Master 1 Métiers de l'Enseignement, Mathématiques - ULCO, La Mi-Voix, 2012/2013

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 5 - Suites et séries de fonctions.

Soient E et F deux espaces métriques quelconques et (f_n) une suite d'applications de E dans F. Si pour chaque $x \in E$ la suite $f_n(x)$ est convergente, sa limite $f(x)$ est une fonction de x et divers problèmes peuvent se poser, entre autres :

- Si les fonctions f_n sont continues, leur limite f est-elle continue ?
- Si les fonctions f_n sont dérivables (ce qui suppose que E soit un ouvert de $\mathbb{R}$ et F un e.v.n.), leur limite f est-elle dérivable ?
- Plus généralement, si E et F sont deux e.v.n. et si les fonctions f_n sont différentiables, leur limite f est-elle différentiable ?

1 Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par X un ensemble quelconque, par (E, d) un espace métrique et par (f_n) une suite d'applications de X dans E.

Définition 1.1 *Convergence simple*
On dit que la suite (f_n) converge simplement vers l'application f (de X dans E) si, pour chaque x de X, la suite $f_n(x)$ converge dans E vers $f(x)$. En d'autres termes, la suite (f_n) converge simplement vers f si quels que soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe un entier N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne $d[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon$, soit

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow d[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Ce nombre N dépend, en général de ε et de x. En exigeant que N soit indépendant de x, on obtient un mode de convergence plus restrictif, appelé convergence uniforme.

Définition 1.2 *Convergence uniforme*
On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N, ne dépendant que de ε, tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$, on ait $d[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow d[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Si la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) vers l'application f sur X, on dit pour abrégrer que f est la limite simple (resp. la limite uniforme) de la suite (f_n).

Remarque 1.1 La convergence uniforme de (f_n) fers f entraîne la convergence simple de (f_n) vers f. La réciproque n'est pas vraie.

Remarque 1.2 Désignons par Γ le graphe de l'application f. L'ensemble Γ_ε des points (x, y) de $E \times F$ qui vérifient l'inégalité $d[f(x), y] < \varepsilon$ est une sorte de « tube » entourant Γ. Dire que f_n vérifie $d[f_n(x), f(x)] < \varepsilon$ pour tout $x \in X$ revient à dire que le graphe de f_n est contenu dans ce tube.

2 Critères de convergence uniforme

Proposition 2.1 *Soient (f_n) une suite d'applications de l'ensemble X dans l'espace métrique (E, d) et f une application de X dans E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit*

$$m_n = \sup_{x \in X} d[f_n(x), f(x)].$$

Pour que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X, il faut et il suffit que la suite (m_n) tende vers zéro.

Pour prouver que la suite (m_n) tend vers zéro, il suffit de la majorer par une suite convergeant vers zéro ; pour prouver qu'elle ne tend pas vers zéro, il suffit de la minorer par une suite de nombres positifs ne convergeant pas vers zéro. Pour appliquer ces principes, on se bornera au cas où les fonctions f_n et leur limite f prennent leurs valeurs dans un e.v.n. E : en remplaçant f_n par $f_n - f$, on se ramène au cas où $f = 0$. On énonce :

Proposition 2.2 *Soit* (f_n) *une suite de fonctions définies sur un ensemble* X *à valeurs dans un e.v.n.* E*.*

1. *Pour que la suite* (f_n) *converge uniformément vers zéro sur* X*, il suffit qu'il existe une suite* (ε_n) *de nombres réels, convergeant vers zéro, telle que pour tout* $x \in X$*, on ait*
$$\|f_n(x)\| \leq \varepsilon_n.$$
2. *Pour que la suite* (f_n) *ne converge pas uniformément vers zéro sur* X*, il suffit qu'il existe une suite* (x_n) *de points de* X *telle que la suite* $(f_n(x_n))$ *ne tende pas vers zéro.*

Proposition 2.3 *Le critère de Cauchy pour la convergence uniforme*
Soit (f_n) *une suite d'applications d'un ensemble* X *dans un espace métrique* (E, d)*. Pour que la suite* (f_n) *soit uniformément convergente, il faut qu'à chaque nombre* $\varepsilon > 0$ *on puisse associer un entier* N *tel que les inégalités* $n \geq N$ *et* $p \geq N$ *entraînent*
$$\forall x \in X,\ d[f_n(x), f_p(x)] \leq \varepsilon \tag{3}$$
et cette condition est suffisante si l'espace E *est complet donc, en particulier, si* $E = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*

Définition 2.1 *Soit* (f_n) *une suite d'applications de l'ensemble* X *dans l'espace métrique* (E, d)*. On dira que cette suite est uniformément de Cauchy, ou qu'elle vérifie uniformément la condition de Cauchy si, quel que soit* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N *tel que les inégalités* $n \geq N$ *et* $p \geq N$ *entraînent (3).*

Exercice 1 Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction f sur un intervalle I alors la suite de fonctions $(\sin(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sin(f)$ sur I.
Correction :
La propriété résulte de :
$$|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Exercice 2 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ et si oui, vers quelle fonction ?
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-t-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-t-elle uniforme sur $[-1, 1]$?

Correction :

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et la suite réelle $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante égale à 0.
Pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} x$ et la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers x. En définitive, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$$
est impaire et dérivable de dérivée $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$, cette dérivée s'annulant aux points $x_{n,k} = 2nk\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec $g_n(x_{n,k}) = 2nk\pi$. On a donc $\displaystyle\sup_{x\in[-2nk\pi, 2nk\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$.
La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Sur $[-1, 1]$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction g_n est décroissante et $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x)| = |g_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 3 Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x^k}{x^2 + n}$.

1. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur toute partie bornée $\mathbb{R}$?

Correction :

1. Pour tout réel x, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Pour $k = 0$, et x dans $\mathbb{R}$, on a $0 \leq f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n} \leq \dfrac{1}{n}$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ et sur toute partie bornée $\mathbb{R}$. Pour tout entier strictement positif k, on a $f_n'(x) = \dfrac{x^{k-1}}{(x^2 + n)^2}((k - 2)x^2 + kn)$ et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{si} \quad k = 1, \\ 1 & \text{si} \quad k = 2, \\ +\infty & \text{si} \quad k > 2. \end{cases}$$

On déduit donc que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ uniquement pour $k = 0$ et $k = 1$.

2. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{si} \quad k = 1, \\ |f_n(a)| & \text{si} \quad k \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout partie bornée $\mathbb{R}$ pour tout entier positif ou nul k.

Exercice 4 Soit $\alpha > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x \exp(-nx)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction : La fonction f_n est dérivable avec :

$$f_n'(x) = n^\alpha \exp(-nx)(1 - nx)$$

$f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et f à valeurs positives.

1. Pour $n \geq 1$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle pour tout $\alpha > 0$. Avec $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^{\alpha-1}}{e}$ pour $n \geq 1$, on déduit que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha \in]0, 1[$.
2. Pour tout $a > 0$, il existe un entier n_a tel que $\dfrac{1}{n} < a$ pour tout $n \geq n_a$ et $\sup\limits_{x\in[a;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 5 On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_n(x) = nx \sin(x) \exp(-nx).$$

1. Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = t \exp(-t)$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
4. On se propose maintenant de montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est encore uniforme sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Calculer, pour tout $n \geq 1$, la dérivée de la fonction f_n.
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{1}{n}\right], f_n'(x) > 0.$$
   (c) Montrer que, sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, f_n' s'annule en un unique point $x_n \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (d) En déduire les variations de f_n sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et sur $\mathbb{R}^+$.

Correction :

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0) = 0$.
   Pour $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq x\dfrac{n}{\exp(nx)}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\exp(nx)} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.
2. La fonction φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 1$, on a :
   $$\varphi'(t) = \exp(-t)(1 - t) \leq 0.$$
   Cette fonction est donc décroissante sur $[1, +\infty[$.
3. Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$|f_n(x)| \leq nx\exp(-nx) = \varphi(nx) \leq \varphi(n) = \frac{n}{\exp(n)}$$

puisque $nx \geq n \geq 1$ et φ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\exp(n)} = 0$, on déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n\exp(-nx)(-nx\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x)) \\ &= n\exp(-nx)((1-nx)\sin(x) + x\cos(x)). \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$, les quantités $(1-nx)$, $\sin(x)$, x, $\cos(x)$ et $n\exp(-nx)$ sont strictement positives, donc $f_n'(x) > 0$.

(c) Pour $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f_n'(x) = n\exp(-nx)\cos(x)(1-nx)\left(\tan(x) - \frac{x}{nx-1}\right)$$

avec $n\exp(-nx)\cos(x)(1-nx) < 0$. Le signe de $f_n'(x)$ sur $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$ dépend donc de celui de $g_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx-1}$. Avec $g_n'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} + \frac{1}{(nx-1)^2} > 0$, on déduit que g_n est strictement croissante et avec $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+} g_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g_n(x) = +\infty$, on déduit que, sur $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$, g_n s'annule en un unique point x_n et on a $g_n(x) < 0$ pour $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$ $g_n(x) > 0$ pour $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right[$. Tenant compte de :

$$f_n'\left(\frac{\pi}{2}\right) = n\exp(-n\frac{\pi}{2})\left(1 - n\frac{\pi}{2}\right) < 0,$$

on déduit que sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f_n s'annule uniquement en x_n avec $f_n'(x) > 0$ pour $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$ et $f_n'(x) < 0$ pour $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) De l'étude précédente, on déduit que f_n est strictement croissante sur $[0, x_n]$ et strictement décroissante sur $\left[x_n, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $f_n(0) = 0$ et $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n\frac{\pi}{2}\exp\left(-n\frac{\pi}{2}\right)$. On a donc :

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| = f_n(x_n).$$

(e) Avec $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et :

$$f_n'\left(\frac{2}{n}\right) = -n\exp(-2)\cos\left(\frac{2}{n}\right)\left(\tan\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{2}{n}\right) < 0$$

(on a $\tan(x) > x$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$), on déduit que $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ si $n > 1$ et

$$0 < f_n(x_n) \leq 2\sin\left(\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

D'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Avec $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \max\left(\sup\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n|, \sup\limits_{\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[} |f_n|\right)$, on en déduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3 Limite uniforme de fonctions continues

Théorème 3.1 *E et F étant deux espaces métriques, soit (f_n) une suite uniformément convergente d'applications de E dans F. Si les fonctions f_n sont toutes continues en un point a de E, leur limite f est continue au point a.*

Corollaire 3.1 *E et F étant deux espaces métriques, soit (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues de E dans F. Alors la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue.*

Proposition 3.1 *Extension*
E et F étant deux espaces métriques, soit (f_n) une suite d'applications continues de E dans F, convergeant vers une application f, de telle sorte que cette convergence soit uniforme sur chaque partie compacte de E. Alors f est continue sur E.

Proposition 3.2 *Double passage à la limite*
E et F étant deux espaces métriques et A une partie de E, soit (f_n) une suite d'applications de A dans F, convergeant uniformément sur A vers une application f. Soit a un point d'accumulation de A tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite $b_n = \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ existe. Si l'espace métrique F est complet, la suite (b_n) a une limite b et $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a. En d'autres termes, on a la formule d'interversion des deux signes lim *:*

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

(les hypothèses entraînant l'existence des deux membres de (3.2)).

Théorème 3.2 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors la limite f est uniformément continue sur cet intervalle.*

Pour ce qui est de l'intégration des fonctions continues, on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Théorème 3.3 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, on a alors pour tout segment $[a, b] \subset I$:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

En fait le théorème précédent est encore valable dans le cadre de l'intégrale de Riemann. On rappelle qu'une fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est bornée et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver deux fonctions en escaliers g, h telles que $g \leq f \leq h$ et $\displaystyle\int_a^b (h(x) - g(x))dx < \varepsilon$.

Théorème 3.4 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables qui converge uniformément vers f sur $I = [a, b]$, alors la fonction f est Riemann-intégrable sur I et on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Théorème 3.5 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur I qui converge uniformément vers une fonction f sur I, alors la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par $F_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f_n(t)dt$ où x_0 est donné dans I, converge simplement sur I vers la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.*

Théorème 3.6 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur I telle que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g. S'il existe un point $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction dérivable f telle $f' = g$ et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.*

Exercice 6 Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
Correction : Supposons que l'on puisse extraire une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. La fonction f est alors continue et pour tous réels $a < b$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_{\varphi(n)}(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \left[\sin(\varphi(n)b) - \sin(\varphi(n)a)\right] = 0$$

et f est nécessairement la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_{\varphi(n)}| = 1$ (ou avec $f(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_{\varphi(n)}(0) = 1$).

Exercice 7 Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites de fonctions définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ et $g_n(x) = f'_n(x)$.
Correction :

1. Pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.
Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}}.$$

et avec :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n},$$

on déduit que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on a $g_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Les fonctions g_n étant continues sur $\mathbb{R}$, la convergence n'est pas uniforme puisque la limite g n'est pas continue en 0.
On peut aussi vérifier ce résultat en évaluant $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|$.
Pour $x \neq 0$ et $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{x}{|x|} \right| = |x| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right| \\ &= |x| \left| \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right)}. \end{aligned}$$

Avec $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} \right) \geq \dfrac{1}{n^2}$, on déduit que $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$. Puis avec $|g_n(0) - g(0)| = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} |g_n(x) - g(x)| = 1$, on déduit que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

4 Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment

Le fait qu'une fonction continue sur un segment y est en fait uniformément continue nous donne la possibilité de construire des suites de fonctions élémentaires (en escaliers, affines par morceaux ou polynomiales) qui convergent uniformément vers cette fonction.

4.1 Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Théorème 4.1 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.*

Théorème 4.2 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est Riemann-intégrable.*

Exercice 8 *Lemme de Riemann-Lebesgue*
Montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Correction : Il suffit de considérer le cas où f est continue sur $[a, b]$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel que $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(mx)dx\right| &\leq \left|\int_a^b (f(x)-f_n(x))\sin(mx)dx\right| + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)dx\right| \\ &\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)dx\right| \\ &\leq (b-a)\varepsilon + \left|\int_a^b f_n(x)\sin(mx)dx\right|.\end{aligned}$$

En désignant par $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{p+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ f_n soit constante égale à y_k, on a :

$$\int_a^b f(x)\sin(mx)dx = \sum_{k=0}^{p} y_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(mx)dx = \sum_{k=0}^{p} y_k \left(\frac{\cos(mx_k)}{m} - \frac{\cos(mx_{k+1})}{m}\right)$$

et

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(mx)dx\right| \leq (b-a)\varepsilon + \frac{C}{m}$$

où $C = \dfrac{2}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}|y_k|$. On en déduit que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(mx)dx\right| \leq (b-a-1)\varepsilon$ pour m assez grand.

De manière analogue, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0$ pour f continue par morceaux.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin^2(nx)dx.$$

<u>*Correction :*</u> En écrivant que $\sin^2(nx) = \dfrac{1-\cos(2nx)}{2}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)sin^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx - \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(2nx)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

4.2 Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux et continues

Théorème 4.3 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.*

Théorème 4.4 *Toute fonction affine par morceaux et continue sur un segment $[a,b]$ admet des primitives.*

Théorème 4.5 *Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ admet des primitives.*

4.3 Approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$ par des fonctions polynomiales

L'approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$ par des fonctions polynomiales nous sera utile pour approcher uniformément toute fonction continue et affine par morceaux par des polynômes sur un segment $[a,b]$. On introduit la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $P_0(x) = 0$ et

$$\forall n \geq 1,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - (Pn(x))^2) \tag{4}$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 0$ que chaque fonction P_n est polynomiale.

Théorème 4.6 *La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (4) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.*

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ On désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $]-1,1[$, soit :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente.
2. En déduire que :
   (a) la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1,1]$,
   (b) la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1,1]$.

<u>*Correction :*</u> Les coefficients a_n sont donnés par $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = b_n$ avec :

$$b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}.$$

En particulier, les b_n sont positifs pour tout $n \geq 1$.

1. Pour tout x dans $[0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}.$$

   En faisant tendre x vers 1, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq 1$, ce qui implique la convergence de la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et celle de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Si on tente d'utiliser le théorème de d'Alembert pour montrer la convergence de $\sum_n b_n$ (tous les b_n sont strictement positifs), on a $b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}$ et

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)4(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

   et on ne peut pas conclure.
   En utilisant le développement limité :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right),$$

   le théorème de Raabe-Duhamel nous permet de conclure quant à la convergence de $\sum_n b_n$ (on a $\frac{3}{2} > 1$).

2. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
   (a) Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$|\sqrt{1-x} - P_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   ce qui implique la convergence uniforme sur $[-1,1]$ de la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$
   (b) Pour tout x dans $[-1,1]$, on peut écrire que $|x| = \sqrt{1-u(x)}$ avec $u(x) = 1-x^2$ dans $[0,1]$ et on a

$$|x| = \lim_{n\to+\infty} P_n(u(x))$$

   cette convergence étant uniforme.

5 Limites de fonctions dérivables ou différentiables

Théorème 5.1 *E désignant un e.v.n. et I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit (f_n) une suite d'applications dérivables de I dans E, convergeant simplement vers une application f. Pour que f soit dérivable sur I, il suffit que la suite des dérivées (f_n') soit uniformément convergente sur I et pour tout $t \in I$, on a alors :*

$$f'(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(t),$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dt}[f_n(t)]. \tag{5}$$

La convergence uniforme de la suite (f'_n) permet donc de permuter les opérations de dérivation et de passage à la limite, donc d'échanger les signes $\lim_{n\to+\infty}$ et $\dfrac{d}{dt}$.

Proposition 5.1 *Généralisation : cas des applications différentiables*
E et F désignant deux e.v.n. et U un ouvert de E, soit (f_n) une suite convergente d'applications différentiables de U dans F, telle que la suite (f'_n) de leurs différentielles soit uniformément convergente sur U (ces différentielles étant considérées comme des applications de U dans $\mathcal{L}(E,F)$). Alors l'application $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est différentiable sur U et, pour chaque $x \in U$, on a

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x).$$

6 Théorème de Weierstrass

Théorème 6.1 *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Exercice 11 EXERCICE SYNTHÉTIQUE

Étant donné deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour $n \geq 0$, par :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Si $a = 1$ et $b = x$ avec $x \geq 0$ alors a_n et b_n sont des fonctions de x qu'on notera respectivement u_n et v_n.

1. (a) Démontrer que pour $n \geq 1$ et $a \neq b$, on a :

$$\begin{cases} 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases}.$$

Que deviennent ces inégalités si $a = b$?

   (b) Démontrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite.
   On notera $M(a,b)$ cette limite commune et f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = M(1,x)$.

   (c) Démontrer que, quels que soient les réels $a \geq 0, b \geq 0, \lambda \geq 0$ et quel que soit l'entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} M(a_n,b_n) = M(a,b) \\ M(a,b) = M(b,a) \\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b) \end{cases}.$$

En déduire que, pour $a > 0$, on a $M(a,b) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

   (d) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont continues.

   (e) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$, on a :

$$0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}|1-x|.$$

   (f) En déduire que la fonction f est continue.

   (g) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1+x}{2}$. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 1$.

   (h) Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?

   (i) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   (j) Démontrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction quand x tend vers $+\infty$.

   (k) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes. En déduire que la fonction f est croissante.

2. On restreint désormais les fonctions u_n et v_n à l'intervalle $]0,1[$. On notera w_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $w_n = \sqrt{u_n^2 - v_n^2}$ et k_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $k_n = 2^{-n}\ln\left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)$.

(a) En remarquant que $M(a,b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ et que $w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$, démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$2M(u_{n+1}, w_{n+1}) = M(u_n, w_n).$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$2^n M(u_n(x), w_n(x)) = f(\sqrt{1-x^2}).$$

(b) Démontrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}.$$

(c) Démontrer que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n(x)}{u_n(x)} = 0$.

En remplaçant f par un équivalent dans le résultat de la question précédente, en déduire que, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$.

(d) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n, v_n, w_n et k_n sont continument dérivables sur $]0,1[$ et que, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n' > 0$ et $v_n' > 0$.

(e) Démontrer que la fonction $\frac{k_n'}{v_n^2}$ est indépendante de n (on pourra utiliser la relation $w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$).

(f) Déduire du résultat précédent que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in]0,1[$, on a :

$$k_n'(x) = \frac{v_n^2(x)}{x(1-x^2)}.$$

(g) Démontrer que la suite de fonctions (k_n') converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$, vers la fonction :

$$x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}.$$

(h) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$.

(i) Calculer directement cette dérivée et en déduire, en faisant $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que $\pi = 2\sqrt{2}\frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

3. Pour tout $n \geq 1$, on notera y_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $y_n = \frac{u_n}{v_n}$ et z_n la fonction définie sur $]0,1[$ par $z_n = \frac{v_n'}{u_n'}$. On note K un compact de $]0,1[$.

(a) Démontrer que $y_n \geq 1$ et que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers 1 sur K.

(b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{cases} y_{n+1} &= \dfrac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \\ z_{n+1} &= \dfrac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}} \end{cases}.$$

(c) Démontrer que $z_n \geq 1$. En déduire que $u_n' \leq v_n'$ et que la suite de fonctions (u_n') est décroissante.

(d) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq \sqrt{y_n} \leq y_n$. En déduire que la suite de fonctions (z_n) converge uniformément vers 1 sur K.

(e) Démontrer que $v_{n+1}'(x) \leq v_n'(x)$ si $(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x)-1}{z_n(x)}$ et que cette dernière inégalité est satisfaite à partir d'un rang n_0 indépendant de x dans K. En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n' \leq u_{n+1}' \leq v_{n+1}' \leq v_n'$ sur K et que les suites (u_n') et (v_n') convergent uniformément sur K.

Correction :

1. (a) Remarquons que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2$, $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$ et $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leq |\sqrt{x}-\sqrt{y}|.|\sqrt{x}+\sqrt{y}| = |x-y|$. Il en résulte que $0 \leq \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{|x-y|}{2}$ et que les inégalités sont en fait strictes si x et y sont différents. On a également $\min(x,y) = (\min(\sqrt{x},\sqrt{y}))^2 \leq \min(\sqrt{x},\sqrt{y})\max(\sqrt{x},\sqrt{y}) = \sqrt{xy}$ avec égalité si et seulement si $x = y$ ou bien $xy = 0$. De même, $\frac{x+y}{2} = \frac{\min(x,y)+\max(x,y)}{2} \leq \max(x,y)$ avec égalité si et seulement si $x = y$. En conclusion,

$$0 \leq \min(x,y) \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \max(x,y)$$

avec égalité partout si $x = y$, égalité seulement dans les deux premières inégalités si $xy = 0$ et nulle part dans les autres cas.

Il en résulte que si a_n et b_n sont définis et si $0 \leq b_n < a_n$ alors

$$\begin{cases} 0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases}$$

avec inégalités strictes si $b_n \neq 0$.

Soit donc (H_n) la propriété : a_n et b_n existent et $0 \leq b_n < a_n$. (H_1) est vraie puisque $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = \sqrt{ab}$ sont bien définis et $0 \leq \min(a,b) \leq b_1 < a_1 < \max(a,b)$. Si (H_n) est vraie alors $0 \leq b_n \leq b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ et donc (H_{n+1}) est vraie. Il en résulte que (H_n) est vraie pour tout entier n supérieur à 1 et donc que les inégalités de l'énoncé sont vraies pour tout tel n.

Si maintenant $a = b$ alors, pour tout entier n, on a $a_n = b_n = a = b$. Les inégalités deviennent donc $0 \leq b_n = b_{n+1} = a_{n+1} = a_n$ et $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = 0$.

(b) On déduit des résultats précédents que (b_n) croît et que (a_n) décroît. On a aussi pour tout $n \geq 1$, $0 \leq a_n - b_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1)$, ce qui prouve par encadrement que la suite $(a_n - b_n)$ tend vers 0. Les deux suites sont donc adjacentes, elles convergent et ont même limite $M(a,b)$. Remarquons que $M(a,b) \in [b_n, a_n]$ pour $n \geq 1$.

(c) La limite commune des suites $(a_k)_{k \geq n}$ et $(b_k)_{k \geq n}$ est $M(a_n, b_n)$ mais aussi $M(a,b)$. Par unicité de la limite on a donc $M(a_n, b_n) = M(a,b)$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$. Soient (a'_n) et (b'_n) les suites définies par $a'_0 = b$, $b'_0 = a$. On a $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. L'égalité précédente donne donc $M(b,a) = M(a_1, b_1) = M(a,b)$.

Enfin, si (a''_n) et (b''_n) sont les suites définies par $a''_0 = \lambda a$, $b''_0 = \lambda b$, une récurrence immédiate montre que $a''_n = \lambda a_n$ et $b''_n = \lambda b_n$ pour tout n. On en déduit$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

En prenant $\lambda = \dfrac{1}{a}$, on obtient $M(a,b) = aM\left(1, \dfrac{b}{a}\right) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_0(x) = 1, v_0(x) = x, u_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(u_n(x) + v_n(x)), v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}.$$

Par récurrence, on déduit facilement que les fonctions u_n et v_n sont continues.

(e) On déduit de (a) que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq v_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) \text{ et } 0 \leq u_n(x) - f(x) \leq u_n(x) - v_n(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}(u_1(x) - v_1(x)).$$

Or $u_1(x) - v_1(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 = \dfrac{1}{2}(1-x)\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2}|1-x|$, d'où $0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}|1-x|$.

(f) • Soit $A > 0$. Pour tout $x \in [0, A]$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^{-n}(1 + A).$$

Comme $(2^{-n}(1+A))$ tend vers 0 indépendamment de x, la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Les u_n étant continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$; pour $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{array}{rcl} |f(x+h) - f(x)| & \leq & |u_n(x+h) - u_n(x)| + |u_n(x+h) - f(x+h)| + |u_n(x) - f(x)| \\ & \leq & |u_n(x+h) - u_n(x)| + 2^{-n}(|1-x-h| + |1-x|) \\ & \leq & |u_n(x+h) - u_n(x)| + 2^{-n}(2|1-x| + |h|) \end{array}$$

Soit donc n tel que $2^{-n}(2|1-x|+1) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ et (par continuité de u_n en x) tel que $\forall h \in]-\alpha; \alpha[\cap [-x; +\infty[$, $|u_n(x+h) - u_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$(\forall y \in \mathbb{R}_+)\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

et donc f est continue en x. Il en résulte que f est continue sur tout $\mathbb{R}_+$.

(g) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $v_1(x) = \sqrt{x} \leq f(x) \leq u_1(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)$. Comme $f(1) = 1$, on peut donc écrire

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - 1 \leq f(x) - f(1) \leq \frac{1}{2}(x-1).$$

Ceci prouve que $f'(1)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.

(h) On a $v_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, d'où $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(0) = 0$. D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Cependant, comme elle est continue, son graphe présente une demi-tangente verticale au point d'abscisse nulle.

(i) D'après (b), $M(a,b) = M(b,a) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Avec $a = x > 0$ et $b = 1$, on obtient $f(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(j) L'inégalité $f(x) \geq \sqrt{x}$ prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\dfrac{f(x)}{x} = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Comme f est continue en 0, il en résulte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(0) = 0$. Le graphe de f présente donc une branche parabolique dans la direction de $0x$.

(k) Soit (H_n) la propriété : u_n et v_n sont croissantes. (H_0) est vraie car $u_0 = 1$ et $v_0 = Id$. Si (H_n) est vraie, $x \mapsto \sqrt{x}$, la somme et le produit de fonctions croissantes l'étant également, u_{n+1} et v_{n+1} sont croissantes. Il en résulte que, pour tout entier n, u_n et v_n sont croissantes. En particulier

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \forall n \in \mathbb{N},\ x \leq y \Rightarrow u_n(x) \leq u_n(y)$$

et donc, en passant à la limite sur n,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

c'est-à-dire que f est croissante.

2. D'après 1.(a), on sait que pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n(x) < u_n(x) < 1$. Par suite, w_n est définie et à valeurs dans $]0,1[$ et k_n est définie.

(a) On a d'abord $M(a,b) = M(a_1,b_1) = M\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ et

$$w_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n} = \frac{1}{2}\sqrt{(u_n-v_n)^2} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Notons encore que si $a = u_n + v_n$ et $b = u_n - v_n$, on a $\dfrac{1}{2}(a+b) = u_n$ et $\sqrt{ab} = w_n$. Par suite,

$$2M(u_{n+1}, w_{n+1}) = M(2u_{n+1}, 2w_{n+1}) = M(u_n+v_n, u_n-v_n) = M\left(u_n, \sqrt{u_n^2 - v_n^2}\right) = M(u_n, w_n).$$

Par une récurrence facile, on peut montrer que $2^nM(u_n(x), w_n(x)) = M(u_0(x), w_0(x))$. On déduit le dernier résultat de $M(u_0(x), w_0(x)) = M(1, \sqrt{1-x^2}) = f(\sqrt{1-x^2})$.

(b) L'égalité précédente s'écrit encore $f(\sqrt{1-x^2}) = 2^nu_n(x)f\left(\dfrac{w_n(x)}{u_n(x)}\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = f(x) > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^nf\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}.$$

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = f(x) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n(x)}{u_n(x)} = 0$.

On supposera acquise l'équivalence :

$$2^nf\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2}\frac{2^n}{\ln\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right)} = \frac{\pi}{2k_n(x)}.$$

et en comparant avec la question précédente, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$.

(d) Une récurrence facile montre que u_n et v_n sont $\mathcal{C}^1$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Il en est donc de même de w_n et k_n. Puisque $u_1'(x) = \dfrac{1}{2}$, $v_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $u_{n+1}' = \dfrac{1}{2}(u_n' + v_n')$, $v_{n+1}' = \dfrac{1}{2\sqrt{u_nv_n}}(u_n'v_n + u_nv_n')$, une récurrence facile montre que $u_n' > 0$ et $v_n' > 0$ pour tout $n \geq 1$.

(e) On a d'une part

$$2^n\frac{k_n'}{v_n^2} = \frac{1}{v_n^2}\left(\frac{u_n'}{u_n} - \frac{w_n'}{w_n}\right) = \frac{1}{v_n^2}\left(\frac{u_n'}{u_n} - \left(\frac{u_nu_n' - v_nv_n'}{w_n^2}\right)\right) = \frac{u_nv_n' - u_n'v_n}{u_nv_nw_n^2}$$

et d'autre part

$$2^n\frac{k_{n+1}'}{v_{n+1}^2} = \frac{1}{2u_nv_n}\left(\frac{u_n'+v_n'}{u_n+v_n} - \frac{u_n'-v_n'}{u_n-v_n}\right) = \frac{u_nv_n' - u_n'v_n}{u_nv_nw_n^2}.$$

On constate bien ainsi que $\dfrac{k_n'(x)}{v_n^2(x)}$ est indépendant de n.

(f) Il en résulte $\dfrac{k_n'}{v_n^2} = \dfrac{k_0'(x)}{v_0^2(x)} = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$.

(g) On sait que $0 \leq f(x) - v_n(x) \leq 2^{-n}(1-x) \leq 2^{-n}$ pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme on a aussi $0 < f(x) + v_n(x) \leq 2$ ($v_n \leq f \leq u_0 = 1$), on en déduit

$$\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq f^2(x) - v_n^2(x) \leq 2^{-n+1}.$$

D'autre part la fonction $x \mapsto x(1-x^2)$ est continue sur tout compact K de $]0,1[$ donc atteint sur K sa borne inférieure α qui, de ce fait, est strictement positive. Finalement,

$$\forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \frac{f^2(x) - v_n^2(x)}{x(1-x^2)} \leq \frac{2^{-n+1}}{\alpha}.$$

La convergence uniforme demandée en résulte aussitôt.

(h) Appliquons le théorème de dérivation des suites de fonctions à (k_n).

- (k_n) converge simplement vers la fonction $k : x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, k_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
- (k_n') converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers $x \mapsto \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)} = k(x)$.

Il en résulte que k est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ (ce que l'on savait déjà) et que $k'(x) = \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$.

(i) $k'(x) = \left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}\right)' = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f'(x)f(\sqrt{1-x^2}) + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)f'(\sqrt{1-x^2})}{f^2(\sqrt{1-x^2})}$. On a donc, pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $k'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi\dfrac{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ mais aussi, d'après la question précédente, $k'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}f^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ d'où $\pi = 2\sqrt{2}\dfrac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

3. (a) On a déjà vu que pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 < x < v_n(x) < u_n(x) < 1$ et $0 \leq u_n(x) - v_n(x) \leq 2^{-n}$. D'où :

$$y_n \geq 1 \text{ et } 0 \leq y_n(x) - 1 \leq \frac{2^{-n}}{x}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant bornée sur le compact K de $]0,1[$, la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers $x \mapsto 1$ sur K.

(b)

$$\begin{cases} y_{n+1} &= \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{u_n v_n}} = \dfrac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \\ z_{n+1} &= \dfrac{u_n' v_n + u_n v_n'}{\sqrt{u_n v_n}(u_n' + v_n')} = \dfrac{1 + y_n z_n}{\sqrt{y_n}(1+z_n)} \end{cases}$$

(c) $z_1(x) = \dfrac{v_1'(x)}{u_1'(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 1$. Supposons $z_n \geq 1$, on a :

$$z_{n+1} - 1 = \frac{(\sqrt{y_n} - 1)(z_n\sqrt{y_n} - 1)}{\sqrt{y_n}(1+z_n)} \geq 0 \text{ car } y_n \geq 1.$$

On a ainsi démontré par récurrence $z_n \geq 1$ pour $n \geq 1$.

On a donc $\dfrac{v_n'}{u_n'} \geq 1$ et, comme on sait que $u_n' > 0$ (question 2.(d)), on en déduit $v_n' \geq u_n'$. Or $u_{n+1}' = \dfrac{1}{2}(u_n' + v_n')$, on a donc $u_{n+1}' \geq u_n'$: la suite (u_n') est croissante.

(d) On a

- $z_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{1 - y_n - z_n + y_n z_n}{2\sqrt{y_n}(1+z_n)} = \dfrac{(1-y_n)(1-z_n)}{2\sqrt{y_n}(1+z_n)} \geq 0.$
- $\sqrt{y_n} - z_{n+1} = \dfrac{y_n - 1}{\sqrt{y_n}(1+z_n)} \geq 0.$
- $y_n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y_n} \leq y_n$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq z_{n+1} - 1 \leq y_n - 1$.

De 3.(a) on déduit que (z_n) converge uniformément sur K vers la fonction $x \mapsto 1$.

(e) $v'_{n+1} - v'_n = \dfrac{u'_n v_n + u_n v'_n}{2\sqrt{u_n v_n}} - v'_n = \dfrac{d_n}{2\sqrt{u_n v_n}}$ où $d_n = u'_n v_n + u_n v'_n - 2v'_n\sqrt{u_n v_n}$. Or, $u'_n v_n > 0$ donc $\dfrac{d_n}{u'_n v_n} = 1 + y_n z_n - 2z_n\sqrt{y_n} z_n(\sqrt{y_{n_1}})^2 - z_n + 1$ de sorte que $v'_{n+1} - v'_n \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y_n} - 1)^2 \leq \dfrac{z_n - 1}{z_n}$.
D'autre part, de la convergence uniforme sur K de (z_n) vers 1, on déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in K,\ 0 \leq z_n(x) - 1 \leq \frac{1}{2}.$$

Comme on a vu à la question précédente que $\sqrt{y_n} - 1 \leq y_n - 1 \leq z_n - 1$, on en déduit pour $n \geq n_0$ et $x \in K$,

$$(\sqrt{y_n} - 1)^2 \leq \frac{z_n(x) - 1}{2} \leq \frac{z_n(x) - 1}{z_n(x)}.$$

Par suite, pour $n \geq n_0$ et $x \in K$,

$$u'_n(x) \leq u'_{n+1}(x) \leq v'_{n+1}(x) \leq v'_n(x).$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (z_n) converge uniformément vers 1 sur K, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, on ait $0 \leq \sup\limits_{x \in K}(z_n(x) - 1) \leq \dfrac{\varepsilon}{M_0}$ en notant M_0 un majorant de la fonction continue v'_{n_0} sur K. On a alors, pour $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$ et $x \in K$,

$$0 \leq v'_n(x) - u'_n(x) = (z_n(x) - 1)u'_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{M_0} v'_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{M_0} v'_{n_0}(x) \leq \varepsilon.$$

Cela prouve, que pour chaque x de K, les suites $(u'_n(x))$ et $(v'_n(x))$ sont adjacentes. Notons $l(x)$ leur limite commune. Pour tout $n \geq n_2$ et tout x de K, on a

$$0 \leq l(x) - u'_n(x) \leq v'_n(x) - u'_n(x) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur K de la suite (u'_n). On procède de même avec (v'_n).

7 Séries de fonctions

Définition 7.1 *Soit X un ensemble quelconque et (u_n) une suite d'applications de X dans un e.v.n. E et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit S_n l'application de X dans E définie par $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$. Si la suite (S_n) est uniformément convergente sur X, on dit que la série $\sum\limits_n u_n$ est uniformément convergente sur X.*

Théorème 7.1 *Soit (u_n) une suite d'applications d'un espace métrique X dans un e.v.n. E. Si la série $\sum\limits_n u_n$ est uniformément convergente sur X et si chacune des fonctions u_n est continue au point a de X (resp. continue sur X) alors la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue au point a (resp. continue sur X).*

Proposition 7.1 *Soient X un espace métrique, A une partie de X et (u_n) une suite uniformément convergente d'applications de A dans un e.v.n. complet E. Soit a un point d'accumulation de A tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite $v_n = \lim\limits_{x \to a} u_n(x)$ existe. Alors la série $\sum\limits_n v_n$ est convergente, sa somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ est la limite, lorsque x tend vers a, de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. En d'autres termes,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} u_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \tag{6}$$

Proposition 7.2 *Dérivation terme à terme d'une série*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'applications dérivables de I dans un e.v.n. E telle que la série $\sum\limits_n u_n$ soit simplement convergente. Si la série $\sum\limits_n u'_n$ formée avec leurs dérivées est uniformément convergente sur I, alors la fonction $S : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est dérivable sur I et on a $S'(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u'_n(t)$ soit :

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}[u_n(t)].$$

La convergence uniforme de la série $\sum_n u'_n$ permet donc d'échanger les signes $\sum$ et $\frac{d}{dt}$, c'est-à-dire de permuter les opérations de sommation et de dérivation : on dit que la dérivée de la fonction S s'obtient en dérivant terme à terme la série $\sum_n u_n$.

Proposition 7.3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'applications de I dans un e.v.n. complet E telle que la série $\sum_n u'_n$ formée avec leurs dérivées soit uniformément convergente sur I. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit simplement convergente sur I, il faut et il suffit que, pour un point t_0 de I, la série $\sum_n u_n(t_0)$ soit convergente et la convergence de $\sum_n u_n$ est alors uniforme sur toute partie bornée de I.*

8 Critères de convergence uniforme pour les séries

Proposition 8.1 *Critère de Cauchy pour les séries*
Soit (u_n) une suite d'applications d'un ensemble X dans un e.v.n. E. Pour que la série $\sum_n u_n$ soit uniformément convergente sur X, il faut qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ on puisse associer un entier N tel que, pour tout $x \in X$ et tous entiers n et p vérifiant $p > n \geq N$, on ait :

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_p(x)| \leq \varepsilon$$

et cette condition est suffisante si E est complet (donc en particulier si E est de dimension finie).

Remarque 8.1

- La somme de deux séries uniformément convergentes est uniformément convergente.
- Si λ est un scalaire fixe, la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ entraîne celle de $\sum_n \lambda u_n(x)$.
- Si φ est une fonction scalaire sur X, la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ n'entraîne pas nécessairement celle de $\sum_n \varphi(x)\lambda u_n(x)$.

Définition 8.1 *Convergence normale*
Soit (u_n) une suite d'applications d'un ensemble X dans un e.v.n. E. On dit que la série $\sum_n u_n$ est normalement convergente sur X s'il existe une série numérique convergente, soit $\sum_n v_n$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ on ait

$$\|u_n(x)\| \leq v_n.$$

Théorème 8.1 *Soit E un e.v.n. complet. Pour qu'une série de fonctions, à valeurs dans E, soit uniformément convergente, il suffit qu'elle soit normalement convergente.*

Exercice 12 *Exemples et contre-exemples*
Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, mais que la convergence n'y est pas uniforme.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais que la convergence n'est pas normale.

<u>*Correction :*</u>

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.
Il est en revanche beaucoup plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_n\right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $n = N$ et $x = N$, on doit avoir $\sum_{k=n}^{2n} u_k(N) \leq \varepsilon$. Mais, pour $n \leq k \leq 2n$, on a $2n^2 \leq n^2 + k^2 \leq 5n^2$, et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5n}$. Il vient donc

$$\varepsilon \geq \sum_{k=n}^{2n} u_n(n) \geq n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

Bien sûr, si $\varepsilon < 1/5$, c'est impossible.
(Cette partie de la démonstration est souvent rédigée en niant le critère de Cauchy uniforme.)

2. Nous allons prouver la convergence uniforme en utilisant le critère des séries alternées. En effet, à x fixé, la suite $(u_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)$ est donc convergente, et on a la majoration du reste :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)\right| \leq u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Reste à majorer le membre de droite de l'équation précédente par un terme qui tend vers 0 et ne dépend pas de x. Mais on a

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{\sqrt{n^2+x^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$$

On a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, si on avait convergence normale sur $\mathbb{R}_+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la première question.

Exercice 13 *Série alternée*

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Prouver que S est continue sur I.
3. Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I.
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

<u>*Correction :*</u>

1. Il est clair que la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)$, pour $x > -1$ fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout $x > -1$.
2. Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Nous avons vérifié à la question précédente que, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_n u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste $R_n(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}$. Puisque $x > -1$, on a en particulier $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Ceci tend vers 0 (indépendamment de x), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ sur I. Puisque chaque fonction u_n est continue, la fonction S est continue sur I.
3. Chaque fonction u_n est dérivable sur I avec $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De même qu'à la question précédente, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)$ son reste, on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, inégalité valable pour tout $x > -1$. On peut donc majorer uniformément le reste par une quantité qui tend vers 0 : la série dérivée

est uniformément convergente. On en déduit que la fonction u est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq u'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.

4. Puisque la série converge uniformément sur $]-1,+\infty[$, on peut utiliser le théorème de permutation des limites à la fois en -1 et en $+\infty$. Si on note $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ chaque somme partielle de S, on remarque que

$$\lim_{x\to 1^+} S_N(x) = -\infty \text{ tandis que } \lim_{x\to+\infty} S_N(x) = 0.$$

Par le théorème d'interversion des limites, on conclut que

$$\lim_{x\to 1^+} S(x) = -\infty \text{ tandis que } \lim_{x\to+\infty} S(x) = 0.$$

Exercice 14 Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n2x}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{\star+}$.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent à S en 0.

Correction :

1. On pose $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ avec $x > 0$. Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Soit $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n+n^2a}.$$

La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. On peut donc conclure que S est bien définie et continue.

2. Chaque f_n est décroissante donc S aussi.
3. Par convergence normale sur $[1,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

On remarque $xf_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{1}{n^2}$. Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $\frac{1}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $\|g_n\|_{[0,+\infty[} = \frac{1}{n^2}$. La série de fonctions $\sum_n g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite, $xS(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi^2}{6}$ et $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

4. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison somme-intégrale

$$\frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx}\right)\right]_1^{+\infty} = -\ln(x)$$

donc $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

9 Autres critères

Proposition 9.1 *Soit* (u_n) *une suite de fonctions numériques ou complexes, définies sur un même ensemble* X*, de la forme :*

$$u_n(x) = \varepsilon_n(x) v_n(x) \text{ avec } \varepsilon_n(x) > 0.$$

Pour que la série $\sum_n u_n(x)$ *soit uniformément convergente sur* X*, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *Pour chaque* $x \in X$*, la suite* $\varepsilon_n(x)$ *est décroissante.*
2. *La suite* $\varepsilon_n(x)$ *tend uniformément vers zéro lorsque* n *tend vers* $+\infty$*.*
3. *Il existe un nombre* A *tel que l'on ait* $\left| \sum_{k=0}^{n} v_k(x) \right| \leq A$ *quels que soient* $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{N}$*.*

Théorème 9.1 *Théorème d'Abel*
Soit E *un e.v.n. complet et* (a_n) *une suite d'éléments de* E *telle que la série* $\sum_n a_n$ *soit convergente. Alors la série* $\sum_n r^n a_n$ *est uniformément convergente sur l'intervalle* $0 \leq r \leq 1$*.*

Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition .*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Suites de fonctions.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rombaldi/Capes/AnalyseChap16.pdf

[3] CAPES de Mathématiques 1995. *1ère composition.*