Fiche de Mathématiques 3 - Dérivées, Développements limités.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des applications dont l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R}$, et dont l'ensemble d'arrivée est un espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n.) E sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (fonctions vectorielles d'une variable numérique). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la donnée d'une telle application f équivaut à la donnée de n fonctions numériques f_i (les composantes de f).

Définition 0.1 *Soit $f : X \to E$ une application d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans un e.v.n. E et soit $t_0 \in \overline{X}$ (resp. $t_0 \in X$). On dit que $f(t)$ tend vers le point x_0 de E lorsque t tend vers t_0 (resp. on dit que f continue au point t_0) si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que les relations $t \in X$ et $|t - t_0| < \eta$ entraînent $\|f(t) - x_0\| < \varepsilon$ (resp. $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$).*

1 Notions de dérivées - Fonctions dérivables.

Définition 1.1 *Soit I un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et f une application de I dans un e.v.n. E. On dit que f est dérivable au point t_0 si l'application*

$$I\backslash\{t_0\} \to E,\ t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

a une limite au point t_0. Cette limite est appelée dérivée de f au point t_0, et notée $f'(t_0)$ ou $(df/dt)(t_0)$, ou $(df/dt)_{t_0}$. C'est un élément de E. Si f est dérivable en chaque point d'un ouvert I de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, et l'application $I \to E$, $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée, ou simplement dérivée de f.

Définition 1.2 *(Généralisation)*
Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. E, dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[t_0, t_1]$, avec $t_1 > t_0$ (resp. un intervalle $[t_1, t_0]$ avec $t_1 < t_0$). La dérivée à droite (resp. à gauche) de f en t_0, notée $f'_d(t_0)$ (resp. $f'_g(t_0)$) est la limite (si elle existe) du rapport

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

lorsque t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. inférieures).

Ces définitions s'appliquent en particulier au cas où f est une fonction numérique (cas où $E = \mathbb{R}$, avec la norme définie par $x \mapsto |x|$).

Remarque 1.1 Pour que f soit dérivable au point t_0, il faut et il suffit que $f'_d(t_0)$ et $f'_g(t_0)$ existent à la fois, et que $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Théorème 1.1 *Si l'application f admet une dérivée au point t_0, alors f est continue en ce point.*

Définition 1.3 *On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I si la dérivée $f^{(p)}(t)$ existe en tout point de I et si l'application $t \mapsto f^{(p)}(t)$ est continue sur I.*
Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour $0 \leq k \leq p$.
Par extension, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f admet des dérivées de tous les ordres (ces dérivées étant alors automatiquement continues).

Définition 1.4 *Soit f une fonction définie sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans le produit $E_1 \times E_2 \dots E_n$ des e.v.n. $E_1, \dots, E_n$ et soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ ses composantes. Pour que f soit dérivable au point t_0 (resp. pour que f soit de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle) il faut et il suffit que chacune de ses composantes le soient.*

L'étude des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ se ramène donc à l'étude de fonctions numériques dérivables.

Exercice 1 *Le Théorème de Darboux.*

Théorème 1.2 *Soit F une fonction réelle définie et dérivable sur l'intervalle I. On pose $f = F'$. Soit $a < b$ dans I tel que $f(a) < f(b)$, $\mu \in]f(a); f(b)[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $\mu = f(c)$.*

Pour $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I, la fonction dérivée $F' = f$ a la propriété des valeurs intermédiaires. Ceci montre (au passage) que la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas l'apanage des fonctions continues.

1. $[\ .\ ]$ désigne la partie entière. Trouver les fonctions réelles F définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F' = [F]$.
2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sans zéros et vérifiant $|F''| = F$. Déterminer F.

Correction :

1. Si F convient, $F' = [F] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui a la propriété des valeurs intermédiaires et qui est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, est constante. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(x) = Ax + B$ sur $\mathbb{R}$. On a $A = 0$ (sinon $[F](0) = [B]$ diffère de $[F]\left(\frac{1}{A}\right) = [B] + 1$ et F' n'est pas constante sur $\mathbb{R}$). Il reste $F = B$, donc $F' = 0$, d'où $[F] = [B] = 0$, ce qui impose $B \in [0, 1[$. La réciproque est claire.
2. F'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Darboux, $F'' = (F')'$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$. On a $F'' > 0$ (sinon $F'' < 0$ et $F'' + F = 0$, ce qui donne une solution oscillante F qui s'annule). F vérifie donc $F'' - F = 0$, $F(x) = A\cosh x + B \sinh x = \dfrac{\exp(x)}{2}[A + B] + \dfrac{\exp(-x)}{2}[A - B]$. F est par ailleurs à valeurs strictement positives donc $A = F(0) > 0$, $A + B > 0$ (sinon $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$), et $A - B \geq 0$ (sinon $\lim\limits_{n \to -\infty} F(x) = -\infty$). Bilan : $F(x) = A\cosh x + B \sinh x$ avec $A > 0$ et $|B| \leq A$.

Exercice 2 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_1(0) = 0$.
2. $f_2(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f_2(0) = 0$.
3. $f_3(x) = \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ si $x \neq 1$, $f_3(1) = 1$.

Correction :

1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :
$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$
Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos 1/x| \leq 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Par conséquent, f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.
2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :
$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}.$$
Nous savons que $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ et que $\sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.
3. La fonction f_3 s'écrit :
$$f_3(x) = \frac{|x||x - 1|}{x - 1}.$$
   – Donc pour $x \geq 1$ on a $f_3(x) = x$, pour $0 \leq x < 1$ on $f_3(x) = -x$. Pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
   – La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}/\{0, 1\}$.
   – La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim\limits_{x \to 1^+} f_3(x) = +1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
   – La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est
   $$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$
   et pour $x < 0$,
   $$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$
   Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et f_3 n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$
soit dérivable sur $\mathbb{R}^{\star +}$.

Correction : Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim\limits_{x \to 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc $a + b + 1 = 1$. Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales : $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc $2a + b = \dfrac{1}{2}$. Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $\left(a = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Correction :

1. Comme $|\sin 1/x| \leq 1$, $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc en posant $f(0) = 0$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement est $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x}$. Comme ci-dessus, il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^\star$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f' n'est pas continue en 0.

2 L'algèbre des fonctions dérivables

Proposition 2.1 *Dérivée d'une combinaison linéaire.*
Soient f et g deux applications de l'intervalle I dans le même e.v.n. sur K dérivables en un point t_0 de I. Alors, quels que soient les scalaires $\alpha, \beta \in K$, la fonction $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable au point t_0 et on a

$$h'(t_0) = \alpha f'(t_0) + \beta g'(t_0).$$

On notera que l'ensemble des applications de I dans E, qui sont dérivables au point t_0, constituent un K-espace vectoriel $\mathcal{D}$, et que l'application $t \mapsto f'(t_0)$ de $\mathcal{D}$ dans E est linéaire.

Proposition 2.2 *Dérivée d'un produit.*
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions numériques ou complexes définies sur l'intervalle I dans l'espace E_i, dérivables au point t_0. Alors l'application h de I dans E, définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)]$ est dérivable en t_0 et on a :

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} f_1(t_0) \ldots f_k'(t_0) \ldots f_n(t_0).$$

Plus généralement, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et E des e.v.n. sur le corps K et soit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

une application multilinéaire continue de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans E, définissant un produit.

Théorème 2.1 *Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ soit f_i une application de l'intervalle I dans l'espace E, définie par $h(t) = p[f_1(t), f_2(t), \ldots f_n(t)]$, dérivable en t_0. On a alors*

$$h'(t_0) = \sum_{k=1}^{n} p[f_1(t_0) \ldots f_k'(t_0) \ldots f_n(t_0)].$$

La fonction h est souvent appelée le produit des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et on peut alors énoncer le précédent théorème de la manière suivante : « La dérivée d'un produit est la somme des n produits obtenus en remplaçant successivement chaque facteur par sa dérivée, sans modifier l'ordre des facteurs. »

Corollaire 2.1

1. *Si f, g sont deux applications dérivables sur l'intervalle I, à valeurs dans l'espace euclidien E_n, alors le produit scalaire $f(t).g(t)$ est une fonction numérique dérivable et on a :*

$$\frac{d}{dt}[f(t).g(t)] = f'(t).g(t) + f(t).g'(t).$$

2. *Si f et g sont deux applications dérivables de I dans E_3, alors le produit vectoriel $f(t) \wedge g(t)$ est une fonction dérivable de I dans E_3, et on a :*

$$\frac{d}{dt}[f(t) \wedge g(t)] = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

3. *Soient $t \mapsto a_{ij}(t)$, n^2 fonctions numériques ou complexes dérivables sur l'intervalle I. Alors le déterminant $D(t) = \text{dét}[a_{ij}(t)]$ est une fonction dérivable, et sa dérivée est la somme des n déterminants obtenus en dérivant successivement les éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne).*

Proposition 2.3 *Formule de Leibniz*
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage du point t_0 et admettant en ce point des dérivées jusqu'à l'ordre n (inclus). Alors la dérivée d'ordre n au point t_0 vérifie la formule dite de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dt^n}(fg)_{t_0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t_0)g^{(n-k)}(t_0).$$

Théorème 2.2 *Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage I du poit t_0 dans $\mathbb{R}$ dérivable au point t_0. Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur un voisinage du point $x_0 = g(t_0)$ contenant $g(I)$. Alors, si f est dérivable au point $x_0 = g(t_0)$, $h = f \circ g$ est dérivable au point t_0 et on a :*

$$h'(t_0) = g'(t_0)f'(x_0).$$

Proposition 2.4 *Soit g une fonction numérique définie sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ telle que $g'(t_0)$ existe et $g(t_0) \neq 0$. Alors la fonction $h = 1/g : t \mapsto 1/g(t)$, qui est définie sur un voisinage de t_0, admet une dérivée au point t_0 et on a :*

$$h'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g^2(t_0)}.$$

Proposition 2.5 *Soit f une application bijective et continue d'un intervalle I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, dérivable en un point t_0 de I et telle que $f'(t_0) \neq 0$. Alors sa réciproque $h = f^{-1}$ est dérivable au point $x_0 = f(t_0)$ et on a*

$$h'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

Proposition 2.6 *Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ alors leur somme $f+g$, leur produit fg, leur quotient f/g et leur composée $f \circ g$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur leur ensemble de définition. Il en est de même de la réciproque f^{-1} de f si f est bijective et si sa dérivée ne s'annule pas.*

Exercice 5 Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^n(1-x^n)$.
Calculer $f^{(n)}(x)$ par deux méthodes, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

<u>Correction</u> : Pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ on peut écrire : $\dfrac{d^k}{dx}(x^n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

D'une part on a $f(x) = x^n - x^{2n}$ donc $f^{(n)}(x) = n! - \dfrac{(2n)!}{n!}x^n$ et d'autre part, en dérivant $f(x)$ comme un produit, on a d'après la formule de Leibniz (on sépare le terme d'indice n) :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \binom{n}{n}\frac{d^n}{dx^n}(x^n) \times (1-x^n) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^n) \times \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x^n) \\
&= n!(1-x^n) - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \times \frac{n!}{k!}x^k \\
&= n!(1-x^n) - n!x^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}^2 = n! - n!x^n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}^2 + 1\right] \\
&= n! - n!x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.
\end{aligned}$$

En identifiant les deux valeurs trouvées pour $f^{(n)}(1)$ (par exemple), il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Exercice 6 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x\,;\ g(x) = \sin^2 x\,;\ h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

<u>Correction</u> :

1. Selon que $n \equiv 0[4], 1[4], 2[4], 3[4]$, $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.
2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2\sin x\cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x$, $-4\sin 2x$, $-8\cos 2x$, $16\sin 2x$,... Finalement, selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 0[4]$, $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.
3. $\sin(x)^3+\cos(x)^3 = \dfrac{-1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin(x)+\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive. Selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 4[4]$, $h^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\dfrac{1}{4}(-(3)^n\cos(3x)+3\cos(x)-(3)^n\sin(3x)-3\sin(x))$, $\dfrac{1}{4}((3)^n\sin(3x)-3\sin(x)-(3)^n\cos(3x)-3\cos(x))$, $\dfrac{1}{4}((3)^n\cos(3x)-3\cos(x)+(3)^n\sin(3x)+3\sin(x))$ et $\dfrac{1}{4}(-(3)^n\sin(3x)+3\sin(x)+(3)^n\cos(3x)+3\cos(x))$.

3 Application à l'étude des fonctions élémentaires

- La fonction numérique appelée logarithme népérien $t \mapsto \log(x)$ définie pour $x > 0$ satisfait à
$$\frac{d}{dx}(\log(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \log(1) = 0.$$
et établit une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque notée $x \mapsto \exp(x)$.
- La fonction numérique appelée exponentielle $t \mapsto \exp(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait à
$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x).$$
- La fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{C}$ $x \mapsto \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie
$$\frac{d}{dx}(\exp(ix)) = i\exp(ix).$$
- La restriction de $x \mapsto \sin(x)$ à l'intervalle $[-\pi/2, +\pi/2]$ est une bijection continue de cet intervalle sur $[-1, 1]$ et sa dérivée $\cos(x)$ ne s'annule qu'aux points $-\pi/2$ et $+\pi/2$, d'images respectives -1 et $+1$. Cette fonction admet une réciproque, notée $\arcsin(x)$ (le nombre $y = \arcsin(x)$ étant défini par les deux conditions $\sin(y) = x$, $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$). La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, +1]$ et dérivable sur $]-1, +1[$, sa dérivée étant
$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- On définit de même la fonction $\arccos(x)$ sur $[-1, +1]$ par les conditions
$$\cos(\arccos(x)) = x,\ 0 \leq \arccos(x) \leq \pi,$$
qui entraînent $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$ et on a
$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d}{dx}(\arcsin(x)).$$
- La restriction de $x \mapsto \tan(x)$ à l'intervalle $]-\pi/2, +\pi/2[$ est une bijection continue de cet intervalle sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1 + \tan^2(x)$ ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\arctan(x)$, dérivable sur $\mathbb{R}$, le nombre $y = \arctan(x)$ étant défini par les consitions $\tan(y) = x$, $-\pi/2 < y < +\pi/2$, et vérifiant
$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$
- Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, la fonction composée $x \mapsto \exp(a\log(x))$ est définie pour $x > 0$. On la note $x \mapsto x^a$ (car, pour $a \in \mathbb{Z}$, elle coïncide avec la puissance d'ordre a de x). Cette fonction est dérivable avec
$$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{a}{x}\exp(a\log(x)) = ax^{a-1}.$$
Par récurrence, on en déduit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie
$$\frac{d^n}{dx^n}(x^a) = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$. Les fonctions ainsi définies sont évidemment dérivables, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient les relations
$$(\mathrm{ch}(x))' = \mathrm{sh}(x) \text{ et } (\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x).$$

On peut associer aux fonctions $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$, appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques, les fonctions $x \mapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ (tangente hyperbolique de x) et $x \mapsto \coth(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ (cotangente hyperbolique de x, définie pour $x \neq 0$) dont les dérivées sont

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{th}(x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \text{ et } \frac{d}{dx}(\coth(x)) = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sh}(x)) = \mathrm{ch}(x) > 0$ donc $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est une fonction continue strictement croissante. C'est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée ne s'annule pas. Cette fonction admet donc une réciproque notée $\mathrm{Arg\ sh}(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ sh}(x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Arg\ sh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

  De même, la restriction à $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur la demi-droite $x \geq 1$ dont la dérivée est positive pour $x > 1$. Elle admet donc une réciproque positive, notée $\mathrm{Arg\ ch}(x)$ définie sur la demi-droite $x \geq 1$ et dérivable pour $x > 1$ de dérivée

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ ch}(x)) = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Arg\ ch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ (x > 1)$$

- La fonction $\mathrm{th}(x)$ croît de -1 à $+1$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas. La fonction $x \mapsto \mathrm{th}(x)$ admet donc une réciproque, notée $\mathrm{Arg\ th}(x)$ définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,+1[$ dont la dérivée est

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Arg\ th}(x)) = \frac{1}{1-x^2} \ (|x| < 1)$$

4 Théorème de Rolle - Applications

Théorème 4.1 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et admettant, en un point t_0 intérieur à I, un extrémum relatif (maximum ou minimum). Si la dérivée $f'(t_0)$ existe, on a $f'(t_0) = 0$.*

Théorème 4.2 *Théorème de Rolle*
Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 4.3 *Formule des accroissements finis*
Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que l'on ait

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Les deux théorèmes précédents traduisent le fait géométrique suivant :

Proposition 4.1 *Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (appelée « corde ») joignant les points $A = [a, f(a)]$ et $B = [b, f(b)]$.*

Théorème 4.4 *Règle de l'Hôpital*
Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un voisinage I du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $I\backslash\{t_0\}$, satisfaisant à $f(t_0) = g(t_0) = 0$ et à $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ pour $t \neq t_0$. Pour que le rapport $f(t)/g(t)$ tende vers le nombre L lorsque t tend vers t_0, il suffit que le rapport $f'(t)/g'(t)$ tende vers L au point t_0.

Proposition 4.2 *Application à la variation des fonctions numériques*
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point intérieur à I. Pour que f soit croissante (resp. décroissante) au sens large sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout ≥ 0 (resp. ≤ 0). Pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout nulle.

Proposition 4.3 *Pour qu'une fonction numérique dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ soit strictement croissante il suffit que sa dérivée soit strictement positive.*

Théorème 4.5 *Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(t_0) \neq 0$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant t_0, tel que la restriction de f à J soit strictement monotone et admette une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 7 Démontrer le Théorème de Rolle généralisé : « Soit F une fonction continue sur $[a;+\infty[$, dérivable sur $]a;+\infty[$ telle que $F(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Alors il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $F'(c) = 0$ ».

<u>*Correction*</u> : On raisonne par l'absurde, le théorème de Darboux assure alors que F' garde un signe constant (par exemple strictement positif) sur $]a;+\infty[$. L'application F y est donc strictement croissante, et puisque

$$\forall x > a+1,\ F(x) > F(a+1) > F(a),$$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq F(a+1) > F(a)$. Contradiction.

Exercice 8 Démontrer le résultat suivant : « Soit (F_n) une suite de fonctions dérivables de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que la suite $(F_n(x_0))$ converge,
- la suite de fonctions (F'_n) converge uniformément vers une fonction g.

Alors (F_n) converge uniformément sur $[0;1]$ vers une fonction dérivable F qui vérifie $F' = g$ ».

<u>*Correction*</u> : Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall p, q > N$, $|F_p(x_0) - F_q(x_0)| \leq \varepsilon$ et $\forall x \in [0;1]$, $|F'_p(x) - F'_q(x)| = |(F_p(x) - F_q(x))'| \leq \varepsilon$. Dans les mêmes circonstances, par l'inégalité des accroissements finis :

$$|(F_p - F_q)(x) - (F_p - F_q)(x_0)| \leq \varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon,$$

et à fortiori :

$$|(F_p - F_q)(x)| \leq \varepsilon + |(F_p - F_q)(x_0)| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que la suite (F_n) est uniformément de Cauchy sur $[0;1]$, à but réel (complet), donc (F_n) converge uniformément vers une fonction notée F. Soit $a \in [0;1]$.

On veut montrer ensuite que F est dérivable en a. On va donc évaluer : $\Delta(x,a) = \left|\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a} - g(a)\right|$ pour $x \neq a$. L'idée est d'écrire :

$$\Delta(x,a) = \left|\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a}\right| + \left|\frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} - F'_N(a)\right| + |F'_N(a) - g(a)|$$

avec N judicieusement choisi dans $\mathbb{N}^\star$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\|F'_N - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}\ ;\ \forall p \geq N,\ \|F'_p - F'_N\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme plus haut (avec l'inégalité des accroissements finis), pour $p \geq N$ et $x \in [0;1]$, on a : $|(F_p - F_N)(x) - (F_p - F_N)(a)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, ce qui donne en faisant tendre à bon droit p vers $+\infty$:

$$\left|\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - \frac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De là : $\Delta(x,a) \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} + \left|\dfrac{F_N(x) - F_N(a)}{x - a} - F'_N(a)\right|$. On choisit alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1] \cap]a - \delta; a + \delta[$, le dernier terme soit majoré par $\dfrac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que F est dérivable en a avec $F'(a) = g(a)$.

Exercice 9 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = [(1 - t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1;1]$.

<u>*Correction*</u> : $Q_n(t) = (1 - t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1. $Q_n(-1) = 0 = Q_n(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]-1,1[$ tel que $Q'_n(c) = 0$. Ainsi $Q'_n(-1) = 0$, $Q'_n(c) = 0$, $Q'_n(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1,c]$ et sur $[c,+1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n, auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par construction ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Exercice 10 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a;b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a;b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a;b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Correction :
Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Exercice 11 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0;1[$
$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$
3. Donner une interprétation géométrique du résultat précédent.

Correction :

1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe par conséquent $c \in]x,y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y-x) \Leftrightarrow \ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$ donc $\frac{y-x}{\ln y - \ln x} = c$. Comme $x < c < y$, on a les inégalités recherchées.
2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$ et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0,1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ et $f'(1) < 0$ d'après la première question. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x,y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) > 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.
3. Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

5 Formule générale des accroissements finis

De façon générale, si f est une application continue de $[a,b]$ dans un e.v.n. E (par exemple $\mathbb{R}^n$), dérivable sur $]a,b[$, il n'existe pas nécessairement de point c de $]a,b[$ tel que l'on ait l'égalité vectorielle $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ et le cas où un tel point c existe doit être considéré comme exceptionnel. Il est cependant très important pour les applications de pouvoir donner une majoration précise et simple de $\|f(b) - f(a)\|$ connaissant une majoration de $\|f'(t)\|$ sur $]a,b[$.

Proposition 5.1 *Soit f une application continue de l'intervalle fermé $[a,b]$ dans un espace vectoriel normé E et soit g une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'en chaque point de $[a,b]$, f et g possèdent des dérivées à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \le g'_d(t)$ quel que soit $t \in [a,b]$. Alors on a*
$$\|f(b) - f(a)\| \le g(b) - g(a).$$

En prenant $f(t) = 0$ quel que soit t, on obtient le

Théorème 5.1 *Si g est une fonction numérique continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et pourvue en chaque point de $]a,b[$ d'une dérivée à droite positive ou nulle alors g est croissante.*

En prenant $g(t) = kt$ (k constante positive), on obtient le résultat fondamental suivant

Théorème 5.2 *Soit f une application continue d'un intervalle $[a,b]$ dans un espace vectoriel normé E admettant en chaque point de $]a,b[$ une dérivée à droite vérifiant l'inégalité $\|f'_d(t)\| \le k$. Alors on a*
$$\|f(b) - f(a)\| \le k(b-a).$$

Corollaire 5.1 *Soit f une fonction (numérique ou vectorielle) continue sur l'intervalle $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée à droite partout nulle. Alors f est constante sur $[a,b]$.*

Proposition 5.2 *Prolongement d'une fonction dérivable*
Soit I un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et f une fonction (numérique ou vectorielle) définie sur $I \backslash \{t_0\}$ admettant en tout point de $I \backslash \{t_0\}$ une dérivée à droite. On suppose que
$$y_0 = \lim_{t \to t_0} f(t) \text{ et } z_0 = \lim_{t \to t_0} f'_d(t) \text{ existent}$$
et on désigne par $\overline{f}$ le prolongement de f à I obtenu en posant $\overline{f}(t_0) = y_0$. Alors $\overline{f}$ est dérivable au point t_0 et on a $\overline{f}'(t_0) = z_0$.

6 Fonctions convexes d'une variable numérique

Définition 6.1 *Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si quels que soient $x, y \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, on a l'inégalité*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

f est donc convexe si et seulement si le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x, y]$ de I est situé au dessous de la corde joignant les points $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$.

Proposition 6.1 *Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit convexe, il faut et il suffit que pour chaque u fixé dans I, la fonction*

$$F_u : t \mapsto \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$$

soit croissante sur $I \backslash \{u\}$.

Théorème 6.1 *Une fonction convexe sur un intervalle ouvert I est continue et admet en tout point de I une dérivée à gauche et une dérivée à droite, qui sont des fonctions croissantes vérifiant les inégalités*

$$f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'_g(v) \leq f'_d(v)$$

quels que soient $u, v \in I$ avec $v > u$.

Théorème 6.2 *Pour qu'une fonction numérique f, continue sur un intervalle ouvert I, soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette sur I une dérivée à droite (resp. à gauche) croissante.*

Proposition 6.2 *Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle ouvert I et admettant sur I une dérivée seconde, soit convexe, il faut et il suffit que l'on ait $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.*

Proposition 6.3 *Pour qu'une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée à droite (resp. à gauche) en tout point de I et que son graphe soit tout entier situé au dessus de ses tangentes à droite (resp. à gauche).*

7 Formules de Taylor

Soit f une fonction vectorielle (éventuellement numérique) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant en un point t_0 de I des dérivées jusqu'à l'ordre n inclus. Posons pour $t \in I$

$$R_n(t_0, t, f) = f(t) - f(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t - t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0).$$

On se propose alors d'évaluer $R_n(t_0, t, f)$ ou tout au moins de chercher une majoration de $\|R_n(t_0, t, f)\|$, les évaluations ou majorations ainsi obtenues étant appelées formules de Taylor, le vecteur (ou nombre) $R_n(t_0, t, f)$ étant appelé quant à lui reste d'ordre n de la formule de Taylor relative au point t_0.

Proposition 7.1 *Formule de Taylor-Lagrange*
Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b - a)$ avec $0 < \theta < 1$. On remarquera que cette proposition se réduit à la formule des accroissements finis lorsque $n = 0$.

Proposition 7.2 *Formule de Taylor-Mac Laurin*
Lorsque $a = 0$, on obtient en posant $b = x$ dans la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \ (0 < \theta < 1).$$

Lorsque f prend ses valeurs dans un e.v.n. quelconque, on se contentera d'un résultat moins précis, qui donne une majoration de $\|R_n(a,b,f)\|$ lorsqu'on connaît une majoration de $\|f^{(n+1)}(t)\|$ sur $]a,b[$.

Proposition 7.3 *Soit f une fonction à valeurs dans un e.v.n. quelconque E de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée d'ordre $n+1$ vérifiant $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq \lambda$ ($\lambda = cste$) quel que soit $t \in]a,b[$. On a alors l'inégalité :*

$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On restreint nos hypothèses en supposant seulement que $f^{(n)}(a)$ existe.

Proposition 7.4 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une application d'un voisinage de a dans un e.v.n. quelconque E, telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors la fonction ρ définie par*

$$\rho : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n} \left[f(t) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right]$$

tend vers 0 quand t tend vers a.

Proposition 7.5 *Formule de Taylor-Young*
Posant $\rho(a) = 0$, il existe une fonction $\rho : t \mapsto \rho(t)$ définie sur un voisinage de a et à valeurs dans E qui tend vers 0 lorsque t tend vers a et qui vérifie la formule

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \rho(t).$$

Proposition 7.6 *Application à l'étude de la croissance de l'exponentielle et du logarithme*

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} \exp(x) = 0$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(\log(t))^{\alpha}}{t^{\beta}} = 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{\beta} |\log(t)|^{\alpha} = 0$.

Définition 7.1 *Pour chaque fonction f admettant une dérivée d'ordre n au point a, la fonction*

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

est appelée le développement de Taylor d'ordre n de f au point a.

Exercice 12 On considère l'équation $E(I)$: $f(x) = xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)$ d'inconnue f appartenant à l'ensemble des applications de $I \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ au moins 1 fois dérivable sur I. (On supposera que I est ou $]0;+\infty[$, ou $[0;+\infty[$, ou $]-\infty;0[$, ou $]-\infty;0]$ ou $\mathbb{R}$ lui-même.) On note $S(I)$ l'ensemble des solutions de l'équation $E(I)$.

1. Soit f un élément de $S(I)$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est $(n+1)$ fois dérivable sur $I \backslash \{0\}$ et que, pour tout élément x de $I \backslash \{0\}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right).$$
2. On suppose que l'intervalle I contient 0. Montrer que tout élément f de $S(I)$ vérifie $f(0) = 0$ et appartient à $\mathcal{C}^1(I)$.
3. Étude d'une fonction auxiliaire.
   (a) Étudier les variations de l'application $v : t \to t2^{1-t}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $t2^{1-t} = 1$, d'inconnue réelle t, est l'ensemble $\{1, 2\}$.
4. On suppose que l'intervalle I contient 0. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f un élément de $S(I)$ n fois dérivable au point 0.
   (a) En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que, pour tout entier p compris entre 1 et n, $f^{(p)}(0) = 0$ ou $p2^{1-p} = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe des complexes a et b tels que, quand x tend vers 0 dans I,
$$f(x) = ax + bx^2 + \circ(x^n).$$
5. Montrer que, si l'application $f : I \to \mathbb{C}$ appartient à $S(I)$, alors, pour tout entier naturel k, l'application $x \mapsto x^k f^{(k)}(x)$, de I vers $\mathbb{C}$, appartient aussi à $S(I)$.

Correction :

1. La propriété est vraie au rang 0 puisque f est une fois dérivable et $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout $x \in I\backslash\{0\}$. Si la propriété est vraie au rang n, alors f est $n+1$ fois dérivable sur $I\backslash\{0\}$ et
$$\forall x \in I\backslash\{0\},\ f^{(n)}(x) = \frac{x}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^{n-1}} f^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right). \tag{1}$$
Cela s'écrit :
$$\forall x \in I\backslash\{0\},\ f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{t}(2^{n-1}f^{(n)}(2t) - nf^{(n)}(t))$$
et exprime $f^{(n+1)}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $I\backslash\{0\}$ ce qui revient à dire que f est $n+2$ fois dérivable sur $I\backslash\{0\}$. En dérivant les deux membres de (1), on obtient :
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2^{n+1}} f^{(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2^{n+1}} f^{(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{n+1}{2^n} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)$$
pour tout $x \in I\backslash\{0\}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
2. Ici $0 \in I$ et il suffit de remplacer x par 0 dans l'équation $E(I)$ pour obtenir $f(0) = 0$. D'après la question précédente, f est de classe C^∞ sur $I\backslash\{0\}$. Par hypothèse, f est dérivable sur tout I, donc à fortiori en 0, et cela s'écrit $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0)$ (bien entendu, si 0 est la borne inférieure de I, la dérivabilité en 0 sera une limite à droite, etc). Ainsi la quantité
$$f'(t) - f'(0) = \frac{f(2t)}{2t} - f'(0)$$
tendra vers 0 quand t tend vers 0, et cela prouve la continuité de f' en 0. En conclusion, $f \in C^1(I)$.
3. (a) La fonction $v(t) = t2^{1-t} = t\exp((1-t)\ln 2)$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables, et la formule de dérivation d'un produit donne
$$v'(t) = 2^{1-t} - \ln 2 \times t\exp((1-t)\ln 2) = (1 - t\ln 2)2^{1-t}.$$
Le signe de la dérivée est facile à obtenir, d'où les variations de v : comme $v'(t) > 0$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{\ln 2}\right[$ et $v'(t) < 0$ sur $\left]\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$, v est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{\ln 2}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$. De plus, $\lim\limits_{t\to-\infty} v(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0_+$ et $v\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{2}{e\ln 2}$.
   (b) 1 et 2 sont solutions évidentes de l'équation $v(t) = 1$ et le tableau de variations de v montre que ce sont les seules.
4. (a) La fonction f est n fois dérivable en 0, et on peut donc appliquer la formule de Taylor-Young
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \circ(x^n)$$
et affirmer que la fonction dérivée f' admet le DL suivant au voisinage de 0 :
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}x^{k-1} + \circ(x^{n-1}).$$
L'égalité $f(x) = xf'\left(\frac{x}{2}\right)$ s'écrit :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \circ(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{2^{k-1}(k-1)!}x^k + \circ(x^n),$$
l'unicité de la partie polynomiale d'un DL entraîne $f(0) = 0$ et
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(1 - \frac{k}{2^{k-1}}\right) = 0,$$
i.e.
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ f^{(k)}(0)(1 - k2^{1-k}) = 0.$$
Ainsi, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{(k)}(0)$ ou $1 - k2^{1-k}$ est égal à 0.
Remarque 7.1

– En fait, on ne peut pas dériver le DL de façon quasi-automatique. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 puisque $f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x} = \circ(x^2)$, sans que la dérivée $f'(x) = 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$ soit un $\circ(x)$ (dans le cas contraire, $x \cos \dfrac{1}{x}$ serait négligeable devant x, ce qui est absurde).

– L'intégration ou la dérivation d'un DL en 0 pose moins de problème si la fonction est définie en 0 (autrement dit si f est définie au voisinage de 0) et en rajoutant de bonnes hypothèses (par exemple : la fonction n fois dérivable en 0, comme dans le problème).

(b) La question précédente ainsi que 3.(b) permettent d'écrire

$$f \in \mathcal{S}(I) \Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k \in \{3, 4, \ldots, n\}$$

d'où $f(x) = f'(0) + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2} x^2 + \circ(x^n)$. Il existe donc des complexes a, b tels que $f(x) = ax + bx^2 + \circ(x^n)$.

5. On pose $g_k(x) = x^k f^{(k)}(x)$. Comme $f \in \mathcal{S}(I)$,

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ x^k f^{(k)}(x) = x \left[k \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} f^{(k)}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^k f^{(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right) \right].$$

Or $g'_k(x) = kx^{k-1} f^{(k)}(x) + x^k f^{(k+1)}(x)$ donc $g'_k\left(\dfrac{x}{2}\right) = k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{k-1} f^{(k)}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \left(\dfrac{x}{2}\right)^k f^{(k+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Ainsi la fonction g_k vérifie l'équation $g_k(x) = x g'_k\left(\dfrac{x}{2}\right)$ d'où $g_k(x) = x^{k+1} f^{(k+1)}(x) \in \mathcal{S}(I)$.

Exercice 13 On désigne par $N_{\infty,I}(f) = \sup_{x \in I} |f(x)|$ et $N_{2,I} = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. f désigne une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que pour tout $(x, \lambda) \in \ \times \mathbb{R}$:

$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$

(b) En déduire que, pour tout réel x,

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') f(x)}$$

2. Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur $2r$, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I.
À l'aide d'une formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples $(x, x+r)$ ou $(x, x-r)$, montrer que, pour tout élément x de I,

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

En déduire que

$$N_{\infty,I}(f') \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

Correction :

1. (a) La fonction f étant C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + \lambda$; il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + \lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(x + \theta h) \geq 0.$$

À fortiori,

$$f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \geq 0.$$

(b) • Premier cas : $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') > 0$. Dans ce cas, $f(x) + \lambda f'(x) + \dfrac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'')$ est un trinôme en λ conservant un signe constant, son discriminant est donc négatif ou nul :

$$[f'(x)]^2 - 2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') f(x) \leq 0$$

ou

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x)}. \qquad (2)$$

• Deuxième cas : $N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') = 0$. La fonction f est alors affine et positive sur $\mathbb{R}$. Il existe $b \geq 0$ tel que $f(x) = b$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Alors $f' = 0$ et l'inégalité (2) est encore vraie.

2. On a $(x, x+r) \in I^2$ ou $(x-r, x) \in I^2$. Supposons, par exemple, que $(x, x+r) \in I^2$: comme

$$f(x+r) = f(x) + rf'(x) + \frac{r^2}{2} f''(x+\theta r),$$

on a

$$f'(x) = \frac{1}{r}\left[f(x+r) - f(x)\right] - \frac{r}{2} f''(x+\theta r),$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

Comme ceci vaut pour tout x de I, donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

8 Développements limités polynomiaux

Définition 8.1 *Soient f, g deux fonctions définies sur des voisinages d'un point t_0 dans un espace topologique T, prenant leurs valeurs dans un même e.v.n. E. On dit que f est équivalente à g au voisinage du point t_0 si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V du point t_0 tel que, pour tout $t \in V$, on ait*

$$\|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon \|g(t)\|.$$

Définition 8.2 *Notations de Landau*
Supposons donnés un e.v.n. E, un espace topologique T et un point t_0 de T. Pour chaque fonction numérique φ, définie sur un voisinage U de t_0 et ne s'annulant pas sur $U \backslash \{t_0\}$, on désignera par $\bigcirc(\varphi)$ (resp. $\circ(\varphi)$) l'ensemble des fonctions à valeurs dans E, définies sur des voisinages de t_0 dans T, telles que le rapport $\dfrac{f(t)}{\varphi(t)}$ soit borné dans un voisinage du point t_0 (resp. tende vers 0 quand t vers t_0). Plus précisément, on posera

- *$f \in \bigcirc(\varphi)$ si et seulement si il existe un voisinage V de t_0 dans T et un nombre $k \geq 0$ tels que pour tout $t \in V$ on ait $\|f(t)\| \leq k|\varphi(t)|$,*
- *$f \in \circ(\varphi)$ si et seulement si quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de t_0 dans T tel que, pour tout $t \in V$, on ait $\|f(t)\| \leq \varepsilon|\varphi(t)|$.*

Définition 8.3 *Soit f une fonction, définie dans un voisinage du point t_0 de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un e.v.n. E et soit P_n un polynôme de degré $\leq n$ à coefficients dans E. On dit que P_n est un développement limité (DL) d'ordre n pour f au voisinage de t_0 si on a*

$$f(t) = P_n(t) + \circ(t - t_0)^n,$$

c'est-à-dire si le quotient $(t-t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)]$ tend vers zéro lorsque t tend vers t_0 et si $f(t_0) = P_n(t_0)$.

Remarque 8.1

1. Si la fonction f admet un DL d'ordre $n \geq 0$ (resp. $n \geq 1$) au voisinage de t_0 alors f est continue (resp. dérivable) au point t_0.
2. Si la fonction f est définie sur un voisinage de t_0, sauf au point t_0, et s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que

$$\lim_{t \to t_0} (t-t_0)^{-n}[f(t) - P_n(t)] = 0 \text{ avec } n \geq 0,$$

on peut prolonger f par continuité au point t_0 en posant $f(t_0) = P_n(t_0)$. La fonction ainsi obtenue est continue au point t_0 et vérifie les conditions de la définition précédente.

Proposition 8.1 *La formule de Taylor fournit un DL d'ordre n des fonctions usuelles au voisinage de l'origine :*

- $\exp(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,
- $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \bigcirc(x^{2n+2})$,

- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots - \dfrac{x^n}{n} + \bigcirc(x^{n+1})$,
- $(1+x)^a = 1 + ax + \ldots + \dfrac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \bigcirc(x^{n+1})$.

Théorème 8.1 *Théorème d'unicité*
Si la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage du point t_0, ce développement est unique.

Corollaire 8.1 *Si f est une fonction paire (resp. impaire) admettant un DL d'ordre n au voisinage de l'origine, ce développement ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Proposition 8.2 *On a*

- $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\arcsin(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\operatorname{Arg\,th}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$,
- $\operatorname{Arg\,sh}(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \bigcirc(x^{2n+3})$.

Exercice 14 Démontrer le théorème et le corollaire suivants :

Théorème 8.2 *Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0) et admet le DL*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \circ(x^n)$$

en ce point, et si F est une primitive de f sur I, alors

$$F(x) - F(0) = a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1}).$$

Corollaire 8.2 *Si f est définie sur un intervalle I au voisinage de 0 (donc contenant aussi 0), admet le DL*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \circ(x^n)$$

en ce point, et si f est n fois dérivable en 0 (avec $n \geq 2$), alors f est dérivable sur un intervalle J contenant 0 et inclus dans I, et

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \circ(x^{n-1}).$$

<u>Correction</u> :
• Preuve du Théorème :
Notons $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ et $P(x) = a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Le théorème des accroissements finis montre que, pour x voisin de 0,

$$|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \left(\sup_{0\leq t\leq x} |f(t) - p(t)|\right)|x|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|t| \leq \eta$ entraîne $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon|t|^n$. Si $|x| \leq \eta$ et si t se trouve entre 0 et x, on peut donc affirmer que

$$|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon|t|^n \leq \varepsilon|x|^n$$

et l'inégalité précédente donne $|F(x) - F(0) - P(x)| \leq \varepsilon|x|^{n+1}$. Cela montre que $F(x) - F(0) - P(x) = \circ(x^{n+1})$ et achève la preuve.

• Preuve du Corollaire :
La dérivée f' est définie sur un voisinage J de 0 et $n-1$ fois dérivable en 0, donc admet un DL en 0 à l'ordre $n-1$ d'après la formule de Taylor-Young, par exemple

$$f'(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + \circ(x^{n-1}).$$

Le théorème précédent donne :

$$f(x) = f(0) + b_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + \circ(x^n)$$

et l'unicité d'un DL donne $a_0 = f(0)$ et $a_k = \dfrac{b_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

9 L'algèbre des développements limités

On se limite au cas des fonctions numériques définies sur un voisinage de l'origine.

Proposition 9.1 *Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de l'origine. Alors les fonctions $f+g$ et fg admettent de DL d'ordre n en ce point et il en est de même de $\dfrac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$. De plus,*

1. *le DL de $f+g$ est la somme des DL de f et de g,*
2. *le DL du produit fg s'obtient en ne gardant que les termes d'ordre $\leq n$ dans le produit des DL de f et de g,*
3. *le DL du quotient $\dfrac{f}{g}$ est égal au DL du quotient des DL de f et de g.*

Proposition 9.2 *Soient f et g deux fonctions numériques admettant des DL d'ordre $n \geq 1$ P_n et Q_n respectivement, au voisinage de l'origine. Si $f(0) = 0$, la fonction composée $g \circ f$ admet le même DL d'ordre n que le polynôme $Q_n \circ P_n$. On obtient donc ce développement en ne conservant, dans $Q_n \circ P_n$, que les termes d'ordre $\leq n$.*

Exercice 15 Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \to & \left]-\dfrac{1}{e};+\infty\right[\\ x & \mapsto & x\exp(x) \end{array}$

Montrer que f est bijective, et que f et f^{-1} sont de classe C^1 sur leurs ensembles de définition. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Correction : Notons $I =]-1,+\infty[$, $J = \left]-\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ et $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\exp(x) \end{array}$.

- $\tilde{f}$ est dérivable sur I comme produit de fonctions qui le sont, et on a : $\forall x \in I$, $\tilde{f}'(x) = (1+x)\exp(x) > 0$ donc $\tilde{f}$ est strictement croissante sur I.
- $\tilde{f}$ est continue et strictement monotone entre intervalles de $\mathbb{R}$, donc induit une bijection de I sur $\tilde{f}(I) = J$. Cette bijection est $\begin{array}{ccc} I & \mapsto & J \\ x & \to & x\exp(x) \end{array}$, c'est-à-dire f (qui est donc bien définie).
- f est de classe C^∞ sur I, bijective et $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ donc $f^{-1} \equiv g$ est de classe C^∞ sur J.
- g est de classe C^3 sur J et $0 \in J$ donc g possède un DL en 0 d'après la formule de Taylor-Young. On a $f(0) = 0$ donc aussi $g(0) = 0$ de sorte qu'on peut écrire le DL de g sous la forme indéterminée suivante :
$$g(u) \underset{0}{=} au + bu^2 + cu^3 + \circ(u^3).$$
On a aussi le DL en 0 de f :
$$f(x) \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \circ(x^3) = x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)).$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on a donc :
$$x = g(f(x)) = af(x) + bf^2(x) + cf^3(x) + \circ((f(x)^3).$$
On a : $\circ((f(x)^3) \underset{0}{=} \circ(x^3)$ car : $f(x) \underset{0}{\sim} x$. Donc :
$$\begin{aligned} x &= ax(1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)) + bx^2(1 + 2x + \circ(x)) + cx^3(1 + \circ(1)) + \circ(x^3) \\ &= ax + (a+b)x^2 + (\frac{a}{2} + 2b + c)x^3 + \circ(x^3). \end{aligned}$$
Par unicité du DL de la fonction identité au voisinage de 0, on obtient : $a = 1$, $b = -1$ et $c = \dfrac{3}{2}$ et ainsi :
$$g(x) \underset{0}{=} x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \circ(x^3).$$
- On a : $\forall x \in J$, $x = f(g(x)) = g(x)\exp(g(x))$ et g reste strictement positive sur $\mathbb{R}^{\star +}$ (car g est strictement croissante et $g(0) = 0$) donc : $\forall x > 0$, $\ln x = \ln(g(x)) + g(x)$ ou encore $\dfrac{\ln x}{g(x)} = 1 + \dfrac{\ln(g(x))}{g(x)}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ comme f, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(g(x))}{g(x)} = 0$ par composition des limites, d'où : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Exercice 16 Calculer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

(a) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ $(n=3)$ (b) $\text{Arg ch}\sqrt{2+x^2}$ $(n=4)$ (c) $\ln\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$ $(n=5)$

(d) $(1-\cos x)^5$ $(n=13)$ (e) $\dfrac{\ln(\text{ch}x)}{\cos x}$ $(n=5)$ (f) $\tan x$ en $\dfrac{\pi}{4}$ $(n=3)$.

Correction :
Chacune des fonctions envisagées sera notée f dans ce qui suit.

1. On a $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1+\alpha x \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\circ(x^3)$ donc, avec $\alpha=\dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} \overset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\circ(x^3).$$

Puis

$$f(x) \underset{0}{=} \sqrt{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\circ(x^3)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+\circ(x^3)} = \sqrt{2}\sqrt{1+u}$$

où

$$u=\frac{x}{4}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\circ(x^2)\right);\ u^2=\frac{x^2}{16}\left(1-\frac{x}{2}+\circ(x)\right);\ u^3=\frac{x^3}{64}(1+\circ(1)).$$

Puisque $u \underset{x\to 0}{\to}$, on peut affirmer $f(x) \underset{0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1+u}=\sqrt{2}\left[1+\dfrac{u}{2}-\dfrac{u^2}{8}+\dfrac{u^3}{16}+\circ(u^3)\right]$.

Comme $u \overset{0}{=} \sqrt{2}\left[1+\dfrac{x}{8}\left(1-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8}\right)+\dfrac{x^2}{128}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{x^3}{1024}+\circ(x^3),\right]$

$$f(x) \overset{0}{=} \sqrt{2}\left[1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+\frac{21}{1024}x^3+\circ(x^3)\right].$$

2. On effectue le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction φ définie par $\varphi(t)=\text{Arg ch}\sqrt{2+t}$ puis on y substitue x^2 à t. On rappelle que $\forall x\geq 1$, $\text{Arg ch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ donc

$$\varphi(t)=\ln(\sqrt{2+t}+\sqrt{1+t}).$$

Comme au 1. on a $\sqrt{1+t}\overset{0}{=}1+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+\circ(t^2)$ et $\sqrt{2+t}=\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{t}{2}}\underset{0}{=}\sqrt{2}\left[1+\dfrac{t}{4}-\dfrac{t^2}{32}+\circ(t^2)\right]$. Ainsi

$$\sqrt{2+t}+\sqrt{1+t}\underset{0}{=}1+\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{4}t-\frac{4+\sqrt{2}}{32}t^2+\circ(t^2)=(1+\sqrt{2})[1+at+bt^2+\circ(t^2)]$$

où $a=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $b=-\dfrac{4+\sqrt{2}}{32(1+\sqrt{2})}=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{32}$. Enfin, en substituant $u=at+bt^2+\circ(t^2)$ dans le DL d'ordre 2 en 0 suivant : $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\circ(u^2)$, on obtient

$$\varphi(t)\underset{0}{=}\ln(1+\sqrt{2})+\ln(1+u)=\ln(1+\sqrt{2})+at+bt^2-\frac{a^2}{2}t^2+\circ(t^2)=\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}t-\frac{3\sqrt{2}}{32}t^2+\circ(t^2).$$

On termine en substituant x^2 à t :

$$f(x)\underset{0}{=}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}x^2-\frac{3\sqrt{2}}{32}x^4+\circ(x^4).$$

3. On écrit les DL à l'ordre 5 en 0 suivants :

$$\ln(1+t)\underset{0}{=}t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}+\circ(t^5) \text{ et } \ln(1-t)\underset{0}{=}-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-\frac{t^5}{5}+\circ(t^5)$$

donc $\ln(1+t)-\ln(1-t)\underset{0}{=}2t+\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{2}{5}t^5+\circ(t^5)$. On peut substituer $\tan(x)$ à t car $\tan(x)\underset{x\to 0}{\to}0$ et alors le terme $\circ(t^5)$ devient $\circ(x^5)$ puisque $\tan(x)\underset{0}{=}\bigcirc(x)$. Il vient :

$$f(x)\underset{0}{=}2\tan(x)+\frac{2}{3}\tan^3(x)+\frac{2}{5}\tan^5(x)+\circ(x^5).$$

Comme le DL de la fonction tangente à l'ordre 5 en 0 est donné par $\tan(x)\underset{0}{=}x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\circ(x^5)$ d'où $\tan^3(x)=x^3+x^5+\circ(x^5)$ et $\tan^5(x)=x^5+\circ(x^5)$, on obtient $f(x)\underset{0}{=}2x+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{4}{15}x^5+\dfrac{2}{3}\left(x^3+x^5\right)+\dfrac{2}{5}x^5+\circ(x^5)$ soit

$$f(x)\underset{0}{=}2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{3}x^5+\circ(x^5).$$

On pouvait aussi tenter d'exploiter une des formules :

$$\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right);\ \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=2\text{Arg th}(t);\ 2\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}=\frac{2}{\cos(2x)}.$$

4. On a $\cos(x)\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\circ(x^5)$ donc $1-\cos(x)\underset{0}{=}\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\circ(x^5)=\dfrac{x^2}{2}\left[1-\dfrac{x^2}{12}+\circ(x^3)\right]$. On a directement $(1-\cos(x))^5=\dfrac{x^{10}}{32}\left[1-\dfrac{x^2}{12}+\circ(x^3)\right]^5=\dfrac{x^{10}}{32}\left[1-\dfrac{5}{12}x^2+\circ(x^3)\right]$ soit

$$f(x) = \frac{x^{10}}{32} - \frac{5}{384}x^{12} + \circ(x^{13})$$

5. Limitons les calculs aux termes utiles : $\text{ch}(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^5)$ et $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \bigcirc(u^3)$. On peut substituer $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)$ à u dans le DL précédent, et le terme $\bigcirc(u^3)$ s'écrit aussi $\bigcirc(x^6)$ ou encore $\circ(x^5)$ ce qui donne : $\ln(\text{ch}(x)) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \circ(x^5) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^5)$. Puis, comme on a déjà x^2 en facteur, on cherche seulement un DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$. On utilise :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3) \text{ et } \frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + \bigcirc(u^2) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + \circ(x^3).$$

Comme précédemment on obtient $\frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)$ soit $f(x) \underset{0}{=} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)\right)$ c'est-à-dire

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \circ(x^5).$$

6. On utilise par exemple la formule $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}$. On a le DL à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$\frac{1+t}{1-t} \underset{0}{=} (1+t)(1+t+t^2+t^3+\circ(t^3)) = 1 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + \circ(t^3)$$

d'où en substituant $\tan(h)$ à t et en utilisant $\tan(h) \underset{0}{=} h + \frac{h^3}{3} + \circ(h^3)$:

$$\tan\left(\frac{x}{4} + h\right) \underset{0}{=} 1 + 2\left(h + \frac{h^3}{3}\right) 2h^2 + 2h^3 + \circ(h^3) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + \circ(h^3).$$

Avec $x = \frac{\pi}{4} + h$, on a

$$\tan(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Soit f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2} \times \arcsin x$. On veut connaître le DL à l'ordre 5 en 0 de f par deux méthodes.

1. Première méthode.
   (a) Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{-1/2}$.
   (b) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $(1-x^2)^{-1/2}$.
   (c) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de $\arcsin x$.
   (d) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Deuxième méthode.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Trouver $a(x)$ tel que $f'(x) + a(x)f(x) = 1$.
   (c) Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de a.
   (d) En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de f.
   (e) En déduire la limite de la suite (u_n) donnée par $u_n = n^5\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right)$.

Correction :

1. Première méthode
   (a) D'après le cours $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ donc
   $$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$
   (b) On remplace ensuite x par $-x^2$ et on trouve $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$. De plus, comme $(1-x^2)^{-1/2}$ est pair, le terme à l'ordre 5 est nul, ainsi
   $$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x).$$

(c) $\arcsin x$ est une primitive de $(1-x^2)^{-1/2}$ et $\arcsin 0 = 0$ donc
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

(d) On peut soit calculer le DL de $(1-x^2)^{1/2}$ et multiplier, soit écrire $(1-x^2)^{1/2}\arcsin x = \dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{-1/2}}$ et diviser par les puissances croissantes. On trouve

$$\begin{array}{rlll|l}
 & x & +\frac{1}{6}x^3 & +\frac{3}{40}x^5 & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4 \\ \cline{5-5}
- & \Big(x & +\frac{1}{2}x^3 & +\frac{3}{8}x^5\Big) & x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5 \\
= & & -\frac{1}{3}x^3 & -\frac{3}{10}x^5 & \\
- & & \Big(-\frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{6}x^5\Big) & \\
= & & & -\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

2. (a) Un simple calcul donne $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

(b) On en déduit que $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{1-x^2}f(x)$ donc que f est solution de $f'(x) + \dfrac{x}{1-x^2}f(x) = 1$.

(c) On a $\dfrac{x}{1-x^2} = x(1+x^2+x^4+x^4\varepsilon(x)) = x + x^3 + x^4\varepsilon(x)$.

(d) Comme f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b ayant des développements limités à l'ordre 4, il en va de même pour f. De plus f est impaire, on peut donc écrire
$$f(x) = ax + bx^3 + cx^5 + x^5\varepsilon(x).$$
On en déduit que
$$f'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + x^4\varepsilon(x)$$
et que
$$\frac{x}{1-x^2}f(x) = (x+x^3)(ax+bx^3) + x^4\varepsilon(x) = ax^2 + (a+b)x^4 + x^4\varepsilon(x)$$
et enfin que
$$f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = a + (a+3b)x^2 + (a+b+5c)x^4 + x^4\varepsilon(x).$$
Comme $f'(x) + \dfrac{x}{1-x^2}f(x) = 1$, $a = 1$, $a + 3b = 0$ donc $b = -\dfrac{1}{3}$ et $a + b + 5c = 0$ donc $c = -\dfrac{2}{15}$. On retrouve bien
$$\sqrt{1-x^2}\arcsin x = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

(e) On a $u_n = n^5\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3}\right) = -\dfrac{2}{15} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\dfrac{2}{15}$.

10 Développements asymptotiques

Définition 10.1 *Soit $\mathcal{E}_{t_0}$ un ensemble de fonctions numériques définies au voisinage de t_0 et non équivalentes à zéro. On dit que $\mathcal{E}_{t_0}$ constitue une échelle de comparaison au voisinage de t_0 si $\mathcal{E}_{t_0}$ est totalement ordonné par la relation ($f = \circ(g)$ ou $f = g$) notée $f \preccurlyeq g$. En d'autres termes $\mathcal{E}_{t_0}$ constitue une échelle de comparaison si, quelles que soient les fonctions $f, g \in \mathcal{E}_{t_0}$ ($f \neq g$), l'une des relations $f = \circ(g)$, $g = \circ(f)$ est vraie.*

Définition 10.2 *Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point t_0 de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de t_0. On dit que f admet un développement asymptotique (ou limité) par rapport à $\mathcal{E}$, à la précision φ (où $\varphi \in \mathcal{E}$) s'il existe une famille de nombres réels $(\lambda_\psi)_{\psi\in\mathcal{E}}$ presque tous nuls, c'est-à-dire nuls sauf en un nombre fini d'entre eux, vérifiant*
$$f(x) = \sum_{\psi\in\mathcal{E},\psi\succcurlyeq\varphi} \lambda_\psi\psi(x) + \circ(\varphi).$$

Exercice 18 Pour $n > 3$, on note x_n la plus petite racine positive de l'équation $\exp(x) = x^n$. Étudier la suite (x_n) puis déterminer un développement asymptotique à l'ordre 3 de x^n suivant les puissances de $\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.
Correction :

(a) Existence.
On transforme d'abord l'équation pour se ramener à l'étude d'une seule fonction de x. On a pour $x > 0$ et $n > 3$, $\exp(x) = x^n$, $x = n \ln x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln x} = n$ ($\ln x \neq 0$ car $x = 1$ n'est pas solution de l'équation). On remarque aussi que $x = 0$ n'est pas solution et que pour $x \in]0,1]$, on a : $x^n << 1 < \exp(x)$ donc les solutions de l'équation sont à chercher dans $]1,+\infty[$. On définit la fonction φ sur $]1,+\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Elle est de classe C^1 et sa dérivée $\varphi'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ a le signe de $\ln x - 1$. D'où le tableau de variation :

x	1		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour $n \geq 3 > e$ le théorème de la bijection appliqué à la fonction φ, continue et strictement monotone sur l'intervalle $]1, e]$ montre que l'équation $\varphi(x) = n$ possède une unique solution x_n et que $1 < x_n < e$.

(b) Monotonie et limite.
La restriction de φ à l'intervalle $]1, e]$ admet une bijection réciproque que l'on nomme ϕ. Celle-ci est une bijection de $[e, +1[$ sur $]1, e]$ et elle est, comme φ, strictement décroissante. On a $\varphi(x_n) = n$ donc $x_n = \phi(n)$ et ainsi :

$$x_{n+1} = \phi(n+1) < \phi(n) = x_n$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est strictement décroissante. En fait ça n'est pas vraiment utile puisqu'on a directement sa convergence et sa limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 1$ donc $x_n = \phi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

(c) Développement asymptotique.
Reprenons la définition : $x_n^n = \exp(x_n)$ que l'on écrit : $x_n = \exp\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.

– Le DL1 de la fonction exponentielle en 0 s'écrit : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + \circ(u)$ et on peut substituer $\dfrac{x_n}{n}$ à u puisque $\lim\limits_{n\to\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$. On obtient :

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + \circ\left(\frac{x_n}{n}\right).$$

Or d'une part $x_n = 1 + \circ(1)$ donc $\dfrac{x_n}{n} = \dfrac{1}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et d'autre part, $\circ\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car x_n tend vers 1 (vérifier). On a donc :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

On va réinjecter ce premier résultat dans le DL2 de la fonction exp en 0 : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2!} + \circ(u^2)$.

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + \frac{x_n^2}{2n^2} + \circ\left(\frac{x_n^2}{n^2}\right).$$

On a encore $\circ\left(\dfrac{x_n^2}{n^2}\right) = \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et aussi : $x_n^2 = 1 + \circ(1)$. On a donc :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{2n^2}[1 + \circ(1)] + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4}$$

– On injecte à nouveau ce résultat dans le DL de la fonction exp. en 0 : $\exp(u) \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^3}{3!} + \circ(u^3)$.

$$x_n = 1 + \frac{x_n}{n} + \frac{x_n^2}{2n^2} + \frac{x_n^3}{6n^3} + \circ\left(\frac{x_n^3}{n^3}\right).$$

On remplace x_n à l'aide de (4), x_n^2 par $1 + \dfrac{2}{n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'après (3) et enfin x_n^3 par $1 + \circ(1)$, on obtient :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \frac{1}{2n^2}\left[1 + \frac{2}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{6n^3}[1 + \circ(1)] + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

et finalement :

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + \frac{8}{3n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Références

[1] Arnaud BODIN. *Dérivabilité.*
http ://math.univ-lille1.fr/∼bodin/exo4/selcor/selcor13.pdf

[2] Antoine CRISTOFARI. *Fonctions de la variable réelle, étude locale.*
http ://cristofari.pagesperso-orange.fr/PDF/Feuilles/Feuille1.pdf

[3] Dominique HOAREAU. *Fonction continue contre Fonction dérivée.*
http ://megamaths.perso.neuf.fr/domi/Foncderi.pdf

[4] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[5] CAPES de Mathématiques 2002. *1ère composition.*

[6] Exercices collection EXO7. *Fonctions dérivables.*
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf