Master 1 Enseignement Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 2 - Suites de réels, fonctions numériques.

1 Propriétés de $\mathbb{R}$ liées à la relation d'ordre

Théorème 1.1 *Pour qu'une suite $(x_n)_n$ de nombres réels ait une limite, il faut et il suffit que cette suite soit de Cauchy ; cette limite x est unique. Et si on a $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou même seulement pour n assez grand), on a $x \geq 0$.*

1.1 Ensembles adjacents

Définition 1.1 *Nous dirons que deux sous-ensembles A, B de $\mathbb{R}$ sont adjacents si*

1. *pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $a \leq b$,*
2. *quel que soit ε réel positif, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b - a < \varepsilon$.*

Théorème 1.2 *Si A, B sont deux ensembles adjacents dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel c et un seul, satisfaisant à $a \leq c \leq b$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$.*

1.2 Intervalles emboîtés. Axiome de Cantor

Proposition 1.1 *Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante d'intervalles de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire telle que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) dont la longueur $b_n - a_n$ tend vers zéro. Alors ces intervalles ont un seul point commun c qui est la limite commune des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.*

On obtient un énoncé équivalent à la proposition précédente en considérant les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Proposition 1.2 *Soit $(a_n)_n$ une suite croissante et $(b_n)_n$ une suite décroissante de nombres réels, vérifiant $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que la suite $(b_n - a_n)_n$ tende vers zéro. Alors ces suites (dites adjacentes) ont une limite commune c.*

Exemple 1.1 La suite $(a_n)_n$ des valeurs décimales approchées par défaut d'ordre n d'un nombre réel x et la suite associée $b_n = a_n + 10^{-n}$ (valeurs décimales approchées par excès) sont des suites adjacentes qui convergent vers x.

Exercice 1 Soit x un réel dans $[0, 1]$. Montrer, sans utiliser la fonction ln, que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$$

sont convergentes.

<u>Correction</u> :

- Pour $x = 0$, ces suites stationnent sur 1.
- On peut démontrer que u est croissante pour $x > 0$ (et majorée pour $x \in]0, 2[$). Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x)}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec $\dfrac{x}{n^2 + n(1+x) + x} < 1$ pour tout réel $x > 0$. On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :

$$\left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} > 1 - \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x) + x} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$$

(on a $n^2 + n(1+x) + x = (n+1)(n+x)$) et donc $u_{n+1} > \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = u_n$, ce qui signifie que, pour $x > 0$, $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

- Pour $n \geq 1$ on a :
$$v_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n^2+n(1+x)+x}{n^2+n(1+x)}\right)^{n+1}$$
$$= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n^2+n(1+x)}\right)^{n+1}$$
et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) pour $x > 0$, on obtient :
$$\left(1+\frac{x}{n^2+n(1+x)}\right)^{n+1} > 1+\frac{(n+1)x}{n^2+n(1+x)} > 1+\frac{x}{n+1}$$
(c'est équivalent à $(n+1)^2x > x(n^2+n(1+x))$ encore équivalent à $(n+1)^2 > n^2+n(1+x)$ ou à $n(1-x)+1 > 0$ qui est vérifié pour $x \leq 1$) et donc
$$v_n > \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+2} = v_{n+1},$$
ce qui signifie que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour $x \in]0,1]$.
- Enfin, pour $n \geq 1$, on a : $v_n - u_n = u_n\dfrac{x}{n} \geq 0$ et donc comme $u_n \leq v_n \leq v_1$ (v est décroissante), cela donne $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{xv_1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$.

Ces deux suites sont donc adjacentes et en conséquence convergentes.

Exercice 2 Montrer que les suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\ v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$
convergent vers la même limite irrationnelle e.

Correction :

Il est clair que u est croissante et pour $n \geq 1$, on a :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$
donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. De plus, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n!}\right) = 0$, on déduit que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. On sait de plus que la limite e de u est irrationnelle. Les encadrements $u_n \leq e \leq v_m$ nous permettent de donner des valeurs approchées de e par défaut et par excès. Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient : $u_{10} \sim 2,7183 \leq e \leq v_{10} \sim 2,7183$ avec une majoration de l'erreur d'approximation donnée par :
$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10!} \sim 2,755.10^{-7}.$$
On peut aussi utiliser la suite $v = (v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ (les suites u et v sont encore adjacentes) et on a en fait :
$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10.10!} \sim 2,755.10^{-8}.$$

Exercice 3 Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& a \\ v_0 &=& b \end{array}\right.,\ \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcll} u_{n+1} &=& \dfrac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} & \text{(moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} &=& \dfrac{u_n+v_n}{2} & \text{(moyenne arithmétique)} \end{array}\right.$$
Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\sqrt{ab}$ (moyenne géométrique). Pour $b = 1$ on a des approximations de $\sqrt{a}$.

Correction :

On vérifie facilement par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$ avec $u_0 - v_0 = a - b < 0$. Or, pour $n \geq 1$, on a
$$u_n - v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}} - \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = -\frac{(u_{n-1}-v_{n-1})^2}{2(u_{n-1}+v_{n-1})} \leq 0.$$

Il en résulte que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Avec $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n = \dfrac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}$, on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Enfin avec $u_n > 0$ on a :

$$0 \le v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \le \frac{v_n-u_n}{2}$$

et par récurrence :

$$0 \le v_n - u_n \le \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\lambda \ge 0$. D'autre part, avec $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$, on déduit que $u_nv_n = u_0v_0$ pour tout n et $\lambda^2 = u_0v_0$. Donc, :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{u_0v_0} = \sqrt{ab}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & a \\ v_0 & = & b \end{array}\right., \forall n\in\mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \sqrt{u_nv_n} \text{ (moyenne géométrique)} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{array}\right. .$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et de b.
<u>*Correction*</u> :
On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On rappelle que pour tous réels u, v positifs on a $\sqrt{uv} \le \dfrac{u+v}{2}$ (conséquence de $(\sqrt{v}-\sqrt{u})^2 \ge 0$). Avec l'inégalité précédente, on déduit que $u_n \le v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Avec $u \le \sqrt{uv} \le v$ et $u \le \dfrac{u+v}{2} \le v$ pour $u > 0$ et $v > 0$, on déduit que $u_n \le u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \le v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante . Enfin avec :

$$0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le v_{n+1} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2},$$

on déduit par récurrence sur $n \ge 0$ que $0 \le v_n - u_n \le \dfrac{b-a}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = 0$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\ell > 0$. On peut montrer que cette limite est $\ell = \dfrac{\pi}{2.E(a,b)}$ où $E(a,b)$ est l'intégrale elliptique définie par :

$$E(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Définition 2.1 *Soit E un ensemble totalement ordonné. Une partie X de E est dite majorée (resp. minorée) s'il existe au moins un élément m de E tel que pour tout $x\in X$, on ait $x \le m$ (resp. $x \ge m$) et l'ensemble X est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré*

Définition 2.2 *Soit X une partie majorée de l'ensemble totalement ordonné E. Si l'ensemble des majorants de X (non vide par hypothèse) admet un plus petit élément M (nécessairement unique), on dit que M est la borne supérieure de X et on écrit $M = \sup(X)$ ou $M = \sup\{x/x\in X\}$. De même, la borne inférieure m d'un sous-ensemble minoré X de E est le plus grand minorant de X (lorsqu'il existe) et on écrit $m = \inf(X)$ ou $m = \inf\{x/x\in X\}$.*

Rappelons que toute partie finie non vide de E, admet pour borne supérieure (resp. inférieure) le plus grand (resp. le plus petit) de ses éléments.

Théorème 2.1 *(Théorème de la borne supérieure)*
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Théorème 2.2 *Caractérisation des bornes supérieure et inférieure*
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Pour que le nombre réel M soit la borne supérieure de X, il faut et il suffit que

1. *tout $x \in X$ vérifie $x \leq M$*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ vérifiant $x > M - \varepsilon$.*

Pour que le nombre réel m soit la borne inférieure de X ($X \subset \mathbb{R}$), il faut et il suffit que

3. *tout $x \in X$ vérifie $x \geq m$*
4. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ vérifiant $x < m + \varepsilon$.*

Définition 2.3 *Une partie X de $\mathbb{R}$ est bornée s'il existe un nombre k vérifiant $|x| \leq k$ pour tout $x \in X$.*

Propriété 2.1 *Toute partie bornée non vide X de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure M et une borne inférieure m et l'intervalle $[m, M]$ est le plus petit intervalle fermé contenant X.*

On notera que les bornes (supérieure ou inférieure) d'un ensemble X n'appartiennent pas nécessairement à X (cependant, tout ensemble fini contient ses bornes).

Théorème 2.3 *Si X admet une borne inférieure (resp. supérieure), cette dernière est unique.*

Exemple 2.1 Si $X = [0, 1[$, alors 0 est le plus petit élément (et donc la borne inférieure) et 1 est la borne supérieure de X, mais cette borne supérieure n'est pas dans X, il n'y a donc pas de plus grand élément.

Exemple 2.2 $X = [0, +\infty[$ n'a ni plus grand élément ni borne supérieure.

Dans le cas où X est une partie finie de $\mathbb{R}$, ses éléments peuvent être rangés dans l'ordre croissant et l'existence des bornes inférieure et supérieure est assurée sans référence au théorème précédent, ces bornes étant des éléments de X. Dans ce cas de figure, on dit que $\inf(X)$ (resp. $\sup(X)$) est le plus petit (resp. plus grand) élément de X, on le note aussi $\min(X)$ (resp. $\max(X)$). On rappelle que la valeur absolue d'un réel x est définie par : $|x| = \max\{-x, x\} = \left\{\begin{array}{ccc} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array}\right.$ et la majoration $|x| \leq \alpha$ est équivalente à $-\alpha \leq x \leq \alpha$ ou encore à $x \in [-\alpha, \alpha]$. Plus généralement, les équivalences suivantes sont bien utiles :

$$|x - x_0| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x - x_0 \leq \alpha \Leftrightarrow x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

ou encore :

$$|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x - x_0 < x \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Une conséquence importante du théorème de la borne supérieure est la propriété d'Archimède qui suit.

Théorème 2.4 *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien, c'est-à-dire que :*

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\star, \forall b \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}^\star, na > b.$$

De ce théorème on déduit le résultat important suivant sur l'existence de la partie entière d'un réel.

Théorème 2.5 *Pour tout réel x il existe un unique entier relatif n tel que :*

$$n \leq x < n + 1.$$

Exercice 5 Montrer que pour tous réels a et b, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \max(a, b) & = & \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{|b-a|}{2} \\ \min(a, b) & = & \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{|b-a|}{2} \end{array}\right. .$$

On peut retenir ces égalités en remarquant que $\min(a, b)$ est la borne inférieure de l'intervalle d'extrémités a, b, et $\max(a, b)$ la borne supérieure et $\dfrac{a+b}{2}$ le milieu de cet intervalle.
<u>Correction</u> :
Il suffit de vérifier les relations lorsque $a > b$ et $b > a$.

Exercice 6 Montrer que le sous-ensemble $X = \{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

<u>Correction</u> :

- On montre tout d'abord que X ne possède pas de plus grand élément. Raisonnons par l'absurde et supposons que X possède un plus grand élément y. Par définition, $y^2 < 2$. Il existe donc un entier n tel que $2 - y^2 > 10^{-n}$. On pose $z = y + 10^{-n-1}$ donc $z \in \mathbb{Q}$. Comme $y < 2$,

$$z^2 = y^2 + 2y10^{-n-1} + 10^{-2n-2} < y^2 + 2y10^{-n-1} + 10^{-n-1} < y^2 + 5\times 10^{-n-1} < y^2 + 10^{-n} < 2.$$

- On montre ensuite que X ne possède pas de borne supérieure. On procède toujours par l'absurde. Supposons que X possède une borne supérieure $y \in \mathbb{Q}$. Comme X ne possède pas de plus grand élément, $y^2 > 2$. Il existe un entier n tel que $y^2 - 2 > 10^{-n}$. On pose $z = y - 10^{-n-1}$. On remarque que $y < 2$. On a alors
$$z^2 = y^2 - 2y.10^{-n-1} + 10^{-2n-2} > y^2 - 2y.10^{-n-1} > y^2 - 4.10^{-n-1} > y^2 - 10^{-n} > 2.$$
Donc z est un majorant de X et $z < y$, ce qui est une contradiction. On conclut que X n'a pas de borne supérieure.

Exercice 7 Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble :
$$A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}.$$
Montrer que si A et B sont majorés, il en est alors de même de $A + B$ et :
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Correction :
Notons $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$. Pour tout $z = x + y$ avec $(x, y) \in A \times B$, on a :
$$z = x + y \leq M + M'.$$
L'ensemble $A + B$ est donc non vide majoré et en conséquence admet une borne supérieure $M'' \leq M + M'$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tels que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ et $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, ce qui donne $z = x + y \in A + B$ tel que :
$$M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'.$$
Le réel $M + M'$ est donc la borne supérieure de $A + B$.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \sup(A \cup B) & = & \max(\sup(A), \sup(B)) \\ \inf(A \cup B) & = & \min(\inf(A), \inf(B)) \\ A \subset B & \Rightarrow & \inf(B) \leq \inf(A) \text{ et } \sup(A) \leq \sup(B) \end{array}\right. .$$

Correction :

- Supposons que $A \subset B$. Pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, ce qui entraîne, par définition des bornes inférieure et supérieure, $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
- Supposons que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Si $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B)$, il en résulte que $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $x \in B \subset A \cup B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$. On a donc $\sup(A \cup B) = \sup(B)$.
- On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

Exercice 9 Déterminer, si elles existent, les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants :
$$\begin{array}{rcl} A & = & \{2^{-n} / n \in \mathbb{N}\} \\ B & = & [0, 1[\cap \mathbb{Q} \\ C & = & \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^\star\right\} \end{array} .$$

Correction :

- On a $2^0 = 1 \in A$ et $2^{-n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que 1 est le plus grand élément (et donc la borne supérieure) de A. Tous les éléments de A étant strictement positifs, 0 est un minorant de X. Comme pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier naturel n tel que $0 < 2^{-n} < \varepsilon$ (c'est équivalent à $n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$), on déduit que 0 est la borne inférieure de X mais pas le plus petit élément.
- L'ensemble B étant contenu dans $[0, 1]$ est borné. Comme $0 \in B$ et minore B, on a $0 = \min(B)$. L'ensemble B est majoré par 1 et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n \geq 1$ tel que $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1$ avec $1 - \frac{1}{n} \in B$, il en résulte que $1 = \sup(B)$ et B n'a pas de plus grand élément car $1 \notin B$.
- En séparant les entiers pairs des entiers impairs, on a $C = C_1 \cup C_2$ avec :
$$C_1 = \left\{1 + \frac{1}{2p} / p \in \mathbb{N}^\star\right\}, C_2 = \left\{-1 + \frac{1}{2p+1} / p \in \mathbb{N}\right\}$$
et comme pour l'ensemble A, on vérifie que $\inf(C_1) = 1 \notin C_1$, $\sup(C_1) = \frac{3}{2} \in C_1$, $\inf(C_2) = -1 \notin C_2$, $\sup(C_2) = 0 \in C_1$ soit :

$$\sup(C)=\max(\sup(C_1),\sup(C_2))=\frac{3}{2}\in C \text{ et } \inf(C)=\min(\inf(C_1),\inf(C_2))=-1\notin C.$$

Exercice 10 Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que si $M=\sup(X)\notin X$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon>0$ une infinité d'éléments de X dans l'intervalle $]M-\varepsilon,M[$.

Correction :
On se donne $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure M, il existe $x_0\in X$ tel que $M-\varepsilon<x_0<M$ (on a $x_0<M$ du fait que $M\notin X$). Toujours par définition de M, on peut trouver $x_1\in X$ tel que $x_0<x_1<M$. Et par récurrence on construit une suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'intervalle $]M-\varepsilon,M[$. En effet, x_0 et x_1 ont été trouvés et supposant trouvés $x_0<x_1<\ldots<x_n$ dans $]M-\varepsilon,M[\cap X$, on peut trouver x_{n+1} dans X tel que $x_n<x_{n+1}<M$.

3 Suites monotones

Proposition 3.1 *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites convergentes de nombres réels, vérifiant pour n assez grand, l'inégalité $x_n\leq y_n$. Alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty}x_n\leq\lim_{n\to+\infty}y_n.$$

On insiste sur le fait que l'inégalité stricte $x_n<y_n$ n'entraîne pas l'inégalité stricte $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n<\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. Seules les inégalités larges se conservent par passage à la limite.

Remarque 3.1 La convergence et la limite d'une suite ne sont pas altérées lorsqu'on modifie de façon quelconque un nombre fini de termes de la suite.

Lemme 3.1 *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de nombres réels convergeant vers le même nombre réel z. Si $(z_n)_n$ est une suite de nombres réels vérifiant, pour n assez grand, l'inégalité $x_n\leq z_n\leq y_n$ alors la suite $(z_n)_n$ converge vers z.*

Théorème 3.1 *Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée a une limite finie. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
Dans $\mathbb{R}$, toute suite décroissante et minorée a une limite finie. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 11 Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, il en est de même de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes de Césaro définie par $v_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.
Correction :
On a $v_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}v_n+\dfrac{u_{n+1}}{n+2}$ et donc :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{1}{n+2}(u_{n+1}-v_n)=\frac{1}{n+2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\\&=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left((n+1)u_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}u_k\right)=\frac{1}{(n+2)(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1}-u_k)\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Exercice 12 Étudier, sans utiliser la fonction ln, la suite $u=(\sqrt[n]{\lambda})_{n\geq1}$ où λ est un nombre réel strictement positif.
Correction :
Avec $\sqrt[n]{1}=1$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\lambda}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$, il suffit de montrer le résultat pour $\lambda>1$. Dans ce cas, la suite $(\sqrt[n]{\lambda})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{\lambda}<\sqrt[n]{\lambda}$ équivaut à $\lambda<\lambda^{\frac{n+1}{n}}=\lambda\sqrt[n]{\lambda}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{\lambda}>1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $l\geq1$. Si $l>1$, pour $\gamma\in]1,l[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{\lambda}>\gamma$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui entraîne $\lambda>\gamma^n$ pour tout $n\geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma^n=+\infty$. On a donc $l=1$.

Exercice 13 Montrer que la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence, $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$ est convergente vers le nombre d'or $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Correction :
On vérifie facilement par récurrence que $1\leq u_n\leq2$ pour tout $n\geq1$. En effet, pour $n=1$, on a $1=u_1<2$ et

en supposant acquis le résultat au rang $n \geq 1$, on a $1 < \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} < 2$. Et avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{1+u_n}}{u_n} > 1$ (toujours démontré par récurrence), on déduit que u est croissante majorée, donc convergente vers $l \in [1,2]$. De $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$, on déduit que $l = \sqrt{l+1}$, soit $l^2 - l - 1 = 0$ avec $1 \leq l \leq 2$, ce qui équivaut à $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 14 Soit x un réel dans $]0,2[$. Montrer, sans utiliser la fonction ln que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\, u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est convergente.
<u>*Correction*</u> :
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n^2+n(1+x)}{n^2+n(1+x)+x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n^2+n(1+x)+x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec $\dfrac{x}{n^2+n(1+x)+x} < 1$ pour tout réel $x > 0$. On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :

$$\left(1-\frac{x}{n^2+n(1+x)+x}\right)^{n+1} > 1 - \frac{(n+1)x}{n^2+n(1+x)+x} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}$$

(on a $n^2+n(1+x)+x = (n+1)(n+x)$) et donc $u_{n+1} > \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = u_n$, ce qui signifie que, pour $x > 0$, $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. D'autre part, en utilisant la formule du binôme, on a pour $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{x^k}{n^k}$$

avec

$$k! = \prod_{j=2}^{k} j \geq 2^{k-1} \text{ et } \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n} \leq 1$$

pour tout k compris entre 2 et n, ce qui donne pour $x \in]0,2[$:

$$u_n \leq 1 + x + \sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{2^{k-1}} = 1 + x + \frac{x^2}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{k-2}}{2^{k-2}} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}\frac{1-\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}}{1-\frac{x}{2}} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2-x}.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc majorée et en conséquence convergente puisque croissante. Sa limite est $\exp(x)$ et pour $x = 1$, la majoration précédente donne $e = \exp(1) \leq 3$.

Exercice 15

1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \ln(2)$.

<u>*Correction*</u> :

1. Pour $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{t}\right)dt = \int_n^{n+1}\frac{t-(n+1)}{(n+1)t}dt < 0,$$

   c'est-à-dire que u est décroissante. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc :

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1}\frac{dt}{k} = \frac{1}{k},$$

   et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$

2. Avec les notations précédentes, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

et la convergence de la suite u permet alors de conclure.

Exercice 16 Soit x un nombre irrationnel. Montrer que si $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x où pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est un entier relatif et q_n un entier naturel non nul, alors $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, si $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = -\infty$, si $x < 0$.

Correction :

Dire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'infini signifie qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k_n > n$ tel que $0 < q_{k_n} \leq \alpha$. On peut alors extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, \alpha]$ comme suit : pour $n = 0$, il existe $\varphi(0) > 0$ tel que $0 < q_{\varphi(0)} \leq \alpha$ et en supposant construits les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ tels que $0 < q_{\varphi(k)} \leq \alpha$ pour tout k compris entre 0 et n, on peut trouver $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $0 < q_{\varphi(n+1)} \leq \alpha$. De cette suite bornée on peut alors extraire une sous-suite $(q_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un entier $q \geq 1$, mais alors avec $p_{\phi(n)} = \frac{p_{\phi(n)}}{q_{\phi(n)}} q_{\phi(n)}$, on déduit que la suite $(p_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente et sa limite $p = xq$ est également un entier, ce qui est en contradiction avec x irrationnel. Avec $p_n = q_n \frac{p_n}{q_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x \neq 0$, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \pm\infty$, le signe étant celui de x.

4 Plus grande et plus petite limite

Théorème 4.1 *À chaque suite $(x_n)_n$ de nombres réels on peut associer un élément unique L de $\overline{\mathbb{R}}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *Quel que soit $\lambda < L$, l'ensemble E_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n > \lambda$ est infini.*
2. *Quel que soit $\lambda > L$, l'ensemble E_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n > \lambda$ est fini.*

Cet élément L est appelé la plus grande limite ou limite supérieure de la suite $(x_n)_n$. On le désigne par $L = \lim_{n\to\infty} \sup(x_n)$ ou $\limsup(x_n)$.

On établirait de même :

Théorème 4.2 *À chaque suite $(x_n)_n$ de nombres réels on peut associer un élément unique ℓ de $\overline{\mathbb{R}}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *Quel que soit $\lambda > \ell$, l'ensemble F_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n < \lambda$ est infini.*
2. *Quel que soit $\lambda < \ell$, l'ensemble F_λ des $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient $x_n < \lambda$ est fini.*

Cet élément ℓ est appelé la plus petite limite ou limite inférieure de la suite $(x_n)_n$. On le désigne par $\ell = \lim_{n\to\infty} \inf(x_n)$ ou $\liminf(x_n)$.

On a évidemment $\liminf(-x_n) = \limsup(x_n)$.

Proposition 4.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels et soit $L = \limsup(x_n)$, $\ell = \liminf(x_n)$. Alors*

1. *On a $L = +\infty$ (resp. $\ell = -\infty$) si (et seulement si) la suite $(x_n)_n$ est non majorée (resp. non minorée).*
2. *On a $L = \ell = -\infty$ si (et seulement si) la suite $(x_n)_n$ tend vers $-\infty$.*
3. *On a $L = \ell = +\infty$ si (et seulement si) la suite $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$.*

Dans tous les cas on a $L \geq \ell$.

Proposition 4.2 *Pour qu'une suite $(x_n)_n$ de nombres réels soit convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que sa plus grande limite L soit égale à sa plus petite limite ℓ, et on a alors $L = \ell = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Proposition 4.3 *Si la suite $(x_n)_n$ contient une sous-suite convergente $(y_n)_n$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \inf(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup(x_n).$$

Proposition 4.4 *On a les inégalités suivantes :*

1. $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$,
2. $\liminf(x_n) + \limsup(y_n) \leq \limsup(x_n + y_n)$,

et en supposant $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$,

3. $\limsup(x_n y_n) \leq \limsup(x_n).\limsup(y_n)$,
4. $\liminf(x_n).\limsup(y_n) \leq \limsup(x_n y_n)$.

Si la suite $(x_n)_n$ converge vers x, on a $\liminf(x_n) = \limsup(x_n) = x$ et les inégalités précédentes se transforment en égalités. On obtient ainsi :

Proposition 4.5 *Si la suite* $(x_n)_n$ *tend vers* x *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, on a, pour toute suite* $(y_n)_n$*,*

1. $\limsup(x_n + y_n) = x + \limsup(y_n)$

et en supposant $y_n \geq 0$ *quel que soit* n *:*

2. $\limsup(x_n y_n) = x \limsup(y_n)$.

Exemple 4.1 Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de nombres positifs tels que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = b$, on a $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n b_n} = ab$.

Exercice 17 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est bornée.

<u>*Correction :*</u>
Avec $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$, on déduit que pour tout $n > 1$ on a :

$$0 < u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Exercice 18 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est bornée.

<u>*Correction :*</u>
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et donc pour $n \geq 2$ on a :

$$\forall k \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

soit :

$$u_n + \frac{1}{n+1} - 1 + \ln(n) \leq \ln(n+1) \leq u_n + \ln(n)$$

ou encore :

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1 < 1 + \ln(2).$$

Exercice 19 Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

est bornée.
<u>*Correction :*</u>
Il est clair que u est minorée par 0. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et donc pour tout $n \geq 2$, on a :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ On désigne par $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \cos(t^2)dt,\ v_n = \int_1^{\sqrt{n}} \cos(t^2)dt$$

et on se propose de montrer que ces deux suites sont bornées.

1. Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$$w_n = \int_1^n \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$
est bornée.
3. Montrer que :
$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$
4. En utilisant une intégration par parties et le résultat de la question 2. pour une valeur particulière de α, montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Correction :

1. On a :
$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha - 1}\right) \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. On a :
$$|w_n| \leq \int_1^n \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$
3. Le changement de variable $x = t^2$ donne $dx = 2tdt = 2\sqrt{x}dt$ et :
$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$
4. Une intégration par parties donne en posant :
$$\left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{\sqrt{x}},\ u' = -\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}} \\ v' = \cos(x),\ v = \sin(x) \end{array}\right.$$
Ainsi,
$$2v_n = \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^n + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$
avec $\left|\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ et $\left(\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx\right)_{n\geq 1}$ bornée. Il en résulte que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
5. Résulte de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(t^2)dt + v_n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$ (Cet exercice nous fournit une démonstration relativement simple de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.)
Montrer que pour tout réel x, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$$

(où $E(.)$ désigne la partie entière) converge vers $\dfrac{x}{2}$.
<u>*Correction :*</u>
Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$E(kx) \leq kx < E(kx) + 1 \Leftrightarrow 0 \leq kx - E(kx) < 1$$

et :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} kx - \sum_{k=1}^{n} E(kx) < n \Leftrightarrow 0 \leq \frac{n(n+1)}{2}x - \sum_{k=1}^{n} E(kx) < n$$

ce qui donne $0 \leq \dfrac{n+1}{2n}x - u_n < \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{x}{2}$.

Exercice 22 En utilisant la définition, montrer que la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
<u>*Correction :*</u>
Si cette suite converge vers un réel ℓ, la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$. En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |(-1)^n - \ell| < 1.$$

et en prenant $n \geq n_0$ tel que la parité de n implique que $(-1)^n$ soit de signe contraire à celui de ℓ, on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente.

Exercice 23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.
<u>*Correction :*</u>
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0\ |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que : $\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$ puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$.
La réciproque est évidente.

Exercice 24 Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?
<u>*Correction :*</u>
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0,\ |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Plus généralement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+p} - u_n) = 0$ pour tout entier $p \geq 1$.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $u = (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$ on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

On peut aussi considérer, plus généralement, la suite $u = (n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha \in]0,1[$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$. On peut écrire à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \xi_n^{\alpha-1}$$

avec ξ_n compris entre n et $n+1$. Comme $\alpha \xi_n^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\xi_n^{1-\alpha}} \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$ on a $0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 25 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0,1[$ tel que $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$ à partir d'un certain rang n_0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que s'il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$ et s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$, alors u diverge.
3. Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda > 1$, alors u diverge.

5. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
7. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Correction :

1. Si $\lambda = 0$ alors u est stationnaire sur 0 à partir du rang $n_0 + 1$.
   On suppose donc que $\lambda \in]0, 1[$. Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $|u_n| \leq u_{n_0} \lambda^{n-n-0}$. C'est vrai pour $n = n_0$. Supposons que pour une valeur $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq u_{n_0} \lambda^{n-n_0}$, comme $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$, on a $|u_{n+1}| \leq u_{n_0} \lambda^{n+1-n_0}$ et la récurrence est établie. Pour $\lambda \in]0, 1[$ la suite géométrique de terme général $\dfrac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n$ converge vers 0, et comme cette suite majore la suite positive $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut affirmer que cette dernière converge aussi vers 0 et il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $u_{n_0} \neq 0$, on vérifie par récurrence que $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$. En appliquant le résultat précédent à la suite $\left(\dfrac{1}{|u_n|}\right)_{n\geq n_0}$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{|u_n|}\right) = 0$, ce qui équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} (|u_n|) = +\infty$ et u diverge.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{|u_n|}\right) = \lambda$, on a :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \lambda + \varepsilon.$$
   Dans le cas où $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir ε assez petit pour que $\rho = \lambda + \varepsilon$ soit strictement inférieur à 1 et on a alors $|u_{n+1}| \leq \rho |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\rho \in]0, 1[$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand, nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. On considère la suite de terme général $u_n = n + 1$.
6. Il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
7. On considère la suite de terme général $u_n = 10 + \dfrac{1}{n+1}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 26}}$ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite rélle ou complexe.

1. Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang n_0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \geq \lambda$ à partir d'un certain rang n_0 alors u diverge.
3. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda \in [0, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda > 1$ alors u diverge.
5. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
6. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
7. Trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$.

Correction :

1. Résulte de $0 \leq |u_n| \lambda^n$ pour $n \geq n_0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$ $(\lambda \in [0, 1[)$.
2. Résulte de $|u_n| \geq \lambda^n$ pour $n \geq n_0$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$ $(\lambda > 1)$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$, on a :
   $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \varepsilon.$$
   Dans le cas où $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir ε assez petit pour que $\rho = \lambda + \varepsilon$ soit strictement inférieur à 1 et on a alors $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \rho$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\rho \in [0, 1[$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand (pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $n \geq n_0$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} > \lambda - \varepsilon > 0$ et $u_n \neq 0$) nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5. On considère la suite de terme général $u_n = n$.
6. Il suffit de prendre $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
7. On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{10}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour $n \geq 1$.

5 Valeurs d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 5.1 *La suite $(x_n)_n$ converge vers x si, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour « presque toute » valeur de n, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, excepté au plus pour un ensemble fini de valeurs.*

En remplaçant les mots « presque toute valeur » par une « infinité de valeurs », on obtient une condition plus faible, conduisant à une notion plus générale que celle de limite, celle de valeur d'adhérence.

Définition 5.2 *On dit que la suite $(x_n)_n$ admet le nombre réel x pour valeur d'adhérence si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n vérifiant l'inégalité $|x_n - x| < \varepsilon$.*

Exemple 5.1

1. La suite $(x_n = (-1)^n)_n$ admet $+1$ et -1 pour valeurs d'adhérence. Il en est de même de la suite $(x_n = (-1)^n + \varepsilon_n)_n$ où ε_n désigne une suite quelconque convergeant vers zéro.
2. Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ (soit $\alpha = p/q$ avec p, q premiers entre eux) la suite $(x_n = \sin n\alpha\pi)_n$ admet pour valeurs d'adhérence les q nombres $\sin k\pi/q$ ($k = 0, 1, \dots, q-1$). Si α est irrationnel, on démontre que la suite $(\sin n\alpha\pi)_n$ admet pour valeurs d'adhérence tous les points de l'intervalle $[-1, +1]$.

Lorsqu'on utilise ce langage, il faut bien prendre conscience que les termes de la suite $(x_n)_n$ sont les couples (n, x_n) et il faut éviter de confondre le terme (n, x_n) avec le point x_n.

Définition 5.3 *On dit que la suite $(x_n)_n$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour valeur d'adhérence si elle est non majorée (resp. non minorée).*

Théorème 5.1 *Pour qu'un élément x de $\overline{\mathbb{R}}$ soit une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(y_n)_n$ extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers x dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 5.1 *La plus grande (resp. plus petite) limite d'une suite est sa plus grande (resp. plus petite) valeur d'adhérence.*

Théorème 5.2 *Bolzano-Weierstrass.*
De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.

$\boxed{\textbf{Exercice 27}}$ Montrer que la suite $u = (n^{(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence et est divergente.
Correction :
De $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$, on déduit que 0 est une valeur d'adhérence de u.
Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence non nulle de u, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a alors $\ell > 0$ (puisque $u_n > 0$ pour tout n) et :

$$|\ln(\ell)| = \lim_{n\to+\infty} |\ln(u_\varphi(n))| = \lim_{n\to+\infty} |(-1)^{\varphi(n)} \ln(\varphi(n))| = \lim_{n\to+\infty} \ln(\varphi(n)) = +\infty,$$

ce qui est impossible. Donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de u. Et cette suite est divergente puisque non majorée ($u_{2n} = 2n$).

$\boxed{\textbf{Exercice 28}}$ On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.
Rappel : On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R}, +)$ est discret si pour tout compact K de $\mathbb{R}$ l'intersection $H \cap K$ est finie.

1. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :
$$\mathbb{Z}_\alpha = \{p\alpha | p \in \mathbb{Z}\} \text{ où } \alpha \text{ est un réel.}$$
2. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.
3. Soient a, b deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb | (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est discret [resp. dense] si, et seulement si $\dfrac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].

4. On note $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ le cercle unité dans le plan complexe.
   (a) Montrer que $\{\exp(in)|n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans Γ.
   (b) Montrer que l'ensemble $\{\cos(n)|n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

Correction :

1. Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout compact K de $\mathbb{R}$ est contenu dans un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$.
   Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}_+^\star$ $(0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H)$ et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in H$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ ($k = E\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$) et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $H = \mathbb{Z}\alpha$.
2. Si H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ alors $K = H \cap \mathbb{R}_+^\star \neq \emptyset$ et cet ensemble est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure α. On distingue deux cas :
   – Si $\alpha > 0$ alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^\star$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α. Avec la structure de groupe additif de H, on déduit alors que $H = \mathbb{Z}\alpha$. En effet, $\mathbb{Z}\alpha \subset$ du fait que α appartient au groupe H et pour tout x dans H, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.
   – Si $\alpha = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $H \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{z}$ et pour $n \in \left]\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.

   Si G est discret, alors $G = \mathbb{Z}\alpha$ et $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec p et q non nuls dans $\mathbb{Z}$ et en conséquence $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
   Réciproquement, supposons $\dfrac{a}{b}$ rationnel, on peut écrire $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux et on a :
   $$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\frac{b}{q}.$$
   Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ et donc $G = \mathbb{Z}\dfrac{b}{q}$, c'est-à-dire que G est discret.
3. (a) Comme 2π est irrationnel, le groupe $H = \mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Avec la 2π-périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application $f : x \mapsto \exp(ix)$ de $\mathbb{R}$ sur Γ, on déduit alors que l'ensemble :
   $$f(H) = \{\exp((2\pi m + n)i), (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \{\exp(in), n \in \mathbb{Z}\}$$
   est dense dans $[-1, 1]$,
   (b) Avec la continuité et la surjectivité de la projection $p : z \mapsto \Re(z)$ de Γ sur $[-1, 1]$, on déduit que l'ensemble $\{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, puis par parité que l'ensemble $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 29 Soit α un réel fixé dans $]0, 1[$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n^\alpha)$ pour $n \geq 0$. On se donne un réel $x \in [-1, 1]$ et on note θ le réel de $[0, \pi]$ défini par $x = \cos(\theta)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi(n)$ l'entier défini par :
$$\varphi(n)^\alpha \leq \theta + 2n\pi < (\varphi(n) + 1)^\alpha$$
c'est-à-dire que $\varphi(n) = E((\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}})$.

1. Montrer que φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha) = 0$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{\varphi(n)}) = x$.
4. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est $[-1, 1]$.

Correction :

1. Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$), de la stricte croissance de la fonction $t^{\frac{1}{\alpha}}$ et du fait que $2\pi > 1$. En effet, en posant $v_n = (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier $n \geq 1$:
   $$v_{n+1} - v_n = 2\pi\frac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

où ξ_n est un réel compris entre $\theta + 2n\pi$ et $\theta + 2(n+1)\pi$. Et comme $0 < \alpha < 1$, $\xi_n > 1$; on a $\frac{1}{\alpha}\xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1$ et $v_{n+1} - v_n > 2\pi > 1$ de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.

2. Résulte de :

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha < (\varphi(n)+1)^\alpha - \varphi(n)^\alpha$$

et de $\lim\limits_{p\to+\infty}((p+1)^\alpha - p^\alpha) = 0$ (exercice 24).

3. Pour $n \geq 1$ on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction cos :

$$|u_{\varphi(n)} - x| = |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta)| = |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta + 2n\pi)| \leq |\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

4. La suite u étant à valeurs dans $[-1,1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1,1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1,1]$ est limite d'une suite extraite de u.

6 Le Théorème de Césaro

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui converge vers ℓ, les u_n seront proches de ℓ pour n assez grand et il semble naturel qu'il en soit de même des moyennes $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$. C'est ce que dit le théorème de Césaro. Un peu plus généralement on a le résultat suivant :

Théorème 6.1 *Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = +\infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle (ou complexe) convergente, on a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Remarque 6.1 Ce théorème est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) = \ell.$$

Définition 6.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers un scalaire ℓ, si la suite $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente vers ℓ.*

Exercice 30 Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors pour tout réel $\alpha \geq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n}k^\alpha u_k\right) = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Correction :

On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = n^\alpha$. Comme $n^\alpha > 1$ pour tout $k \geq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha^k$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $[1,+\infty[$, on a pour tout entier $k \geq 1$: $\forall t \in [k, k+1]$, $k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$ et

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq (k+1)^\alpha$$

de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n}k^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^{n}(k+1)^\alpha$$

ou encore :

$$S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1} - 1.$$

On a donc $S_n \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_{n+1}$ ou encore $\dfrac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n$, ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et

$$\frac{1-\frac{1}{n^{\alpha+1}}}{\alpha+1} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \dfrac{1}{\alpha+1}$, ce qui signifie que $S_n \sim_{+\infty} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. En conséquence, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k\right) = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Exercice 31 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante non majorée telle que $\gamma_0 > 0$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.

Correction :

On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Comme $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge vers $+\infty$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(\gamma_{n+1}-\gamma_0) = +\infty.$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\frac{u_{k+1}-u_k}{\gamma_{k+1}-\gamma_k} = \frac{1}{\gamma_n-\gamma_0}(u_n-u_0)$$

et en utilisant le théorème de Césaro, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-u_0}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \lambda$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n = +\infty$. Enfin, avec $\dfrac{u_n}{\gamma_n-\gamma_0} = \dfrac{u_n}{\gamma_n}\dfrac{1}{1-\frac{\gamma_0}{\gamma_n}}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\gamma_n}\right) = \lambda$.

Exercice 32 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k v_{n-k}$$

converge vers $\ell\ell'$.

Correction :

On a pour tout $n \geq 1$,

$$w_n - \ell\ell' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k v_{n-k} - \ell\ell') = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k(v_{n-k}-\ell') + \ell'(u_k-\ell))$$

et

$$|w_n\ell\ell'| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^\star}|u_n|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(v_{n-k}-\ell') + |\ell'|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Césaro.

7 Notion de voisinage

On peut unifier les diverses définitions relatives à $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ en introduisant les notions de voisinage d'un point mais il faut préciser au préalable la notion d'intervalle.

Définition 7.1 *Dans un ensemble totalement ordonné E, on appelle intervalle ouvert toute partie de E définie par une famille finie d'inégalités strictes soit $(x > a_i)_{i\in I}$ et $(x < b_j)_{j\in J}$.*
Un intervalle fermé est la partie E vérifiant une famille d'inégalités larges.

Proposition 7.1 *L'intersection d'une famille finie d'intervalles ouverts (resp. fermés) est un intervalle ouvert (resp. fermé), éventuellement vide.*

Définition 7.2 *Dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$), on appelle voisinage d'un élément x toute partie V de $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) contenant un intervalle ouvert contenant x.*

Proposition 7.2 *Pour qu'une suite $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$), il faut et il suffit qu'à chaque voisinage V de x on puisse associer un entier n_V tel que l'on ait $x_n \in V$ pour tout $n > n_V$.*

Proposition 7.3 *Pour que la suite $(x_n)_n$ admette x pour valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$), il faut et il suffit que chaque voisinage de x dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) contienne une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$.*

La notion de voisinage permet aussi de donner une caractérisation unique des bornes (supérieure et inférieure) d'un ensemble, valable à la fois dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$:

Proposition 7.4 *La borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) dont chaque voisinage contienne au moins un élément de X.*

On peut caractériser de même les plus grande et plus petite limites d'une suite :

Proposition 7.5 *La plus grande (resp. la plus petite) limite d'une suite dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) dont chaque voisinage contienne une infinité de termes de la suite.*

Définition 7.3 *Dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) on dit qu'un élément a est adhérent à un ensemble A si chaque voisinage de a contient au moins un point de A. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence ou la fermeture de A et est noté $\overline{A}$.*

Exemple 7.1

1. *L'origine $x = 0$ est un point adhérent à l'ensemble $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$.*
2. *Tout voisinage de tout nombre réel contient au moins un rationnel. Donc $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Théorème 7.1 *L'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet pour plus grand (resp. plus petit) élément la borne supérieure (resp. inférieure) de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Corollaire 7.1 *Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ admette $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour point adhérent dans $\overline{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que A soit non majoré (resp. non minoré).*

Définition 7.4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un point a de A est dit isolé (dans A) s'il existe un voisinage U de a tel que l'ensemble $A \cap U$ se réduise à $\{a\}$.*

En d'autres termes, le point a de A est isolé s'il n'est pas adhérent à $A\backslash\{a\}$.

Exemple 7.2

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ ne contient que des points isolés car pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, l'intervalle $]n-1/2, n+1/2[$ ne contient pas d'autre point que n.
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne possède aucun point isolé.

Définition 7.5 *Une partie est dite ouverte si, pour tout $a \in A$, il existe un intervalle ouvert contenant a et contenu dans A.*

En d'autres termes, un ensemble A est ouvert si c'est un voisinage de chacun de ses points.

8 Limites de fonctions numériques définies sur des parties de $\mathbb{R}$

On appellera fonction numérique sur un ensemble quelconque X toute application de X dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Définition 8.1 *Soit f une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, le point a étant supposé adhérent à A. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si, à chaque voisinage V de b on peut associer un voisinage U de a tel que l'on ait $f(x) \in V$ pour tout $x \in U \cap A$ (soit en d'autres termes $f(U \cap A) \subset V$). Si cette condition est réalisée, on dit aussi que f admet b pour limite au point a.*

Remarque 8.1 On notera que cette définition perdrait tout son sens si on ne supposait pas a adhérent à X : en effet, si $a \notin \overline{X}$, il existe un voisinage U de a tel que $U \cap X$ soit vide, et la condition $f(U \cap X) \subset V$ serait vérifiée pour tout voisinage V de tout point b. En particulier, si $X = A \backslash \{a\}$, on ne peut parler de limite de f au point a sur X que si a est un point adhérent à $A \backslash \{a\}$, ce qui est réalisé si (et seulement si) a est un point d'accumulation de X.

Remarque 8.2 On notera aussi que si $a \in A$, la définition précédente implique $b = f(a)$. En effet, puisque chaque voisinage de a contient a, on doit avoir $f(a) \in V$ pour tout voisinage V de b. Mais l'intersection des voisinages particuliers de b (que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$) se réduit au point b (car les voisinages particuliers constitués par les intervalles ouverts contenant b ont b pour seul point commun), donc $f(a) = b$.
On se placera donc le plus souvent dans le cas où a n'appartient pas à A.

Proposition 8.1 *Si $a \in \overline{A}$, il existe au plus un élément b de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a.*

Exercice 33 Démontrer la proposition 8.1
<u>Correction</u> : Supposons que $f(x)$ tende à la fois vers b et vers c. Si $b \neq c$, il est facile de construire - dans tous les cas - un intervalle ouvert V contenant b et un intervalle ouvert W contenant c tels que $V \cap W = \emptyset$; par exemple, si b et c sont tous deux finis, on pourra prendre $V =]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ et $W =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ avec $\varepsilon < |b - c|/2$; si b est fini et $c = +\infty$, on pourra prendre $V =]b - 1, b + 1[$ et $W =]b + 2, +\infty]$. D'après la définition 8.1, il existe alors deux voisinages U_1 et U_2 de a vérifiant les relations $f(U_1 \cap A) \subset V$ et $f(U_2 \cap A) \subset W$. Mais l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a (cela résulte du fait que l'intersection de deux intervalles ouverts contenant a est un intervalle ouvert contenant a). Donc $U = U_1 \cap U_2$ est un voisinage de a vérifiant $f(U \cap A) \subset V \cap W$. Et puisque $V \cap W$ est vide, cela exige que $U \cap A$ soit vide. Le point a étant supposé adhérent à A, on aboutit à une contradiction.

Si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a sur X (ou $a \in \overline{X}$), cet unique point b est noté $b = \lim\limits_{x \to a, x \in X} f(x)$. Si l'ensemble X coïncide avec l'ensemble de définition A de f, on dit que b est la limite de f au point a et on le note $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Proposition 8.2 *Pour que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a sur X ($a, b \in \mathbb{R}$), il faut et il suffit qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ on puisse associer un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $|x - a| < \eta$ et $x \in X$ entraînent $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Proposition 8.3 *Soit X une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient X. Pour que $f(x)$ tende vers une limite finie b (resp. tende vers $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ sur X, il faut et il suffit qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ donné (resp. à chaque nombre réel β) on puisse associer un nombre réel α tels que les relations $x > \alpha$ et $x \in X$ entraînent $|f(x) - b| < \varepsilon$ (resp. $f(x) > \beta$).*

Proposition 8.4 *Pour que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a sur X, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tende vers b.*

Exercice 34 Démontrer la proposition 8.4.
<u>Correction</u> :
- La nécessité de cette condition résulte de la proposition 7.2.
- Pour montrer la suffisance, on raisonne par l'absurde en supposant que $f(x)$ ne tend pas vers b lorsque x tend vers a sur X et en supposant, pour simplifier, que $a, b \in \mathbb{R}$. Par négation, on aurait :
$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall \eta > 0)\ (\exists x \in X\ |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - b| \geq \varepsilon).$$
En donnant à η la suite des valeurs $\eta_n = 1/n (n \in \mathbb{N}^\star)$, on obtiendrait une suite $(x_n)_n$ de points de X vérifiant $|x_n - a| < 1/n$ et $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ quel que soit n : cette suite convergerait vers a et la suite $f(x_n)$ ne convergerait pas vers b.

Théorème 8.1 *Soient f, g deux fonctions numériques définies sur une même partie de X de $\mathbb{R}$, et admettant respectivement des limites finies b, c en un point a de $\overline{X}$. Alors la somme $f(x) + g(x)$ tend vers $b + c$. Le produit $f(x)g(x)$ tend vers bc et (si $c \neq 0$) le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers b/c lorsque x tend vers a sur X son domaine de définition. Enfin $|f(x)|$ tend vers b lorsque x tend vers a.*

9 Limites à droite et à gauche. Fonctions monotones

Définition 9.1 *Soit f une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que l'ensemble $X = \{x \in A, x < a\}$ (resp. l'ensemble $X = \{x \in A, x > a\}$) admette a pour point adhérent.*
On dit que $f(x)$ tend vers b (ou $b \in \overline{\mathbb{R}}$) lorsque x tend vers a par valeurs inférieures (resp. supérieures) si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a sur X. Cette limite b est alors appelée limite à gauche (resp. à droite) de f en a et désignée par $f(a - 0)$ (resp. $f(a + 0)$).

Exemple 9.1

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = x/|x|$. On a $f(+0) = 1$, $f(-0) = -1$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = [x]$ (partie entière de x). Si $a \notin \mathbb{Z}$, on a $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$. Si $a \in \mathbb{Z}$, on a $f(a+0) = f(a)$, $f(a-0) = f(a) - 1$.

Théorème 9.1 *Soit f une fonction numérique définie et croissante sur une partie A de $\mathbb{R}$. Alors f admet une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) en tout point a de $\overline{\mathbb{R}}$ où cette limite peut être définie. Si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $f(a-0) \leq f(a)$.*
De même, f admet une limite à droite (finie ou égale à $-\infty$) en tout point a de $\overline{\mathbb{R}}$ où cette limite peut être définie. Si $a \in A$, cette limite est finie et vérifie $f(a+0) \geq f(a)$.
En particulier, si A est non majoré, $f(x)$ a une limite (finie ou égale à $+\infty$) quand x tend vers $+\infty$. Si A est non minoré, $f(x)$ admet une limite (finie ou égale à $-\infty$) lorsque x tend vers $-\infty$.

Exemple 9.2

1. La fonction $[x]$ (partie entière de x) est une fonction croissante ayant des limites à droite et à gauche en chaque point a de $\mathbb{R}$, vérifiant les inégalités $f(a-0) \leq f(a) = f(a+0)$. De plus, $[x]$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
2. La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est croissante sur chaque intervalle ouvert $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et vérifie
$$f(\pi/2 + k\pi + 0) = -\infty,\ f(\pi/2 + k\pi - 0) = +\infty \text{ quel que soit } k \in \mathbb{Z}.$$
Mais cette fonction n'est pas monotone sur son domaine de définition (et elle n'a d'ailleurs pas de limite lorsque x tend vers $\pm\infty$).

10 Fonctions continues

Définition 10.1 *Soit f une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point a de A si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a, donc si elle vérifie la condition :*
$$\textit{quel que soit le voisinage } V \textit{ de } f(a), \textit{ il existe un voisinage } U \textit{ de } a \textit{ vérifiant } f(U \cup A) \subset V$$
et on dit que f est continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition A.

Proposition 10.1 *Pour que la fonction numérique f, définie sur l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$, soit continue au point a, il faut et il suffit qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ on puisse faire correspondre un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $x \in A$ et $|x-a| < \eta$ entraînent $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Théorème 10.1 *Soient f, g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble A et continues au point a de A. Alors les fonctions $f+g$ et fg sont continues au point a, et il en est de même de f/g si $g(a) \neq 0$.*
Si deux fonctions numériques f, g sont définies sur un voisinage du point a et continues en ce point, et si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est défini sur un voisinage de a et continu au point a.

Définition 10.2 *Soient X un ensemble quelconque et f une fonction numérique définie sur X.*

1. *On dit que f est majorée (resp. minorée, bornée) sur X, si l'ensemble $f(X)$ est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de* $\mathbb{R}$.
2. *Si f est majorée (resp. minorée) sur X, la borne supérieure (resp. inférieure) de $f(X)$ est appelée la borne supérieure (resp. inférieure) de f sur X.*
3. *On dit que f présente un maximum (resp. minimum) absolu en un point de a de X si le nombre $f(a)$ est égal à la borne supérieure (resp. inférieure) de f sur X, autrement dit si on a $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) quel que soit $x \in X$. Ce maximum (resp. minimum) $f(a)$ est dit strict si les relations $x \in X$ et $x \neq a$ entraînent l'inégalité stricte $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).*
4. *Enfin, si X est une partie de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement, si X est un espace topologique), on dit que f présente un maximum (resp. minimum) relatif au point a de X s'il existe un voisinage V de a tel que l'on ait $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in V \cap X$. Les maxima et les minima (absolus ou relatifs) sont appelés extréma de la fonction f.*

Théorème 10.2 *Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint sur $[a, b]$ sa borne supérieure M et sa borne inférieure m. En d'autes termes, f présente sur $[a, b]$ un maximum absolu M et un minimum absolu m.*

Théorème 10.3 *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle quelconque (ouvert, fermé ou semi-ouvert, borné ou non) I de $\mathbb{R}$ et soient $M = \sup f(I)$, $m = \inf f(I)$ les bornes de f sur I. Alors f prend toute valeur de l'intervalle ouvert $]m, M[$.

Corollaire 10.1 *L'image d'un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ pour une fonction numérique continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Proposition 10.2 *L'image, par une fonction numérique continue d'un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné.*

Théorème 10.4 *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. S'il existe deux points a, b de I tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine comprise entre a et b.*

Corollaire 10.2 *(contraposée)*
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f ne prend pas la valeur 0, f garde un signe constant sur I

11 Fonctions strictement croissantes sur un intervalle. Homéomorphismes

Proposition 11.1 *Pour qu'une fonction numérique continue f sur un intervalle de $\mathbb{R}$ soit injective, il faut et il suffit qu'elle soit strictement monotone.*

Proposition 11.2 *Pour qu'une fonction numérique monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ soit continue, il suffit que $f(I)$ soit un intervalle.*

Proposition 11.3 *Si f est une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J, sa récriproque f^{-1} est continue sur J.*

Proposition 11.4 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (ouvert, fermé ou semi-ouvert) d'extrémités a, b. Soit f une fonction numérique strictement monotone et continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé ou semi-ouvert) d'extrémités $\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \to b} f(x)$.*

Définition 11.1 *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$. Un homéomorphisme de A sur B est une bijection continue de A sur B dont la réciproque est continue. Si une telle bijection existe, les ensembles A et B sont dits homéomorphes.*

Théorème 11.1 *Soit f une fonction numérique strictement monotone et continue sur un intervalle I, d'extrémités a, b. Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$, $\beta = \lim_{x \to b} f(x)$ et l'application $I \to f(I)$, $x \mapsto f(x)$ est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.*
De plus, toute partie de $\mathbb{R}$, homéomorphe à un intervalle I, est un intervalle de même nature. Les seuls homéomorphismes d'un intervalle I sur un intervalle J sont les applications strictement monotones de I sur J.

Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition .*

[2] Pierre PANSU. *Borne supérieure.*
http ://www.math.u-psud.fr/∼pansu/websm/borne_superieure.pdf

[3] Jean-Etienne ROMBALDI. *Suites réelles ou complexes.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rombaldi/Capes/AnalyseChap3.pdf