geq 2$ et pour tout entier naturel n non nul, on définit l'ensemble :

$$Q_n = \left\{ \frac{k}{b^n} / k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq b^n \right\}.$$

Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n non nul, il existe $r_n \in Q_n$ tel que :

$$r_n \leq x \leq r_n + \frac{1}{b^n}.$$

En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

7 Suites convergentes et suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$

Définition 7.1 *Une suite $(x_n)_n$ de nombres réels est dite bornée s'il existe un nombre réel M vérifiant $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 7.2 *On dit que la suite $(x_n)_n$ de nombres réels tend (ou converge) vers le nombre réel x si, quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que l'on ait $|x_n - x| < \varepsilon$ pour tout $n > n_\varepsilon$.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit aussi que la suite $(x_n)_n$ est convergente et qu'elle admet x pour limite.

Définition 7.3 *On dit que la suite $(x_n)_n$ de nombres réels est de Cauchy si, quel que soit le nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que les inégalités $n > n_\varepsilon$ et $p > n_\varepsilon$ entraînent $|x_n - x_p| < \varepsilon$.*

Propriété 7.1

1. *Une suite de nombres réels a au plus une limite.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, toute suite convergente est de Cauchy.*
3. *Toute suite de Cauchy formée de nombres rationnels converge vers le nombre réel qu'elle représente.*

Théorème 7.1 *Pour qu'une suite de nombres réels soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.*

Propriété 7.2 *La limite d'une suite convergente de nombres positifs est positive (éventuellement nulle).*

8 Propriétés des limites. Exemples

On obtient sans peine les propriétés suivantes :

Propriété 8.1

1. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de nombres réels ou complexes. Si la suite (x_n) tend vers zéro et si la suite $(y_n)_n$ est bornée, la suite $(x_n y_n)_n$ tend vers zéro.*
2. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de nombres réels ou complexes, convergeant respectivement vers x, y. Alors la suite $(x_n + y_n)_n$ tend vers $x + y$ et la suite $(x_n y_n)_n$ tend vers xy.*

3. *Soit (x_n) une suite de nombres réels ou complexes admettant une limite $x \neq 0$. Alors la suite $(1/x_n)_n$ est définie pour n assez grand et tend vers $1/x$.*
4. *Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes convergeant vers x. Alors la suite $(|x_n|)_n$ converge vers $|x|$.*
5. *Si la suite $(z_n)_n$ a une limite z, la suite $(z_{n+1})_n$ tend aussi vers z.*

Exercice 16 Étudier les suites

1. $(z^n)_n$ ($z \in \mathbb{C}$ donné)
2. $(z_n)_n$ définie par récurrence par $z_{n+1} = \dfrac{az_n + b}{cz_n + d}$ (a, b, c, d, z_0 donnés avec $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$).

Définition 8.1 *Étant donné deux suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ de nombres réels (resp. complexes), on dit que la suite $(y_n)_n$ est équivalente à la suite $(x_n)_n$ s'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres réels (resp. complexes) tendant vers 1, telle que, pour n assez grand, on ait $y_n = \lambda_n x_n$.*

Proposition 8.1 *Si la suite $(x_n)_n$ est convergente, toute suite $(y_n)_n$ équivalente à $(x_n)_n$ est convergente et a même limite que la suite (x_n).*
Réciproquement, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites convergeant vers la même limite finie, et si cette limite est non nulle, les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont équivalentes.

Proposition 8.2 *Si $(x_n)_n$ est une suite de réels tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), toute suite de réels équivalente à $(x_n)_n$ tend aussi vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*
Si $(z_n)_n$ est une suite de nombres complexes tendant vers l'infini, toute suite de nombres complexes équivalente à $(z_n)_n$ tend aussi vers l'infini.

Proposition 8.3 *On ne modifie pas la convergence ni la limite d'un produit ou d'un quotient de suites en remplaçant chacune des suites qui y figurent par une suite équivalente.*

Nombres rationnels

1 Définition de $\mathbb{Q}$

On définit, sur l'ensemble $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, la relation binaire $\mathfrak{R}$ de la façon suivante :

$$(a,b)\mathfrak{R}(a',b') \quad\Longleftrightarrow\quad ab'=ba'$$

Propriété 1.1 *$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration :

- Réflexivité : Elle découle de la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{Z}$.
- Symétrie : Idem.
- Transitivité :
  Soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') tels que $(a,b)\mathfrak{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathfrak{R}(a'',b'')$.
  Alors :

$$\left.\begin{array}{c} ab'=ba' \\ a'b''=b'a'' \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad aa'b'b''=ba'b'a'' \quad\Longrightarrow\quad aa'b''=ba'a''$$

  Si $a'\neq 0$, on obtient $ab''=ba''$ donc $(a,b)\mathfrak{R}(a'',b'')$.
  Sinon, $a'=0$ donc $a=0$ et $a''=0$; on a encore $ab''=ba''$ donc $(a,b)\mathfrak{R}(a'',b'')$.

□

Définition Un *nombre rationnel* est la classe d'équivalence d'un élément (a,b) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$; on le note $\dfrac{a}{b}$. Et l'on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathfrak{R}$ des nombres rationnels.

N.B. Attention : $\dfrac{a}{b}$ n'est rien d'autre qu'une notation pour désigner le rationnel dont un représentant est le couple (a,b). Ceci justifie également toutes les égalités de type $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, qui signifie que les deux rationnels sont égaux, mais absolument pas les deux représentants (a,b) et (c,d).

Définition a est appelé *numérateur* du représentant (a,b) de $\dfrac{a}{b}$; b est appelé son *dénominateur*.

Remarque Pour tout couple (a,b), on a :

$$\frac{0}{1}=\frac{a}{b} \quad\Longleftrightarrow\quad a=0$$

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q}\setminus\left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ des rationnels non nuls.

2 Représentants privilégiés d'un rationnel

Théorème 2.1 *Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel non nul. Alors il existe un unique couple (p,q) dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}_+^*$, appelé représentant irréductible de $\frac{a}{b}$, qui vérifie :*

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \quad et \quad p \wedge q = 1$$

(où $p \wedge q$ désigne le PGCD des entiers p et q.)

Démonstration :

- Unicité :
  Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Soit un tel couple (p,q), vérifiant donc $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, avec p et q premiers entre eux.
  Soit $\delta = a \wedge b \in \mathbb{N}^*$, et a' et b' deux entiers vérifiant $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ (et donc $a' \wedge b' = 1$, cf le texte sur les entiers relatifs).
  On a alors $p\delta b' = q\delta a'$ donc $pb' = qa'$. Comme $a' \wedge b' = 1$, on en déduit (lemme de Gauss) que $p|a'$ (et $q|b'$). C'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $a' = pk$. Mais alors, en remplaçant a' par pk dans l´égalité $pb' = qa'$, il vient après simplification par p : $b' = qk$. L'entier k est donc un diviseur commun de a' et b'.
  Comme on a $a' \wedge b' = 1$, on obtient $k = \pm 1$, et donc $(p,q) = (a', b')$ ou bien $(p,q) = (-a', -b')$. L'unicité découle alors de la condition $q > 0$.
- Existence :
  Au signe près, le couple (a', b') construit vérifie la propriété voulue. Si $b' < 0$, il suffit de prendre le couple $(-a', -b')$.

□

Propriété 2.2 *Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels. Soit μ le PPCM de b et d. Alors il existe deux entiers a_1 et c_1 tels que :*

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu} \quad et \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}$$

N.B. Effectuer une telle opération (déterminer les entiers a_1 et c_1) s'appelle *réduire au même dénominateur* les deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Démonstration : Soient en effet $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels, μ le PPCM de b et d. soient h et k deux entiers tels que $\mu = bh = dk$.

On vérifie sans problème que $(a,b)\mathfrak{R}(ah, bh)$, et donc que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } a_1 = ah.$$

De même $$\frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu}, \quad \text{où l'on a posé } c_1 = ck.$$ □

3 Opérations sur $\mathbb{Q}$

3.1 Addition

Soit, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, l'addition définie par $(a,b)+(c,d) = (ad+bc, bd)$. Cette addition est compatible avec la relation $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\mathfrak{R}(a',b')\\(c,d)\mathfrak{R}(c',d')\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad ((a,b)+(c,d))\,\mathfrak{R}\,((a',b')+(c',d'))$$

En effet, la conclusion équivaut à $(ad+bc,bd)\mathfrak{R}(a'd'+b'c',b'd')$, c'est-à-dire à $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$, soit encore $adb'd'+bcb'd' = a'd'bd+b'c'bd$, ce qui est vrai car par hypothèse $ab' = a'b$ et $cd' = c'd$.

Cette addition définit donc par passage au quotient une opération (toujours appelée addition) sur $\mathbb{Q}$, en posant donc $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

Théorème 3.1 $(\mathbb{Q},+)$ *est un groupe commutatif.*

Démonstration :

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication et de l'addition sur $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Soient $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. En posant $\mu = b \vee d \vee f$ (PPCM de b, d et f), on a trois entiers a_1, c_1 et e_1 tels que :
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu}$$
  Après simplifications :
  $$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} = \left(\frac{a_1}{\mu}+\frac{c_1}{\mu}\right)+\frac{e_1}{\mu} = \frac{(a_1+c_1)+e_1}{\mu}$$
  et de même $$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a_1+(c_1+e_1)}{\mu}$$
  On conclut alors par associativité de l'addition des entiers.
- $\dfrac{0}{1}$ est élément neutre pour l'addition :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b}+\frac{0}{1} = \frac{a.1+0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Opposé de $\dfrac{a}{b}$:
  On a $$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$$
  donc $\dfrac{a}{b}$ admet pour opposé $\dfrac{-a}{b}$, qui est donc aussi noté $-\dfrac{a}{b}$. On note également $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ pour la différence $\dfrac{a}{b}+\left(-\dfrac{c}{d}\right)$.

□

3.2 Multiplication

De la même façon, on définit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ la multiplication (notée $\times$) par $(a,b) \times (c,d) = (ac, bd)$. Elle est compatible avec $\mathfrak{R}$. Soient en effet quatres couples d'entiers $(a,b)\mathfrak{R}(a',b')$ et $(c,d)\mathfrak{R}(c',d')$.

Alors $$ab' = ba' \quad \text{et} \quad cd' = dc'$$

Or $$pa(a,b) \times (c,d)\mathfrak{R}\left((a',b') \times (c',d')\right) \Longleftrightarrow (ac, bd)\mathfrak{R}(a'c', b'd')$$
$$\Longleftrightarrow acb'd' = bda'c'$$

Cette dernière égalité découlant immédiatement des hypothèses, par multiplication terme à terme (dans $\mathbb{Z}$).

D'où par passage au quotient une multiplication sur $\mathbb{Q}$, définie par $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Théorème 3.2 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration : Puisqu'on sait déjà que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe commutatif, il ne reste à démontrer que les propriétés relatives à la loi $\times$.

- Commutativité :
  Immédiat par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Associativité :
  Idem, en utilisant l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{Z}$.
- Distributivité sur l'addition :
  Soient $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{e}{f}$ dans $\mathbb{Q}$. On a des entiers a_1, c_1 et e_1 tels que
  $$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{\mu}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{e}{f} = \frac{e_1}{\mu} \quad (\text{avec } \mu = b \vee d \vee f\ )$$
  Alors $$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a_1}{\mu} \times \left(\frac{c_1}{\mu} + \frac{e_1}{\mu}\right) = \frac{a_1(c_1 + e_1)}{\mu^2} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  et $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{a_1}{\mu} \times \frac{c_1}{\mu} + \frac{a_1}{\mu} \times \frac{e_1}{\mu} = \frac{a_1c_1 + a_1e_1}{\mu^2}$$
  La distributivité à droite en découle, grâce à la commutativité de la multiplication, déjà démontrée.
- $\dfrac{1}{1}$ est élément neutre :
  $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$$
- Inverse de $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$:
  Si $\dfrac{a}{b}$ est dans $\mathbb{Q}^*$, alors a est non nul, donc le rationnel $\dfrac{b}{a}$ est bien défini. Et il vérifie :
  $$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1}$$
  donc $\dfrac{a}{b}$ est inversible et son inverse est $\dfrac{b}{a}$.

□

4 Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

Remarque Pour tout rationnel $\alpha \in \mathrm{Q}^*$, pour tout représentant (a, b) de α, le signe du produit ab est constant (il ne dépend pas du représentant choisi).

En effet, soit (p, q) le représentant irréductible de α. On a un entier k tel que $a = kp$ et $b = kq$, donc $ab = k^2pq$ a le signe de pq.

Définition $\dfrac{a}{b}$ est *strictement positif* si et seulement si $ab > 0$; $\dfrac{a}{b}$ est *strictement négatif* si et seulement si $ab < 0$.

Notations : On note $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des rationnels strictement positifs, $\mathbb{Q}_-^*$ l'ensemble des rationnels strictement négatifs ; on note $\mathbb{Q}_+$ (resp. $\mathbb{Q}_-$) l'ensemble $\mathbb{Q}_+^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$ (resp. l'ensemble $\mathbb{Q}_-^* \cup \left\{\dfrac{0}{1}\right\}$).

On a alors $$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \Longleftrightarrow ab \geq 0$$

En effet, si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $ab > 0$, et si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$, alors $ab = 0$. Réciproquement, si $ab > 0$, alors $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+^*$ et si $ab = 0$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{0}{1}$

De même $$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_- \Longleftrightarrow ab \leq 0$$

De ces propriété, on déduit des propriétés de signe de la somme et du produit de deux rationnels :

Propriété 4.1 $$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+ \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_+, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

De même $$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}_-, \alpha\beta \in \mathbb{Q}_+$$

Enfin $$\alpha \in \mathbb{Q}_+, \beta \in \mathbb{Q}_- \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}_-$$

On est désormais en mesure de définir la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$:

Définition On définit ainsi la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{Q}$:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$$

Théorème 4.2 *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration :

- Réflexivité :

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$$

- Antisymétrie :
  Si $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ et $\dfrac{c}{d} \leq \dfrac{a}{b}$, alors $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$, et $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, donc

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \left\{\frac{0}{1}\right\}$$

  et donc $$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

– Transitivité :
Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, alors $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{e}{f} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$. Or nous avons vu que $\mathbb{Q}_+$ est stable par la loi +, donc

$$\frac{e}{f} - \frac{a}{b} = \left(\frac{e}{f} - \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Q}_+ \quad \text{donc} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$$

– Ordre total :
On a $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \mathbb{Q}$, donc pour tout couple de rationnels $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, la différence $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ est nécessairement dans $\mathbb{Q}_+$ ou dans $\mathbb{Q}_-$. Selon les cas, on a alors $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ou bien $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

□

Remarque
Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_-$ et $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, alors $\frac{a}{b} \leq \frac{0}{1}$ et $\frac{0}{1} \leq \frac{c}{d}$, donc par transitivité $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

Propriété 4.3 *La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la loi + sur $\mathbb{Q}$, et avec la loi $\times$ sur $\mathbb{Q}_+$.*

Démonstration : Soient donc quatres rationnels $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \leq \frac{c'}{d'}$. Alors on a $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$ et $\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+$, et donc en sommant :

$$\left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c'}{d'} - \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}_+$$

On a montré $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$$

Supposons désormais de plus ces rationnels positifs. Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $b = b' = d = d'$. On a alors $0 \leq a \leq a'$ et $0 \leq c \leq c'$. donc (dans $\mathbb{Z}$) $ac \leq a'c'$.
On obtient $\frac{a'c' - ac}{b^2} \in \mathbb{Q}_+$, et donc

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} \leq \frac{a'}{b} \times \frac{c'}{b}$$

□

Notation :(ordre strict sur $\mathbb{Q}$)
On pose : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \end{cases}$$

Alors $$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \setminus \left\{\frac{0}{1}\right\} = \mathbb{Q}_+^*$$

Définition Soit G un groupe (additif) ordonné.
– On note G_+ l'ensemble des éléments de G supérieurs ou égaux à l'élément neutre 0. G_+^* désignera l'ensemble $G_+ \setminus \{0\}$.

– Étant donné un élément a du groupe G, et n un entier naturel, $n.a$ désigne l'élément $a + a + \cdots + a$ (n occurences de l'élément a).
– Le groupe G est dit *archimédien* s'il vérifie la propriété :

$$\forall b \in \mathrm{G}_+ \forall a \in \mathrm{G}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \quad b \leq n.a$$

Propriété 4.4 $\mathbb{Q}$ *est archimédien.*

Démonstration : Soit en effet β un rationnel positif et α un rationnel strictement positif. Si $\beta = 0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, quitte à réduire au même dénominateur (propriété 2.2), on peut supposer α de la forme $\dfrac{a}{q}$ et β de la forme $\dfrac{b}{q}$, où a, b et q sont des entiers naturels non nuls.

On a alors $a \geq 1$, et donc $a \times \beta \geq \beta$ (la relation d'ordre est compatible avec la multiplication, sur $\mathbb{Q}_+$). Or $a \times \beta = \dfrac{ab}{q} = b \times \alpha$, donc $b\alpha \geq \beta$.

□

5 Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $\mathbb{Q}'$ l'ensemble $\left\{\dfrac{m}{1}, m \in \mathbb{Z}\right\}$. Il s'agit bien sûr d'un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Il est immédiat de vérifier que $\mathbb{Q}'$ est stable pour les lois $+$ et $\times$ (en revenant aux définitions de ces lois, on vérifie que $\dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = \dfrac{m+n}{1}$ et $\dfrac{m}{1} \times \dfrac{n}{1} = \dfrac{mn}{1}$) ; et que $\mathbb{Q}'$ est également stable par passage à l'opposé pour la loi $+$. On en déduit que $(\mathbb{Q}', +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Soit l'application f, de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}'$ définie par $m \longmapsto \dfrac{m}{1}$. On a, d'après la remarque précédente, pour tous entiers m et n, les relations

$$f(m+n) = f(m) + f(n) \text{ et } f(mn) = f(m)f(n)$$

De plus $$\forall \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}' \; \exists! n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = \frac{m}{1}$$

En effet $$f(n) = \frac{m}{1} \iff \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \iff n = m$$

On a montré que f est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}'$.
Enfin $f(m) \leq f(n) \iff \dfrac{m}{1} \leq \dfrac{n}{1} \iff \dfrac{m-n}{1} \leq \dfrac{0}{1} \iff m - n \leq 0 \iff m \leq n$, c'est-à-dire que l'isomorphisme f est compatible avec les relations d'ordre sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Convention : On identifie, compte-tenu de l'isomorphisme f, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}'$ en écrivant m le rationnel $\dfrac{m}{1}$ (en particulier : $0 = \dfrac{0}{1}$ et $1 = \dfrac{1}{1}$).

Ainsi, on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; et les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Q}$ *prolongent* respectivement les opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}$; l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ *prolonge* quant à lui l'ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Z}$.

Remarque Avec cette écriture, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

6 Valeur absolue sur $\mathbb{Q}$

On définit sur $\mathbb{Q}$ la *valeur absolue* en posant, pour tout rationnel α :

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

Cette définition est justifiée car on a montré que $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Q}$ (et donc, pour tout rationnel α, l'ensemble $\{\alpha, -\alpha\}$ admet un plus grand élément). En particulier, on a $|-\alpha| = |\alpha|$ pour tout α.
Remarque Cette valeur absolue prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{Z}$.

Propriété 6.1 *Pour tous α et β rationnels, on a*

$$\alpha^2 = \beta^2 \iff |\alpha| = |\beta|$$

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Dans le corps $\mathbb{Q}$, on peut factoriser l'égalité $\alpha^2 = \beta^2$ pour obtenir $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$, donc $\alpha = \pm\beta$, ce qui entraîne $|\alpha| = |\beta|$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, alors $|\alpha| = |\beta|$ entraîne $\alpha = \beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$.
Les autres cas se tritent de la même façon : si $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$, on obtient $\alpha = -\beta$ et donc $\alpha^2 = \beta^2$, et ainsi de suite.

□

Propriété 6.2 *Pour tous rationnels α et β, on a $|\alpha\beta| = |\alpha| \times |\beta|$.*

Démonstration : Il suffit là encore de distinguer les cas, en fonction des signes de α et β.

□

Propriété 6.3 *Pour tous rationnels α et β, on a $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que pour tous rationnels positifs α et β, on a l'équivalence $\alpha \leq \beta \iff \alpha^2 \leq \beta^2$. En effet $\Rightarrow$ s'obtient grâce à la compatibilité de $\leq$ avec la multiplication (sur $\mathbb{Q}_+$), et $\Leftarrow$ par contraposée, pour les mêmes raisons.

On peut alors raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\iff |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\
&\iff \left|(\alpha + \beta)^2\right| \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\
&\iff (\alpha + \beta)^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \\
&\iff 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta|
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie (car $|\alpha| \times |\beta| = |\alpha\beta|$), il en est de même de la première...

□

Nombres réels

1 Suites de rationnels

Définition Une *suite de rationnels* (ou suite *rationnelle*) est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

NOTATION : Pour tout entier n, on note u_n l'image $u(n)$ de l'entier n par l'application u. La suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, voire tout simplement (u_n).
NOTATION : On notera par la suite $\mathfrak{S}$ l'ensemble de toutes les suites rationnelles.

1.1 Addition sur $\mathfrak{S}$

Définition Pour deux suites u et v de $\mathfrak{S}$, on définit la somme de ces suites, de façon naturelle, comme leur somme en tant qu'applications, c'est-à-dire :

$$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Théorème 1.1 *Muni de la loi $+$, l'ensemble $\mathfrak{S}$ possède une structure de groupe commutatif.*

Démonstration : Les propriétés de l'addition sur $\mathfrak{S}$ découlent immédiatement des propriétés correspondantes dans $\mathbb{Q}$: la commutativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$ implique la commutativité sur $\mathfrak{S}$; de même pour l'associativité, pour l'élément neutre $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, et enfin pour le symétrique de toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui n'est autre que la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on notera bien sûr $-u$.

□

1.2 Multiplication sur $\mathfrak{S}$

Définition On définit également le produit de deux suites u et v de $\mathfrak{S}$ comme le produit terme à terme :

$$u \times v = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Tout comme pour l'addition, les propriétés de la multiplication sur $\mathbb{Q}$ permettent d'obtenir le :

Théorème 1.2 *La multiplication sur $\mathfrak{S}$ est commutative, associative, distributive sur l'addition, et possède l'élément neutre $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Corollaire 1.3 *$(\mathfrak{S}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.*

En revanche, la structure de corps ne se transpose pas sur $\mathfrak{S}$, en effet les deux suites u et v suivantes, non nulles, ont pour produit la suite nulle :

$$u : \left\{ \begin{array}{ll} u_{2n} & = 0 \ \forall n \\ u_{2n+1} & = 1 \ \forall n \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ll} v_{2n} & = 1 \ \forall n \\ u_{2n+1} & = 0 \ \forall n \end{array} \right.$$

En réalité, les éléments de $\mathfrak{S}$ inversibles pour la multiplication sont les suites dont *tous les termes* sont non nuls. À cette condition, on trouve un inverse pour la suite en considérant la suite des inverses.

2 Sous-ensembles remarquables de $\mathfrak{S}$

Définition La suite rationnelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 si et seulement si elle vérifie la propriété :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^* \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| < \epsilon$$

L'ensemble des suites convergeant vers 0 sera noté $\mathcal{I}$. De la même façon, on a la notion de convergence vers un rationnel α autre que 0 en remplaçant $|u_n|$ par $|u_n - \alpha|$ dans la définition. (On utilisera aussi cette définition dans $\mathbb{R}$.)

Définition La suite rationnelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si et seulement si elle vérifie la propriété :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^* \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \Longrightarrow |u_n - u_p| < \epsilon$$

Leur ensemble sera noté $\mathcal{C}$.

Définition Enfin, la suite rationnelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si et seulement si :

$$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{Q}_+ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \mathrm{A}$$

Leur ensemble sera noté $\mathcal{B}$.

Théorème 2.1 *On a les inclusions :*

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$$

Démonstration :

- $\boxed{\mathcal{I} \subset \mathcal{C} :}$ Soit $u \in \mathcal{I}$ et $\epsilon > 0$. Soit, d'après la définition de $\mathcal{I}$, n_0 un entier tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
  Pour n et p deux entiers vérifiant $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on a alors, grâce à l'inégalité triangulaire, la majoration :
  $$|u_n - u_p| \leq |u_n| + |u_p| < \epsilon$$
  et donc la suite u vérifie le critère d'appartenance à $\mathcal{C}$.
- $\boxed{\mathcal{C} \subset \mathcal{B} :}$ Soit $u \in \mathcal{C}$ et $\epsilon > 0$ désormais fixé (par exemple, $\epsilon = 1$). Soit, d'après la définition de $\mathcal{C}$, n_0 un entier tel que pour tous n et p, on ait :
  $$(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \Longrightarrow |u_n - u_p| < \epsilon$$
  Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors :
  $$|u_n - u_{n_0}| < \epsilon$$

et donc $$||u_n| - |u_{n_0}|| < \epsilon$$

En posant $\mathrm{A} = \max(|u_{n_0}| + \epsilon, |u_0|, \ldots, |u_{n_0-1}|)$, on a bien pour tout entier n :

$$|u_n| \leq \mathrm{A}$$

et donc la suite u est bien bornée.

□

Théorème 2.2 *$\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{S}$.*

Démonstration :

- $\boxed{\forall u, v \in \mathcal{C}, u - v \in \mathcal{C} :}$ Soient donc u et v, soit $\epsilon > 0$, et soient :
  - n_1 tel que $(n \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1) \Longrightarrow |u_n - u_p| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
  - n_2 tel que $(n \geq n_2 \text{ et } p \geq n_2) \Longrightarrow |v_n - v_p| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

  Pour n et p deux entiers supérieurs ou égaux à $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a alors :

  $$|(u_n - v_n) - (u_p - v_p)| \leq |u_n - u_p| + |v_n - v_p| < \epsilon$$

  et donc la suite $u - v$ est encore de Cauchy.
- $\boxed{\forall u, v \in \mathcal{C}, u \times v \in \mathcal{C} :}$ Soient encore u et v deux suites de Cauchy, donc bornées d'après le théorème précédent, et soit donc A un majorant de ces deux suites.

  Soit $\epsilon > 0$ et soit, d'après la définition d'une suite de Cauchy :
  - n_1 tel que $(n \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1) \Longrightarrow |u_n - u_p| < \dfrac{\epsilon}{2\mathrm{A}}$.
  - n_2 tel que $(n \geq n_2 \text{ et } p \geq n_2) \Longrightarrow |v_n - v_p| < \dfrac{\epsilon}{2\mathrm{A}}$.

  Soit encore $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et deux entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0. Alors

  $$\begin{aligned} |u_n v_n - u_p v_p| &= |u_n (v_n - v_p) + v_p (u_n - u_p)| \\ &\leq |u_n| \times |v_n - v_p| + |v_p| \times |u_n - u_p| \\ &\leq \mathrm{A} \times \frac{\epsilon}{2\mathrm{A}} + \mathrm{A} \times \frac{\epsilon}{2\mathrm{A}} \\ |u_n v_n - u_p v_p| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

  et donc la suite $u \times v$ est encore de Cauchy.
- $\boxed{(1)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} :}$ Immédiat.

□

Théorème 2.3 *$\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{C}$.*

Démonstration :

- $\mathcal{I}$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{C}$: soient u et v deux suites convergeant vers 0, soit $\epsilon > 0$ et soient
  - n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait $|u_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
  - n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on ait $|v_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

  Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et $n \geq n_0$. Alors $|u_n - v_n| \leq |u_n| + |v_n| < \epsilon$, et donc la suite $u - v$ converge également vers 0.

– $\boxed{\forall u \in \mathcal{I}\ \forall v \in \mathcal{C}, u \times v \in \mathcal{I} :}$ Soit donc $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathcal{C}$. En particulier, v est bornée. Soit donc A un majorant de v.
Soit $\epsilon > 0$ et n_0 tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| < \dfrac{\epsilon}{\mathrm{A}}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors :

$$|u_n v_n| \leq |u_n| \cdot |v_n| < \frac{\epsilon}{\mathrm{A}} \times \mathrm{A} = \epsilon$$

et donc la suite $u \times v$ est dans $\mathcal{I}$.

□

Enfin, dire pour l'instant que les suites de Cauchy convergent n'aurait pour l'instant aucun sens : ce résultat est vrai dans $\mathbb{R}$, et nous sommes justement en train de construire $\mathbb{R}$. En revanche, connaissant $\mathbb{Q}$, on peut dire que toute suite de Cauchy est, à partir d'un certain rang, « coincée » dans un intervalle de longueur aussi petite que l'on veut. En fait, on a besoin pour la suite d'un résultat plus faible, qui est le suivant :

Théorème 2.4 *Soit $u \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{I}$. alors il existe un rationnel strictement positif a et un entier n_0 tel que l'on ait :*

$$n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq a \quad \textit{ou bien} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq -a$$

C'est-à-dire qu'une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0 est, à partir d'un certain rang, minorée par un rationnel strictement positif ou majorée par un rationnel strictement négatif. En particulier, la suite est alors de signe constant et ne s'annule pas (toujours à partir d'un certain rang).

Démonstration : Soit donc u une suite de Cauchy ne convergeant pas vers 0, et supposons le résultat faux, c'est-à-dire que pour tout rationnel a strictement positif et tout entier n, on puisse trouver :
– Un entier $n_1 \geq n$ tel que $u_{n_1} < a$.
– Un entier $n_2 \geq n$ tel que $u_{n_2} > -a$.

Soit $\epsilon > 0$ et n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on ait $|u_n - u_p| < \dfrac{\epsilon}{3}$. En appliquant notre hypothèse de raisonnement par l'absurde à $a = \dfrac{\epsilon}{3}$ et $n = n_0$, on trouve deux entiers $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$, tels que $u_{n_1} < \dfrac{\epsilon}{3}$ et $u_{n_2} > -\dfrac{\epsilon}{3}$

Mais alors, par définition de n_0, on a donc $|u_{n_1} - u_{n_2}| < \dfrac{\epsilon}{3}$, et donc :

$$u_{n_1} = u_{n_2} + (u_{n_1} - u_{n_2}) > -\frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3}$$

c'est-à-dire

$$-\frac{2\epsilon}{3} < u_{n_1} < \frac{\epsilon}{3}$$

et donc $|u_{n_1}| < \dfrac{2\epsilon}{3}$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n| = |u_{n_1} + (u_n - u_{n_1})| \leq |u_{n_1}| + |u_n - u_{n_1}| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

On a montré que la suite u vérifie alors le critère de convergence vers 0 pour le rationnel ϵ. Comme tout ceci est bien sûr valable quel que soit ϵ, cela signifie que la suite u converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse $u \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{I}$. L'hypothèse supplémentaire est donc absurde, et le théorème démontré.

□

3 Définition des réels

Muni de tous ces résultats préliminaires, nous sommes désormais en mesure de définir l'ensemble des nombres réels, comme quotient de l'anneau $\mathcal{C}$ par son idéal $\mathcal{I}$. Précisons cette opération :

Sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy, on définit la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$$u\mathfrak{R}v \iff u - v \in \mathcal{I}$$

Comme l'idéal $\mathcal{I}$ est en particulier un sous-groupe additif de $\mathcal{C}$, on vérifie sans difficulté que $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

Définition On appelle *nombre réel* une classe d'équivalence de suites de Cauchy pour la relation $\mathfrak{R}$. L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, peut donc être défini comme l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\mathfrak{R}$ (encore noté $\mathcal{C}/\mathcal{I}$).

N.B. L'idéal $\mathcal{I}$ constitue lui-même une classe déquivalence pour la relation $\mathfrak{R}$: celle du réel nul. En effet, il contient la suite constante égale à 0.

NOTATION : On notera $\overline{u}$ la classe d'équivalence d'une suite u pour la relation $\mathfrak{R}$. La notation $u \in \alpha$, où α est un nombre réel, signifie que la suite u est un *représentant* de la classe α.

3.1 Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$

La relation $\mathfrak{R}$ est bien sûr compatible avec les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathcal{C}$. En effet, si u, u', v et v' sont des suites de Cauchy, alors :

$$\begin{aligned} u\mathfrak{R}u' \text{ et } v\mathfrak{R}v' &\iff u - u' \in \mathcal{I} \text{ et } v - v' \in \mathcal{I} \\ &\implies (u+v) - (u'+v') \in \mathcal{I} \\ &\implies (u+v)\,\mathfrak{R}\,(u'+v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même } \; u\mathfrak{R}u' \text{ et } v\mathfrak{R}v' &\iff u - u' \in \mathcal{I} \text{ et } v - v' \in \mathcal{I} \\ &\implies uv - u'v' = u(v-v') + v'(u-u') \in \mathcal{I} \\ &\implies (uv)\,\mathfrak{R}\,(u'v') \end{aligned}$$

Par passage au quotient, ces opérations héritent des propriétés de commutativité, associativité et distributivité. C'est-à-dire que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif. De plus, le passage au quotient permet d'obtenir la structure de corps :

Théorème 3.1 *$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.*

Démonstration : La seule chose à vérifier est ici que tout réel non nul est inversible (pour la multiplication). Soit donc $\overline{u} \neq \overline{(0)}$ un réel, u un de ses représentants. Par hypothèse, $u \notin \mathcal{I}$ (la classe d'un élément de $\mathcal{I}$ est le réel nul) donc d'après le théorème 2.4, la suite u est non nulle à partir d'un certain rang, disons n_0.

Soit alors v la suite définie par :

$$v_0 = \cdots = v_{n_0} = 1 \text{ et } \forall n > n_0, v_n = u_n$$

La suite v ainsi construite ne s'annulle pas, donc est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{v} = \left(\dfrac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, la suite $u - v$ étant par construction nulle à partir du rang n_0, elle est dans l'idéal $\mathcal{I}$, et donc $v \in \overline{u}$.

Il vient $$\overline{u} \times \frac{\overline{1}}{v} = \overline{v} \times \frac{\overline{1}}{v} = \overline{(1)}$$

c'est-à-dire que le réel $\overline{u}$ est inversible.

□

NOTATION : Tout comme précédemment pour les rationnels, on notera respectivement $-\alpha$ et $\frac{1}{\alpha}$ l'opposé et l'inverse du réel α. Enfin, si α et β sont deux réels, les expressions $\alpha - \beta$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ désignent respectivement les réels $\alpha + (-\beta)$ et $\alpha \times \frac{1}{\beta}$.

3.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition Un réel α est dit *positif* si et seulement si :
- α est le réel nul, ou
- α possède un représentant u qui vérifie

$$\exists a \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq a$$

c'est-à-dire la première alternative du théorème 2.4.

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$. On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $\mathbb{R}_+ \setminus \left\{\overline{(0)}\right\}$ des réels positifs et non nuls, dits *strictement positifs*.

Dans cette définition, on est tenté d'imaginer que la propriété décrite dépend du représentant choisi. En réalité, il n'en est rien :

Théorème 3.2 *Soit α un réel strictement positif. Alors*

$$\forall v \in \alpha, \exists n_v \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Q}_+^* \quad (n \geq n_v \Longrightarrow v_n > 0)$$

Démonstration : Soit donc α un réel strictement positif. Par définition de $\mathbb{R}_+^*$, il existe un représentant u de α, un rationnel a strictement positif et un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n > a$.

Soit alors $v \in \alpha$ un autre représentant du réel α. Alors la suite $v - u$ est dans l'idéal $\mathcal{I}$, donc il existe un entier n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, on ait $|v_n - u_n| < \frac{a}{2}$, et donc $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$.

Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a alors $u_n \geq a$ et $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$, donc $v_n \geq \frac{a}{2} > 0$.

□

N.B. On défini de manière similaire les réels négatifs, les ensembles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-^*$, et l'on a bien sûr une propriété analogue pour les réels strictement négatifs.

Propriétés :
- $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$:
  En effet, si α est un réel de $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*$, et v un de ses réprésentants, celui-ci devrait vérifier les deux conditions :

  $$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > 0$$

  et $$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, v_n < 0$$

  Ces conditions sont évidemment contradictoires.

- $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow -\alpha \in \mathbb{R}_-$:
  Immédiat par la définition de $\mathbb{R}_+$ et de $\mathbb{R}_-$.
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$:
  C'est évident si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Sinon, soit u et v des représentants de α et β respectivement, et
  - n_1, a_1 tels que $n \geq n_1 \Longrightarrow u_n \geq a_1 > 0$,
  - n_2, a_2 tels que $n \geq n_2 \Longrightarrow v_n \geq a_2 > 0$.

  Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a alors nécessairement $u_n + v_n \geq a_1 + a_2$, donc la suite $u + v$ vérifie le critère voulu, et $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$.
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{R}_+$:
  Même principe. On a de même, grâce à la règle des signes dans $\mathbb{Q}$:

  $$\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}_- \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{R}_-$$

  et enfin
  $$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_- \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{R}_+$$
- $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$:
  Soit en effet $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, et u un représentant de α. Comme α est non nul, u n'est pas dans $\mathcal{I}$.
  D'après le théorème 2.4, la possibilité $u_n \geq a > 0$ étant exclue (car sinon $\alpha \in \mathbb{R}_+$), on a un entier n_0 et un rationnel a tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq -a < 0$. Donc $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$.

Définition On définit la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\alpha \leq \beta \iff \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Théorème 3.3 $\leq$ *est une relation d'ordre totale sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration :
- Réflexivité : pour tout α, on a $\alpha - \alpha = 0 \in \mathbb{R}_+$.
- Antisymétrie : $(\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha) \Longrightarrow (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
  Alors $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ donc $\alpha = \beta$.
- Transitivité : $(\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma) \Longrightarrow (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
  Alors $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$, et donc $\alpha \leq \gamma$.
- Ordre total : on sait que $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$. Si α et β sont deux réels, leur différence $\beta - \alpha$ est donc soit dans $\mathbb{R}_+$ soit dans $\mathbb{R}_-$.
  Dans le premier cas, on a alors $\alpha \leq \beta$. Sinon, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$ et donc $\beta \leq \alpha$.

□

Remarque
$$\alpha \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha - 0 \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+$$

De même
$$\alpha \leq 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_-$$

Propriété 3.4 $\leq$ *est compatible avec l'addition sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soient α, β, γ et δ des réels vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.

On a alors
$$\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+$$

donc
$$(\beta - \alpha) + (\delta - \gamma) = (\beta + \delta) - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$$

et donc
$$\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$$ □

Propriété 3.5 $\leq$ *est compatible avec la multiplication sur* $\mathbb{R}_+$.

Démonstration : Soient α, β, γ et δ des éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.

On a alors $$\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+$$

donc $$\beta\delta - \alpha\gamma = \beta(\delta - \gamma) + \gamma(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$$

et donc $$\alpha\gamma \leq \beta\delta$$ □

Enfin, le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ conserve également la structure archimédienne :

Propriété 3.6 $\mathbb{R}$ *est archimédien.*

Démonstration : Soient α et β deux réels strictement positifs. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un représentant de α et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un représentant de β. D'après le théorème 3.2, on peut trouver un rationnel a strictement positif et un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $a_n \geq a$.

D'autre part, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc bornée. Soit b un majorant (dans $\mathbb{Q}$). Comme le corps $\mathbb{Q}$ est lui-même archimédien, il existe un entier p tel que $p \times a \geq b$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ on a $p \times a_n \geq p \times a \geq b \geq b_n$.

La suite $(p \times a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive à partir du rang n_0, et le réel $p\times\alpha-\beta$ est donc dans $\mathbb{R}_+$ (cette propriété étant contradictoire avec la définition de $\mathbb{R}_-^*$).

Et donc $$p \times \alpha \geq \beta$$ □

4 Plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{R}'$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\alpha \in \mathbb{R}' \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q}, (k)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$$

N.B. Le rationnel k ainsi associé est unique : si un autre rationnel h est tel que $(h)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$, alors ceci signifie que les deux suites $(k)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans la même classe d'équivalence, c'est-à-dire que leur différence est dans l'idéal $\mathcal{I}$ des suites convergeant vers 0. Or leur différence est la suite $(k-h)_{n\in\mathbb{N}}$, constante. Pour qu'elle converge vers 0, il faut que ce soit la suite nulle, soit $h = k$.

Théorème 4.1 $\mathbb{R}'$ *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$.

Démonstration :

- Soient α et β dans $\mathbb{R}'$, h et k des rationnels tels que l'on ait $(h)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$ et $(k)_{n\in\mathbb{N}} \in \beta$.
  Alors la suite $(h)_{n\in\mathbb{N}} - (k)_{n\in\mathbb{N}} = (h-k)_{n\in\mathbb{N}}$ est un représentant du réel $\alpha - \beta$, qui est donc lui aussi dans $\mathbb{R}'$.
  Donc $\mathbb{R}'$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
- De la même façon, on montre que $\mathbb{R}'$ est stable par multiplication, et contient l'élement neutre (pour la multiplication) $\overline{(1)}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Enfin, soit $\alpha \in \mathbb{R}'$ et h un rationnel tel que $(h)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$. La suite $\left(\frac{1}{h}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ permet alors d'obtenir un inverse de α dans $\mathbb{R}'$.

□

Il est alors immédiat de vérifier que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Q} \to \mathbb{R}' \\ h \mapsto \overline{(h)_{n\in\mathbb{N}}} \end{array} \right.$$

définit un isomorphisme entre $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}', +, \times)$.

Enfin, φ est compatible avec les relations d'ordre sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$:

Propriété 4.2 $\forall h, k \in \mathbb{Q}, \quad (h \leq k \Longleftrightarrow \varphi(h) \leq \varphi(k))$

Démonstration : En effet

$$\begin{aligned} \varphi(h) \leq \varphi(k) &\Leftrightarrow \overline{(k)}_{n\in\mathbb{N}} - \overline{(h)}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \overline{(k-h)}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow k - h \geq 0 \Leftrightarrow h \leq k \end{aligned}$$

□

Convention : Via l'isomorphisme φ, on identifie $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}'$ en écrivant, dans $\mathbb{R}$, h pour désigner le réel $\overline{(h)}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ceci permet de considérer l'ensemble $\mathbb{R}$ des réel comme un *prolongement* de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ; l'addition, la multiplication et la relation $\leq$ définies sur $\mathbb{R}$ prolongeant l'addition, la multiplication et la relation $\leq$ sur $\mathbb{Q}$.

N.B. $\mathbb{R}$ est une extension stricte de $\mathbb{Q}$, ce qui fait tout l'intérêt de cette construction. Pour voir ceci, il suffit remarquer que toutes les suites de Cauchy, dans $\mathbb{Q}$, qui ne convergent pas, vont converger dans $\mathbb{R}$ (cf en annexe la démonstration de la complétude de $\mathbb{R}$). La limite d'une telle suite est alors un élément de $\mathbb{R}$ qui n'était pas dans $\mathbb{R}'$, sinon on aurait la convergence dans $\mathbb{Q}$ grâce à l'isomorphisme φ^{-1}.

Exemple : La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k!$ est une suite de Cauchy de rationnels, qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

5 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$

Définition Prolongeant la définition de la valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, on associe à tout réel α sa *valeur absolue* $|\alpha|$ par :

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

Cette valeur absolue est bien définie, en effet nous avons montré que l'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (et donc la famille $(\alpha, -\alpha)$ possède un plus grand élément).

Théorème 5.1 *Soit α un réel et u un de ses représentants. Alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de Cauchy, et est un représentant de $|\alpha|$.*

Démonstration : On distingue trois cas :

- $\alpha = 0$, et donc $u \in \mathcal{I}$.
  Alors la suite de terme général $|u_n|$ converge également vers 0. Comme dans ce cas $|\alpha| = 0$, c'est bien un représentant de $|\alpha|$.
- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Q}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq a > 0$.
  Pour $n \geq n_0$, on a alors $|u_n| = u_n$, et donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec la suite u à partir du rang n_0. C'est donc également une suite de Cauchy, de la même classe d'équivalence que la suite u, c'est-à-dire que c'est un représentant du réel $\alpha = |\alpha|$.

– $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$.
De la même façon, à partir d'un certain rang on a $|u_n| = -u_n$, et donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $-u$: elle est donc de Cauchy, représentant du réel $-\alpha = |\alpha|$.

□

Propriétés :

– $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$:
$\boxed{\Leftarrow}$ est immédiat d'après le premier point de la démonstration précédente.
$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors $|\alpha| = \alpha \neq 0$ d'après le deuxième point. Et si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, alors d'après le troisième point $|\alpha| = -\alpha$ donc $|\alpha| \in \mathbb{R}_+^*$.

– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$:
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des représentants de α et β deux réels. D'après le théorème 5.1, la suite $(|a_n + b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est un représentant de $|\alpha + \beta|$, tout comme les suites $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des représentants des réels $|\alpha|$ et $|\beta|$ respectivement.
Or, d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{Q}$, on sait que pour tout entier n, on a $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$. La suite $(|a_n| + |b_n| - |a_n + b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc tous ses termes positifs, et donc $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$:
Avec les mêmes notations, un représentant de $|\alpha\beta|$ est la suite $(|a_n b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire en utilisant la même propriété dans $\mathbb{Q}$ (déjà démontrée), la suite $(|a_n| \cdot |b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, dans laquelle on reconnaît l'expression du produit des deux suites de Cauchy $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où la propriété annoncée.

Annexe : Topologie de $\mathbb{R}$

Nous terminons cette construction des nombres réels par des propriétés d'ordre topologique. Nous avons construit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels (quotienté par l'idéal des suites convergeant vers 0). Nous allons voir ici qu'il ne servirait à rien de recommencer une telle construction en espérant obtenir d'autres nombres, ce qui n'aurait *a priori* rien d'absurde. En fait, toute suite de Cauchy de réels converge elle-même vers un réel : on exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet.

Lemme *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha < \beta$. On cherche un rationnel $a \in]\,\alpha\,;\beta\,[$.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des représentants de α et β. On a $\beta - \alpha > 0$ donc il existe un rationnel $\epsilon > 0$ et un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $b_n - a_n \geq \epsilon$ (théorème 2.4, la deuxième possibilité étant exclue).

Soit ensuite, en utilisant la définition d'une suite de Cauchy, $n_1 \geq n_0$ tel que pour tous $n, p \geq n_1$, $|a_n - a_p| < \dfrac{\epsilon}{4}$ et $|b_n - b_p| < \dfrac{\epsilon}{4}$.

Il suffit alors de poser $a = a_{n_1} + \dfrac{\epsilon}{2}$. En effet, on a pour tout $n \geq n_1$:

$$a_n \leq a_{n_1} + \frac{\epsilon}{4} \leq a - \frac{\epsilon}{4}$$

D'autre part $n_1 \geq n_0$ donc $b_{n_1} \geq a_{n_1} + \epsilon$ et donc pour tout $n \geq n_1$:

$$b_n \geq b_{n_1} - \frac{\epsilon}{4} \geq a + \frac{\epsilon}{4}$$

Le rationnel a construit est donc bien dans l'intervalle $]\,\alpha\,;\beta\,[$. □

Afin de démontrer la complétude de $\mathbb{R}$, on a besoin du lemme technique qui suit. Rappelons l'existence d'un plongement φ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Via ce plongement, une suite de Cauchy de rationnels nous donne une suite de Cauchy (de rationnels également) dans $\mathbb{R}$.

Lemme *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de rationnels, et α le réel qu'elle représente. Considérée dans $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers le réel α.*

Démonstration : Soit ϵ un réel strictement positif, et soit ϵ' un rationnel vérifiant $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ (c'est possible car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n, p \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - u_p| < \epsilon'$.

Pour $n \geq n_0$ désormais fixé, ceci implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est comprise, à partir du rang n_0, entre la suite constante égale à $u_n - \epsilon'$ et la suite constante égale à $u_n + \epsilon'$, d'où dans $\mathbb{R}$:

$$|\alpha - u_n| < \epsilon' \leq \epsilon$$

Mais ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire que dans $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. □

Théorème $\mathbb{R}$ *est complet.*

Démonstration : Soit une suite de Cauchy $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers 0. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels vérifiant :

$$\forall n, \quad |u_n - \alpha_n| \leq \epsilon_n$$

(Cette suite étant obtenue en prenant, pour chaque indice n, un rationnel u_n dans l'intervalle $]\,\alpha_n - \epsilon_n\,;\alpha_n + \epsilon_n\,[$.)

Par l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$), on a pour deux entiers n et p :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_p| + |\alpha_p - u_p| \leq \epsilon_n + \epsilon_p + |\alpha_n - \alpha_p|$$

On en déduit aisément que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi de Cauchy, et qu'elle converge vers le réel α qu'elle représente (lemme précédent).

Comme par construction $u_n - \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient :

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

et la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien dans $\mathbb{R}$. □

N.B. L'ensemble $\mathbb{R}$, construit par les suites de Cauchy de rationnels, est appelé *complété de Cauchy* de $\mathbb{Q}$. Cette construction est possible à partir de n'importe quel groupe archimédien.

Enfin, il existe d'autres constructions de $\mathbb{R}$, notamment par les coupures (construction du mathématicien allemand Dedekind). Cette construction, dans

les grandes lignes, consiste à définir un réel comme la borne supérieure d'un ensemble majoré de rationnels. Plus laborieuse pour pas mal de choses, notamment la définition des opération, et bien sûr la complétude, elle a néanmoins l'avantage de fournir sans trop d'effort la propriété de la borne supérieure. Voyons comment l'obtenir par la construction de Cauchy :

Théorème *Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré possède une borne supérieure (un majorant, qui est le plus petit des majorants de la partie).*

Démonstration : Soit donc A une partie de $\mathbb{R}$, majorée. Si A possède un plus grand élément m, il n'y a rien à démontrer : tout majorant de A doit majorer m, et donc m est le plus petit des majorants de A.

On se place donc dans le cas contraire, où la partie A ne possède pas de plus grand élément. En particulier, quel que soit $a \in$ A, on peut trouver un autre élément $b \in$ A strictement supérieur. Nous allons construire la borne supérieure de A comme la limite de deux suites adjacentes, dont il faudra auparavant montrer qu'elles sont de Cauchy. Il s'agira d'une suite croissante d'élément de A et d'une suite décroissante de majorants de A.

Soit donc u_0 un élément quelconque de A, et m_0 un majorant (quelconque également). On construit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante.

Supposons $u_0, \dots, u_n$ construits, ainsi que $m_0, \dots, m_n$.

- Si $\dfrac{u_n + m_n}{2}$ est encore un majorant de A, on pose $m_{n+1} = \dfrac{u_n + m_n}{2}$, et l'on choisit dans A l'élément $u_{n+1} > u_n$ de façon arbitraire. C'est possible puisque A n'a pas de plus grand élément.
- Sinon, on peut trouver un élément de A strictement supérieur à $\dfrac{u_n + m_n}{2}$, qui sera u_{n+1}, et l'on pose $m_{n+1} = m_n$.

Montrons que ces deux suites sont bien des suites de Cauchy. Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad 0 < m_n - u_n < \frac{m_0 - u_0}{2^n}$$

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet lors de la première étape de construction, deux cas se présentent.

  Dans le premier cas, $m_1 = \dfrac{u_0 + m_0}{2}$ est un majorant de A, donc

  $$u_0 < u_1 < \frac{u_0 + m_0}{2}$$

  et donc $$0 < m_1 - u_1 < m_1 - u_0 = \frac{m_0 - u_0}{2}$$

  Dans le second cas, on a $u_1 > \dfrac{u_0 + m_0}{2}$ et $m_1 = m_0$, donc

  $$0 < m_1 - u_1 < m_0 - \frac{u_0 + m_0}{2} = \frac{m_0 - u_0}{2}$$

- $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: Supposons en effet $0 < m_n - u_n < \dfrac{m_0 - u_0}{2^n}$.

  Par le même raisonnement que pour la première étape, on obtient en distinguant les deux cas $0 < m_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{m_n - u_n}{2}$. En appliquant

l'hypothèse de récurrence, on a donc pour $m_{n+1} - u_{n+1}$ l'encadrement voulu, à savoir :

$$0 < m_{n+1} - u_{n+1} < \frac{m_0 - u_0}{2^{n+1}}$$

– On conclue par récurrence que la propriété est vraie pour tout n.

Soit maintenant ϵ un réel strictement positif. Comme nous savons déjà que $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier p tel que $p \times \epsilon \geq m_0 - u_0$. Soit alors n_0 un entier tel que $2^{n_0} \geq p$. Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$2^n \times \epsilon \geq p \times \epsilon \geq m_0 - u_0$$

donc $$\frac{m_0 - u_0}{2^n} \leq \epsilon \text{ et donc } 0 < m_n - u_n < \epsilon$$

Soient maintenant n et p deux entiers supérieurs ou égaux à n_0. On suppose par exemple $n \leq p$. On a alors les inégalités :

$$u_n \leq u_p < m_p \leq m_n$$

donc $$|u_n - u_p| < |u_n - m_n| < \epsilon$$

et $$|m_n - m_p| < |u_n - m_n| < \epsilon$$

Ceci montre que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy.

D'après le théorème précédent, elles convergent donc. Comme de plus la différence $m_n - u_n$ tend vers 0, elles ont même limite. Soit α cette limite commune. Nous allons montrer que α est la borne supérieure recherchée.

Pour ceci, nous allons avoir besoin de la propriété suivante :

Propriété *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$) de limite x, et y un réel tel que l'on ait :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq y$$

Alors $$x \geq y$$

On a bien sûr une propriété analogue en remplaçant $\geq$ par $\leq$. Nous remettons à plus tard la démonstration de cette propriété, pour pouvoir terminer celle de notre théorème.

– α est un majorant de A. En effet, si l'on considère un élément x de A, la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes plus grands que x. D'après la propriété précédente, il en va donc de même pour sa limite α, qui majore donc x, et donc la partie A dans son ensemble.
– α est le plus petit majorant possible. Soit en effet $y < \alpha$. Supposons que le réel y est encore un majorant de A. En particulier, c'est aussi un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc (propriété) de sa limite α, ce qui est absurde.

Nous avons montré que le réel α est bien le plus petit des majorants, c'est-à-dire la borne supérieure. □

Démonstration de la propriété : Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$) de limite x, et y un réel tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq y$$

Tout comme pour la démonstration de la complétude de $\mathbb{R}$, nous allons revenir par densité à des suites de rationnels. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui tend vers 0. On commence par construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que pour tout n, on ait $x_n < a_n < x_n + \epsilon_n$.

Ensuite, on construit une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels pris respectivement, par densité de $\mathbb{Q}$, dans les intervalles $]\, y\,;\min(y+\epsilon_n, a_n)\,[$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers x et y. Or par construction, on a pour tout n, $b_n < a_n$, donc la suite $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente un réel positif, c'est-à-dire que $x - y \geq 0$, et donc $x \geq y$.

□

N.B. Muni de cette propriété, il est assez facile d'exhiber des réels qui ne sont pas rationnels (plus que pour la suite $\sum_{k=1}^{n} 1/k!$).

Exemple : Il existe un réel de carré 2. Ce réel n'est pas un rationnel.

En effet, l'ensemble des réels de carré plus petit que 2 est non vide (0 est dedans !) et majoré, par exemple par 2 : la relation d'ordre étant compatible avec la multiplication sur $\mathbb{R}_+$, on a $x \geq 2 \Longrightarrow x^2 \geq 4 > 2$. Tout réel positif de carré plus grand que 2 est un majorant de notre partie, par le même argument.

La borne supérieure α de cet ensemble est alors un réel dont le carré est 2 :

- si $\alpha^2 > 2$, on pose $\epsilon = \left(\alpha^2 - 2\right)/5$, et l'on a

  $$(\alpha - \epsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\epsilon + \epsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\epsilon$$

  Or on sait que $\alpha \leq 2$, donc $2\alpha\epsilon \leq 4\epsilon$. Il vient la minoration :

  $$(\alpha - \epsilon)^2 \geq \alpha^2 - 4\left(\alpha^2 - 2\right)/5 > 2$$

  Donc $\alpha - \epsilon$ est encore un majorant, ce qui contredit la définition de α.
- Si au contraire $\alpha^2 < 2$, on pose cette fois $\epsilon = \left(2 - \alpha^2\right)/5$, et alors

  $$(\alpha + \epsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2$$

  Comme $0 \leq \alpha^2 < 2$, on a $2 - \alpha^2 \leq 2$, et donc $\epsilon < 1$, d'où l'on tire $\epsilon^2 < \epsilon$. Et comme bien sûr $\alpha \leq 2$, on a toujours $2\alpha\epsilon \leq 4\epsilon$.

  Il vient $$(\alpha + \epsilon)^2 < \alpha^2 + 5\epsilon = 2$$

  Le réel $\alpha + \epsilon$ construit est donc de carré strictement inférieur à 2, ce qui contredit le fait que α majore l'ensemble des réels de carré inférieur à 2.

Le réel α construit vérifie donc bien $\alpha^2 = 2$.

Or, on ne peut construire de rationnel de carré 2 : si $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, en supposant p et q premiers entre eux (représentant irréductible), on obtient $p^2 = 2q^2$, donc successivement :

- 2 divise p^2, donc 2 divise p (un nombre impair a un carré impair).
- p s'écrit donc $2p'$, donc $p^2 = 4p'^2$.
- En remplaçant dans l'égalité d'origine, il vient $2p'^2 = q^2$.
- Donc 2 divise q^2, donc 2 divise q.
- p et q ont 2 comme diviseur commun, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.

Irrationalité de Pi

Historique

C'est en 1761 que Lambert démontra le premier l'irrationalité de π. Sa démonstration, très différente de celle présentée ici, reposait sur la décomposition en fractions continues de $\tan x$.

Il faudra attendre 1882 pour que Lindemann démontre la transcendance de π, prouvant du même coup l'impossibilité de la *quadrature du cercle*.

Notations

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction p_n définie par $p_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^n$ et on s'intéresse à l'intégrale $I_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p_n(x)\cos x\, dx$.

Lemme Pour tout nombre réel $K > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{K^n}{n!} = 0$.

En effet, si on pose $u_n = \frac{K^n}{n!}$ pour tout entier $n \geq 0$, alors $(\forall n \geq K)\ \ 0 < u_{n+1} = \frac{K}{n+1}\, u_n < u_n$.

La suite $(u_n)_{n\geq K}$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite réelle l vérifiant

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{K}{n+1}\, u_n = 0.$$

Encadrement de I_n

$\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right)\ \ 0 \leq \frac{\pi^2}{4} - x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$ et $\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}\right]\right)\ \ \frac{\pi^2}{4} - x^2 \geq \frac{2\pi^2}{9}$.

On en déduit que : $(\forall n \geq 1)\ \ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cos x\, dx = \frac{2}{n!}\left(\frac{a^2}{4}\right)^n$

et que : $(\forall n \geq 1)\ \ I_n \geq \frac{1}{n!}\int_{-\pi/6}^{+\pi/6}\left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^n \cos x\, dx = \frac{1}{n!}\left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^n > 0.$

Donc, pour tout réel $b > 0$, $(b^n I_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

Calcul de I_n

A l'aide d'intégrations par parties successives jusqu'à disparition du facteur polynomial, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left[p_n^{(k)}(x)\cos\left(x - (k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(p_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + p_n^{(k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(p_n^{(2j)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(j\pi) + p_n^{(2j)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(j\pi)\right) \\ &= 2\sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, p_n^{(2j)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

car p_n étant une fonction polynomiale paire, il en va de même des fonctions dérivées $p_n^{(2j)}$.

Calcul des dérivées successives de p_n

On considère les fonctions polynomiales définies par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^n$ et $g_n(x) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)^n$.

Alors $(\forall k \leq n)\,(\forall x \in \mathbb{R})\quad f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k}{(n-k)!}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{n-k}$ et $g_n^{(k)}(x) = \dfrac{1}{(n-k)!}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)^{n-k}$

et $(\forall k > n)\quad f_n^{(k)} = g_n^{(k)} = 0$.

En particulier, $(\forall k \in \mathbb{N})\ \ f_n^{(k)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g_n^{(k)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n-k}}{(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Or $p_n = n!\, f_n\, g_n$, donc $(\forall k \in \mathbb{N})\ \ p_n^{(k)} = n! \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_n^{(j)} g_n^{(k-j)}$ (formule de *Leibniz*).

En particulier, $(\forall k \in \mathbb{N})\ \ p_n^{(k)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} n!\binom{k}{n}(-1)^n\, g_n^{(k-n)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et plus précisément, $(\forall k \in \mathbb{N})\ \ p_n^{(k)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n \binom{k}{n} \dfrac{n!}{(2n-k)!}\pi^{2n-k} & \text{si } n \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $c_{n,k} \overset{déf}{=} (-1)^n \binom{k}{n} \dfrac{n!}{(2n-k)!} = (-1)^n \binom{k}{n}\binom{n}{k-n}(k-n)! \in \mathbb{Z}$ lorsque $n \leq k \leq 2n$.

Irrationalité de π^2

Supposons un instant qu'il existe deux entiers a et b strictement positifs tels que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$.

Alors $(\forall j \in \mathbb{N})\ \ b^n p_n^{(2j)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} b^n c_{n,2j}\, \pi^{2(n-j)} = c_{n,2j}\, a^{n-j}\, b^j & \text{si } n \leq 2j \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $(\forall j \in \mathbb{N})\ \ b^n p_n^{(2j)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}$, et donc $b^n I_n = 2\sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, b^n p_n^{(2j)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}$.

$(b^n I_n)_{n\geq 1}$ serait donc une suite d'entiers strictement positifs qui converge vers 0.

L'inexistence d'une telle suite prouve l'absurdité de l'hypothèse selon laquelle π^2 serait rationnel.

π^2 est donc irrationnel, ce qui entraîne l'irrationalité de π.

Références

[1] Gilles COSTANTINI. *Suites de nombres réels.*
http ://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/suitesR.pdf

[2] Ghislain DUPONT. *Irrationnalité de Pi.*
perso.univ-lemans.fr/∼dupont/Maths/Pi.pdf

[3] Jean GOUNON. *Nombres rationnels.*
http ://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/logique/rationnels.pdf

[4] Jean GOUNON. *Nombres réels.*
http ://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/logique/reels.pdf

[5] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition .*

[6] Jean-Etienne ROMBALDI. *Le corps des réels.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rombaldi/Capes/AnalyseChap1.pdf

[7] Exercices collection EXO7. *Propriétés de* $\mathbb{R}$.
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00009.pdf