

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 6 - Séries entières - Fonctions analytiques.

Une série entière est une série de fonctions, de la forme  $\sum_n a_n z^n$  où  $(a_n)$  désigne une suite donnée de nombres complexes et  $z$  est une variable complexe.

Dans tout ce qui suit, on désignera par  $D(z_0, r)$  le disque-plan ouvert de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ , soit  $D(z_0, r) = \{z, z \in \mathbb{C} \text{ et } |z - z_0| < r\}$  et par  $\overline{D}(z_0, r) = \{z, z \in \mathbb{C} \text{ et } |z - z_0| \leq r\}$ .

## 1 Rayon et disque de convergence

**Définition 1.1** Une série entière de la variable complexe  $z$  est une série dont le terme général est de la forme  $a_n z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) où  $(a_n)$  désigne une suite donnée de nombres complexes. Les nombres  $a_n$  sont appelés les coefficients de la série. Plus précisément, le nombre  $a_n$  est le  $(n + 1)$ -ième coefficient, ou coefficient d'ordre  $n$ . Le premier terme  $a_0$  est souvent appelé terme constant.

Les séries entières sont donc des séries d'applications de la forme :

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n.$$

Pour étudier la convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$ , on utilise le lemme suivant :

**Théorème 1.1** *Théorème d'Abel.*

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)$  soit bornée (ce qui est réalisé en particulier si la série  $\sum_n a_n z_0^n$  est convergente).

Alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum_n a_n z^n$  est absolument convergente et cette série est normalement convergente dans le disque fermé  $D(0, k|z_0|)$  défini par  $|z| \leq k|z_0|$ , quel que soit le nombre  $k$  vérifiant  $0 \leq k < 1$ .

**Définition 1.2** Le rayon  $R$  de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$  est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  de l'ensemble  $I$  des nombres réels positifs  $r$  tels que la suite  $(a_n r^n)$  soit bornée :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

**Théorème 1.2** Soit  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$  ( $0 \leq R \leq +\infty$ ).

- Si  $R = 0$ , cette série ne converge que pour  $z = 0$ .
- Si  $R = +\infty$ , cette série converge absolument pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , cette convergence étant normale, donc uniforme, sur toute partie bornée de  $\mathbb{C}$ .
- Si  $R$  est un nombre fini non nul, la série  $\sum_n a_n z^n$  est absolument convergente pour  $|z| < R$ , et divergente pour  $|z| > R$ ; de plus cette série converge normalement (donc uniformément) dans le disque fermé  $\overline{D}(0, r)$ , quel que soit  $r < R$ .

**Définition 1.3** Soit  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$ . Si  $R \neq 0$ , le disque ouvert  $D(0, R)$  est appelé le disque de convergence de cette série et l'intervalle ouvert  $] - R, R[$  est appelé l'intervalle de convergence de cette série.

Ainsi, une série entière est absolument convergente en tout point de son disque de convergence, divergente à l'extérieur de ce disque, et normalement convergente sur tout disque concentrique au disque de convergence et de rayon strictement plus petit.

**Remarque 1.1** La notion d'intervalle de convergence intervient lorsqu'on se limite aux valeurs réelles de la variable : c'est le plus grand intervalle ouvert de centre  $O$  sur lequel la série soit convergente.

**Remarque 1.2** Si  $R$  est fini, on ne sait pas à priori si la série  $\sum_n a_n z^n$  converge sur son cercle de convergence, défini par  $|z| = R$ .

**Théorème 1.3** Soient  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n b_n z^n$  de rayons de convergence respectifs  $R$  et  $R'$ .

1. Si  $|a_n| \leq |b_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors  $R \geq R'$ .
2. Si  $a_n = o(b_n)$  alors  $R \geq R'$ .
3. Si  $a_n \sim b_n$  alors  $R = R'$ .

**Corollaire 1.1** Si  $\sum_n a_n z^n$  est une série entière telle qu'il existe deux réels strictement positifs  $m$  et  $M$  avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq |a_n| \leq M$$

alors le rayon de convergence de cette série vaut 1.

**Théorème 1.4** En utilisant les notations qui précèdent :

1. dans le cas où  $R > 0$ , la série  $\sum_n a_n z^n$  est absolument convergente pour tout  $z$  tel que  $|z| < R$ ,
2. dans le cas où  $R$  est fini, les séries  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n |a_n z^n|$  sont divergentes pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ .

**Exercice 1** Déterminer les domaines de convergence des séries entières

$$\sum_n n! z^n, \quad \sum_n n^n z^n, \quad \sum_n z^n, \quad \sum_n \frac{z^n}{n}, \quad \sum_n \frac{z^n}{n!}.$$

Correction :

- Pour  $a_n = n!$  et  $z \neq 0$  on a :

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = (n+1) |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui entraîne d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques la divergence de  $\sum_n a_n z^n$ . Il en résulte que le domaine de convergence de  $\sum_n n! z^n$  est  $D = \{0\}$ .

- Pour  $a_n = n^n$  et  $z \neq 0$  on a :

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui entraîne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| = +\infty$  et la divergence de  $\sum_n a_n z^n$ . Il en résulte que le domaine de convergence de  $\sum_n n^n z^n$  est  $D = \{0\}$ .

- On sait que la série géométrique  $\sum_n z^n$  est convergente si et seulement si  $|z| < 1$ , ce qui signifie que son domaine de convergence est le disque unité ouvert  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .

- Pour  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $z \neq 0$  on a :

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|.$$

Si  $|z| < 1$  le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série  $\sum_n \frac{z^n}{n}$  converge.

Si  $|z| > 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n z^n| = +\infty$  et la série  $\sum_n \frac{z^n}{n}$  diverge.

Si  $|z| = 1$ , on a alors  $z = \exp(it)$  avec  $t \in [0, 2\pi[$  et la série  $\sum_n \frac{z^n}{n} = \sum_n \frac{\exp(int)}{n}$  converge uniquement pour  $t = 0$ , soit pour  $z = 1$ . On a utilisé le

*Lemme d'Abel : Si les sommes partielles de la série de terme général  $a_n$  (réel ou complexe) sont bornées et si  $(b_n)$  est une suite réelle positive décroissant vers 0, alors la série  $\sum_n a_n b_n$  est convergente.*

Dans notre cas, si  $t \neq 0$ , les sommes partielles de la série de terme général  $\exp(int)$  sont bornées et la suite  $\left(\frac{1}{n}\right)$  est une suite réelle décroissant vers 0.

**Remarque 1.3** Montrons que les sommes partielles de la série de terme général  $\exp(int)$  sont bornées si  $t \neq 0$  :

$$\sum_{n=0}^N \exp(int) = \frac{\exp(i(N+1)t) - 1}{\exp(it) - 1} = \frac{\exp(i(N+1)\frac{t}{2}) (\exp(i(N+1)\frac{t}{2}) - \exp(-i(N+1)\frac{t}{2}))}{\exp(i\frac{t}{2}) (\exp(i\frac{t}{2}) - \exp(-i\frac{t}{2}))}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N \exp(int) = \exp\left(iN\frac{t}{2}\right) \frac{\sin\left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \text{ Donc, } \left| \sum_{n=0}^N \exp(int) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\frac{t}{2} \right|} \text{ et les sommes partielles sont bornées. Bien-s\^ur, si } t = 0, \text{ les sommes partielles ne sont pas bornées et le lemme n'est pas utilisable.}$$

En définitive, le domaine de convergence de  $\sum_n \frac{z^n}{n}$  est le disque unité fermé privé de 1, soit  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} \setminus \{1\}$ .

- La série  $\sum_n \frac{z^n}{n!}$  étant absolument convergente pour tout nombre complexe  $z$ , son domaine de convergence est  $D = \mathbb{C}$ .

**Exercice 2** Déterminer les domaines de convergence des séries entières  $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$  et  $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ .

*Correction :*

- En posant  $u_n = \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right|$ , on a pour  $z \neq 0$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série  $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$  est absolument convergente. Son domaine de convergence est  $D = \mathbb{C}$ .

- Le résultat est le même pour la deuxième série.

**Exercice 3** Quel est le rayon de convergence de la série  $\exp(\sin(n))z^n$  ?

*Correction :* Avec  $\frac{1}{e} \leq \exp(\sin(n)) \leq e$ , on déduit du corollaire 1.1 que le rayon de convergence de  $\sum_n \exp(\sin(n))z^n$  vaut 1.

**Exercice 4** Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Montrer que, pour tout entier  $p \geq 2$ , le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^{pn}$  est  $+\infty$  si  $R = +\infty$  ou  $\sqrt[p]{R}$  si  $R$  est fini (on dit que la série  $\sum_n a_n z^{pn}$  est lacunaire).

*Correction :*

- Si  $R = +\infty$ , alors  $\sum_n a_n t^n$  converge pour tout nombre complexe  $t$  et donc pour tous les nombres complexes de la forme  $z^p$ .
- Si  $R$  est fini, pour  $|z| < \sqrt[p]{R}$ , on a  $|z|^p < R$  et  $\sum_n a_n z^{pn}$  converge absolument. Pour  $|z| > \sqrt[p]{R}$ , on a  $|z|^p > R$  et  $\sum_n a_n z^{pn}$  diverge. Il en résulte que  $\sqrt[p]{R}$  est le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^{pn}$ .

**Exercice 5** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_n (-1)^n z^{2n}$  et étudier la série pour  $|z| = R$ .

Quelle est la somme de cette série ?

*Correction :* Le rayon de convergence de la série géométrique  $\sum_n (-1)^n z^n$  valant 1, celui de  $\sum_n (-1)^n z^{2n}$  est aussi 1 et pour  $|z| < 1$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}.$$

Pour  $|z| = 1$ , la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

**Exercice 6** Montrer que si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe  $z_0$

tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée, alors la série entière  $\sum_n \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

Correction : En désignant par  $M$  un majorant de la suite  $(|a_n z_0^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a pour tout nombre complexe  $z$  :

$$\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| = |a_n z_0^n| \frac{1}{n!} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \frac{1}{n!} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

avec  $\sum_n \frac{1}{n!} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < +\infty$  ( $\sum_n \frac{t^n}{n!}$  converge pour tout  $t$ ), ce qui entraîne la convergence absolue de  $\sum_n \frac{a_n}{n!} z^n$ .

**Exercice 7** On désigne par  $(p_n)_{n \geq 1}$  la suite strictement croissante des nombres premiers. Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum_n \frac{1}{p_n} z^{p_n}$ .

Correction : Pour  $z = 1$  cette série diverge, donc  $R \leq 1$ . Les coefficients de cette série sont définis par  $a_n = \frac{1}{n}$  si  $n$  est premier et  $a_n = 0$  sinon, donc pour  $r \geq 0$ , la suite  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée si et seulement si la suite  $\left( \frac{1}{p_n} r^{p_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée, ce qui est réalisé pour tout  $r \in [0, 1]$ , donc  $R \geq 1$  (d'après le théorème d'Abel) et  $R = 1$ .

**Remarque 1.4** De nombreuses démonstrations de la divergence de la série des inverses des nombres premiers sont disponibles sur internet, on donne à la fin du poly plusieurs d'entre-elles.

**Exercice 8** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle bornée.

1. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n \frac{a_n}{n!} z^n$ . On note respectivement  $f(z)$  et  $g(z)$  les sommes de ces séries entières.

2. Montrer que pour tout réel  $x \in ]0, 1[$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt$  est convergente.

3. Montrer que  $\int_0^{+\infty} g(t) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt = x f(x)$  pour tout réel  $x \in ]0, 1[$ .

Correction : On note  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ .

1. Comme la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, la série  $\sum_n a_n z^n$  a un rayon de convergence  $R \geq 1$ . Par exemple, pour

$a_n = \frac{1}{\rho^n}$  avec  $\rho > 1$  ce rayon de convergence est  $R = \rho$ . Avec  $\left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \frac{M}{n!}$ , on déduit que le rayon de convergence de la deuxième série est infini.

2. Pour  $x \in ]0, 1[$  et  $t > 0$  on a :

$$\left| g(t) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \exp\left(-\frac{t}{x}\right) \right| \leq M \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) = M \exp\left(t - \frac{t}{x}\right)$$

et avec  $\int_0^{+\infty} \exp\left(t \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) dt < +\infty$  (on a  $1 - \frac{1}{x} < 0$ ), on déduit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt$  est absolument convergente.

3. Le changement de variable  $t = xu$  donne :

$$\int_0^{+\infty} g(t) \exp\left(-\frac{t}{x}\right) dt = x \int_0^{+\infty} g(xu) \exp(-u) du$$

et en notant :

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

on a :

$$\int_0^{+\infty} g(xu) \exp(-u) du = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k \int_0^{+\infty} u^k \exp(-u) du + \int_0^{+\infty} R_n(xu) \exp(-u) du$$

avec  $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k \exp(-u) du = k!$ . Donc,

$$\int_0^{+\infty} g(xu) \exp(-u) du = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \int_0^{+\infty} R_n(xu) \exp(-u) du$$

et il s'agit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(xu) \exp(-u) du = 0$ . Pour ce faire, on écrit que :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} R_n(xu) \exp(-u) du \right| &\leq M \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k u^k}{k!} \exp(-u) du \leq M \int_0^{+\infty} \left( \exp(xu) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k u^k}{k!} \right) \exp(-u) du \\ &\leq M \left( \int_0^{+\infty} \exp((x-1)u) du - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} u^k \exp(-u) du \right) \leq M \left( \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

## 2 Calcul pratique du rayon de convergence

On se référera dans un premier temps aux remarques faites par Pierre Marry (MCF au CNAM), relatives à la détermination d'un rayon de convergence de séries entières à la fin du poly.

**Proposition 2.1** Critère de d'Alembert.

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière telle que  $a_n \neq 0$  à partir d'un certain rang. Si la suite  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$  tend vers  $L$  ( $0 \leq L \leq +\infty$ ) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , le rayon de convergence de la série  $\sum_n a_n z^n$  est  $R = \frac{1}{L}$  avec les conventions  $\frac{1}{0} = +\infty$  et  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

**Remarque 2.1** Attention, le résultat précédent n'admet pas de réciproque. Le fait que le rayon de convergence soit  $R$  n'implique pas que la suite  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$  tend vers  $\frac{1}{R}$  (en supposant que la suite soit définie).

**Corollaire 2.1** Si  $\sum_n a_n z^n$  est une série entière telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \neq 0$ , alors son rayon de convergence vaut 1.

**Corollaire 2.2** Si  $\sum_n a_n z^n$  est une série entière telle que  $a_n$  soit une fonction rationnelle non nulle de  $n$  alors son rayon de convergence vaut 1.

**Proposition 2.2** Critère de Cauchy.

Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$  alors le rayon de convergence de cette série est  $R = \frac{1}{l}$ .

On applique le critère de Cauchy à la série  $\sum_n a_n z^n$ . Si on pose  $L = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ , ( $0 \leq L \leq +\infty$ ), on a :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup (|z| \cdot |a_n|^{1/n}) = L|z|.$$

**Proposition 2.3** Formule d'Hadamard

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$  est le nombre  $R$  défini par

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

(On pose  $R = +\infty$  si  $L = 0$ , et  $R = 0$  si  $L = +\infty$ .)

**Remarque 2.2** Le rayon de convergence d'une série entière ne dépend que des modules de ses coefficients. Les séries  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n |a_n| z^n$  ont donc même rayon de convergence.

**Exercice 9** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$  où  $a_n = (2 + (-1)^n)^n$  pour tout

$n \geq 0$ . Que dire de la suite  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

Correction : On a  $a_n = 3^n$  pour  $n$  pair et  $a_n = 1$  pour  $n$  impair. Pour  $r > \frac{1}{3}$ , on a  $|a_{2n} r^{2n}| = |3r|^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée, donc  $R \leq \frac{1}{3}$ . On a :

$$1 \geq |a_n r^n| = \begin{cases} (3r^n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ r^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc  $R \geq \frac{1}{3}$ . On a donc  $R = \frac{1}{3}$ . On a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{3^{n+1}}{1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et la suite  $\left( \left| \frac{n+1}{n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.

**Exercice 10** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_n \frac{n!}{n^n} z^n$ .

Correction : En posant  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

**Exercice 11** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on désigne par  $a_n$  le nombre de diviseurs de  $n$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_n a_n z^n$ .

Correction : Pour  $n \geq 1$ , on a  $1 \leq a_n \leq n$ , les séries entières  $\sum_n z^n$  et  $\sum_n n z^n$  ayant un rayon de convergence égal à 1. Il en résulte que  $R = 1$ .

**Exercice 12** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_n \arctan(n^\alpha) z^n$  où  $\alpha$  est un réel et étudier la série pour  $|z| = R$ .

Correction : On note  $a_n = \arctan(n^\alpha)$  pour tout  $n \geq 1$ .

- Pour  $\alpha > 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \neq 0$  donc  $R = 1$ . Pour  $|z| = 1$  la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
- Pour  $\alpha = 0$ , on a  $a_n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  et  $R = 1$ . Pour  $|z| = 1$  la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
- Pour  $\alpha = -\beta < 0$ , on a  $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$  et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha = 1$$

donc  $R = 1$ . Pour  $z = 1$ ,  $a_n z^n = a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$  avec  $a_n > 0$  pour tout  $n \geq 1$ , il en résulte que  $\sum_n a_n z^n$  converge si et seulement si  $\beta > 1$  (soit  $\alpha < -1$ ). Pour  $|z| = 1$  et  $z \neq 1$ , on a  $z = \exp(it)$  avec  $t \in ]0; 2\pi[$ , donc  $a_n z^n = \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \exp(int)$  avec  $\left(\arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)_{n \geq 1}$  qui tend vers 0 en décroissant et le lemme d'Abel nous dit alors que la série  $\sum_n \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \exp(int)$  est convergente.

**Exercice 13** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_n \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$ .

Correction : En posant  $a_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\ln^2(n)}{n}\right) = 1$$

et  $R = 1$ .

**Exercice 14** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$ , où  $\alpha$  est un réel donné.

Correction : En posant pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ , on a :  $u_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha-1}}$ . Un développement limité nous donne :

$$\ln(u_n) = n^{\alpha-1} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{\alpha-1} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{n^{3-\alpha}} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

- Pour  $\alpha < 3$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  et  $R = 1$ .
- Pour  $\alpha = 3$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\frac{1}{2}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{e}}$  et  $R = \sqrt{e}$ .
- Pour  $\alpha > 3$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  et  $R = +\infty$ .

### 3 Fonctions définies par une série entière

#### 3.1 Continuité

**Proposition 3.1** Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière dont le rayon de convergence  $R$  est non nul. Alors sa somme

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est une fonction continue de  $z$  sur son disque de convergence (défini par l'inégalité stricte  $|z| < R$ ).

#### 3.2 Dérivabilité

**Proposition 3.2** Si  $(a_n)$  est une suite de nombres complexes, les séries entières  $\sum_n a_n z^n$  et  $\sum_n n a_n z^{n-1}$  ont même rayon de convergence.

**Théorème 3.1** Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière dont le rayon de convergence  $R$  est non nul. Alors sa somme

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est une fonction holomorphe de  $z$  sur son disque de convergence et, dans ce disque, on a :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}. \quad (1)$$

En particulier, sur l'intervalle de convergence  $] -R, +R[$ , l'application  $x \mapsto f(x)$  est dérivable au sens usuel, et sa dérivée est donnée par (1).

#### 3.3 Dérivées d'ordre supérieur

Par récurrence, le théorème précédent entraîne

**Proposition 3.3** La somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable sur son disque de convergence et, si on pose  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , on a pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$  et tout point  $z$  du disque de convergence :

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n z^{n-p}. \quad (2)$$

#### 3.4 Fonctions développables en série entière

**Définition 3.1** Soient  $U$  un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction complexe définie sur  $U$ . On dit que cette fonction est développable en série entière dans  $U$  s'il existe une suite  $(a_n)$  de nombres complexes telle que, pour tout  $z \in U$ , on ait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

**Théorème 3.2** Soit  $f$  une fonction complexe, développable en série entière dans un voisinage de l'origine. Alors les coefficients de cette série sont les nombres  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$  et sont donc entièrement déterminés par la donnée de  $f$ . Le développement en série entière de  $f$  est donc unique et s'identifie avec la série de Taylor de  $f$  soit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n.$$

**Remarque 3.1** Les nombres  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$  sont entièrement déterminés par la donnée de  $f$  sur un intervalle de centre 0, si petit soit-il : donc, si deux fonctions  $f, g$  développables en séries entières dans le disque  $D(0, R)$ , coïncident sur un intervalle  $] -r, r[$  de l'axe réel, elles coïncident dans tout le disque  $D(0, R)$ .

**Théorème 3.3** Une fonction  $f$  développable en série entière sur un disque ouvert  $D(0, r)$  du plan complexe est continue sur ce disque.

### 3.5 Développement limité au voisinage de l'origine

**Proposition 3.4** Soit  $f$  une fonction complexe admettant, sur un voisinage  $U$  de l'origine, le développement en série entière  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a avec les notations de Landau :

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k + \mathcal{O}(z^{n+1}).$$

**Exercice 15** En utilisant la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ , calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

*Correction* : Le rayon de convergence de cette série entière est 1 (en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour  $x = 1$  (théorème des séries alternées). Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$  et la fonction  $f$  ainsi définie est dérivable sur  $] - 1, 1[$  avec :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

et donc  $f(x) = \ln(1+x)$ . En utilisant le théorème d'Abel, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2).$$

*Remarque* : Le théorème d'Abel donne une propriété de continuité partielle de la fonction somme lorsqu'il y a convergence de la série entière en un point de son cercle de convergence. Précisément, soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  strictement positif fini. On suppose qu'en un point  $z_0$  de module  $R$ , la série est convergente. On considère un triangle  $T$  ayant pour sommets  $z_0$  d'une part et deux points de module strictement inférieur à  $R$  d'autre part. Alors la série converge uniformément sur  $T$ . Notamment, il y a convergence uniforme sur le segment  $[0, z_0]$ . Ce cas particulier est appelé théorème d'Abel radial.

**Exercice 16** En utilisant la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ , calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

*Correction* : Le rayon de convergence de cette série entière est 1 (en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour  $x = 1$  (théorème des séries alternées). Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$  et la fonction  $f$  ainsi définie est dérivable sur  $] - 1, 1[$  avec :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

et donc  $f(x) = \arctan(x)$ . En utilisant le théorème d'Abel, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

**Exercice 17**

1. Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction  $\arctan$ .
2. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1}$ .
3. Calculer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction  $\arctan$  et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ .



Correction :

1. À partir du développement  $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$  on déduit par intégration le développement :  $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ , chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1 :

2. La valeur  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  donne :

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 3^n (2n+1)}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{6} \sqrt{3}.$$

3. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \int \arctan(x)(x)' dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \\ &= x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c \end{aligned}$$

la primitive nulle en 0 étant obtenue pour  $c = 0$ . Il en résulte que :

$$x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

le rayon de convergence valant 1.

4. Comme la série  $\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$  est convergente, en utilisant le théorème d'Abel, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})) = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2}).$$

**Exercice 18** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Correction : Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut 1.

Notons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$  sa somme pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Cette fonction est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

ce qui donne  $f'(x) = -\ln(1-x)$  et en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \ln(1-x)(-1) dx = \int \ln(1-tx)(1-x)' dx \\ &= (1-x) \ln(1-x) - \int \frac{-1}{1-x} (1-x) dx \\ &= (1-x) \ln(1-x) + x + c \end{aligned}$$

avec  $c = f(0) = 0$ .

**Exercice 19** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :

$$\sum_n \frac{n^2 - 1}{n + 2} x^n.$$

Correction : Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut 1.

Notons  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 2} x^{n+2}$ ,  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  avec :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n-1)x^{n+1} = x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= x^3 \left( \frac{1}{1-x} \right)'' + x^2 \left( \frac{1}{1-x} \right)' - x \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{2x^3 + x^2(1-x) - x(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{3x^2 - x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

En écrivant que :

$$3x^2 - x = 3(1-x)^2 + 5x - 3 = 3(1-x)^2 - 5(1-x) + 2$$

on a :

$$g'(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{5}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

et :

$$g(x) = -3 \ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + c$$

avec  $g(0) = 0 = -4 + c$ . On a donc :

$$x^2 f(x) = -3 \ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + 4 = \frac{x(4x-3)}{(1-x)^2} - 3 \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

et

$$f(x) = \frac{4x-3}{x(1-x)^2} - 3 \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

la fonction du second membre se prolongeant par continuité en 0 comme le montre un développement limité en 0 de  $\ln(1-x)$  et  $\frac{1}{(1-x)^2}$ .

## 4 Étude sur le cercle de convergence

Si la série  $\sum_n a_n z^n$  converge en un point  $z_0$  de son cercle de convergence, on peut prolonger en ce point la fonction

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  en posant  $f(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ . Mais la proposition 3.1 ne permet pas d'affirmer la continuité de  $f$  au point  $z_0$ .

**Théorème 4.1** *Théorème d'Abel*

Si, pour un point  $z_0$  du cercle de convergence, la série  $\sum_n a_n z_0^n$  converge, alors sa somme en ce point est la limite

de  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  lorsque  $z$  tend vers  $z_0$  sur le rayon  $(O, z_0)$ .

**Exercice 20** On se fixe un réel  $\theta$  dans  $]0, \pi[$  et on s'intéresse à la série entière  $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n} z^n$ .

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut 1.

2. Étudier la série  $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n} z^n$  pour  $z = 1$  et  $z = -1$ .

3. On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$ .

Justifier le fait que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $] -1, 1[$  et expliciter sa dérivée.

4. En déduire que

$$f(x) = \arctan \left( \frac{x - \cos \theta}{\sin(\theta)} \right) + \arctan \left( \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$$

pour  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $x \in ]-1, 1[$ .

5. Montrer que pour tous réels  $x, y$  tels que  $xy < 1$ , on a :

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

6. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right)$$

pour  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $x \in ]-1, 1[$ .

7. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

pour  $\theta \in ]0, \pi[$ .

Correction :

1. Comme la suite  $\left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right)_{n \geq 1}$  est bornée (on a  $\left|\frac{\sin(n\theta)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ ), on déduit que si  $R$  est le rayon de convergence de cette série entière, alors  $R \geq 1$ . La série  $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n}$  étant semi-convergente, on a  $R \leq 1$  (si  $R > 1$  la série  $\frac{\sin(n\theta)}{n}$  est absolument convergente). On a donc  $R = 1$ .

2. Pour  $z = 1$ , on sait déjà que  $\frac{\sin(n\theta)}{n}$  est semi-convergente. On a vu que si la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 en décroissant, alors la série  $\sum_n u_n \exp(int)$  est convergente pour tout réel  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Prenant  $u_n = \frac{1}{n}$ , on en déduit que la série  $\sum_n \frac{1}{n} \exp(in(\theta + \pi))$  est convergente (on a  $\theta + \pi \in ]\pi, 2\pi[$ ) et il en est de même de la partie imaginaire  $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n} (-1)^n$ .

3. La somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$  et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, ce qui donne pour  $f$  sur  $] -1, 1[$  :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^{n-1} = \text{Im}(g(x)).$$

où :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(in\theta) x^{n-1} = \exp(i\theta) \sum_{n=0}^{+\infty} (x \exp(i\theta))^n = \frac{\exp(i\theta)}{1 - x \exp(i\theta)} \\ &= \frac{\exp(i\theta)}{1 - x \exp(-i\theta)} (1 - x \cos(\theta))^2 + x^2 \sin^2(\theta) = \frac{\exp(i\theta) - x}{(1 - x \cos(\theta))^2 + x^2 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

(on a  $|x \exp(i\theta)| = |x| < 1$ ), ce qui donne :  $f'(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1}$ .

4. Il s'agit de calculer une primitive de  $f'(x)$ . On a :

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1} = \int \frac{dx}{(x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}$$

(on note que  $\sin(\theta) > 0$  pour  $\theta \in ]0, \pi[$ ). En effectuant le changement de variable  $u = \frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  on obtient

$$F(x) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan(u) = \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

et tenant compte de  $f(0) = 0$ , il vient

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

pour  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $x \in ]-1, 1[$ .

5. Pour  $y$  fixé, on définit  $\varphi(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \arctan(x)$  pour  $xy < 1$ . Pour  $y = 0$  c'est la fonction nulle définie sur  $\mathbb{R}$  pour  $y > 0$ , elle est définie sur l'intervalle  $\left] -\infty, \frac{1}{y} \right[$  et pour  $y < 0$ , elle est définie sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{y} + \infty \right[$ . Cette fonction est dérivable avec :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\frac{(1-xy)+(x+y)y}{(1-xy)^2}}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+y^2)(1+x^2) - (1+x^2y^2+x^2+y^2)}{(1+x^2y^2+x^2+y^2)(1+x^2)} = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que  $\varphi$  est constante égale à  $\varphi(0) = \arctan(y)$  (0 est toujours dans l'intervalle de définition de  $\varphi$ ).

6. Constatant que :

$$\frac{x \cos(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta) \sin(\theta)} = \frac{x \cos(\theta) - \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} < 1$$

(c'est équivalent à  $x \cos(\theta) - \cos^2(\theta) < \sin^2(\theta)$ , soit à  $x \cos(\theta) < \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$  qui est vrai pour  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $x \in ]-1, 1[$ ), on déduit que :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{1 - \frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}\right) = \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{\sin^2(\theta) - (x-\cos(\theta)) \cos(\theta)}\right) = \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right).$$

7. Utilisant le théorème d'Abel, on déduit de la convergence de  $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n}$  que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{x \sin(\theta)}{1-x \cos(\theta)}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right)$$

avec

$$\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Cela donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

## 5 Somme et produit de séries entières

**Définition 5.1** Soient  $A = \sum_n a_n z^n$  et  $B = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières. Leur somme  $A+B$  est la série entière

$\sum_n (a_n + b_n) z^n$ , leur produit  $AB$  est la série entière  $\sum_n c_n z^n$  où on a posé, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

**Théorème 5.1** Soient  $A = \sum_n a_n z^n$  et  $B = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières dont les rayons de convergence  $R(A)$  et  $R(B)$  sont non nuls. Alors, chacune des séries entières  $A+B$  et  $AB$  a un rayon de convergence au moins égal au plus petit des nombres  $R(A)$ ,  $R(B)$ . Pour  $|z| < \inf(R(A), R(B))$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

**Corollaire 5.1** Si deux fonctions complexes  $f, g$  sont développables en série entière dans un même disque ouvert de centre  $O$ , il en est de même de leur somme et de leur produit.

## 6 Composition des séries entières

**Définition 6.1** L'ordre  $\omega(A)$  d'une série formelle  $A = (a_n)$  non nulle est le plus petit entier  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ . En d'autres termes, c'est le degré du terme du plus bas degré figurant dans  $A$ . Si  $A$  est la série nulle, on pose  $\omega(A) = +\infty$ .

Le corps de base étant ici  $\mathbb{C}$ , quelles que soient les séries entières  $A, B$ , on a  $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B)$  d'où, en particulier,  $\omega(A^n) = n\omega(A)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Définition 6.2** Soient  $A = \sum_n a_n z^n$  et  $B = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières telles que  $A$  soit d'ordre non nul (donc

telles que  $a_0 = 0$ ). Posons  $c_0 = b_0$  et, pour tous  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = \sum_{p \geq n} a_n z^p$  et  $c_p = \sum_{n=1}^p b_n a_{np}$ . Alors, la série entière

$\sum_{p \geq 0} c_p z^p$ , obtenue par ordination de la série formelle  $\sum_{n \geq 0} b_n A^n$  est appelée composée des séries entières  $B, A$ , et

notée  $B \circ A$ . On dit aussi que  $B \circ A$  s'obtient par substitution de  $A$  à  $z$  dans  $B(z)$ .

**Théorème 6.1** Soient  $A = \sum_n a_n z^n$  et  $B = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières dont les rayons de convergence sont non nuls, et telles que la série  $A$  soit sans terme constant (i.e. telle que  $a_0 = 0$ ). Alors la série composée

$$C = B \circ A = \sum_n c_n z^n$$

a un rayon de convergence non nul et, pour  $z$  assez petit, les fonctions

$$\tilde{A}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \quad \tilde{B}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n, \quad \tilde{C}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n \quad (3)$$

vérifient  $\tilde{C}(z) = \tilde{B}(\tilde{A}(z))$ . De plus, si  $R(B) = +\infty$ , on a  $R(C) \geq R(A)$  et la relation (3) est vraie pour  $|z| < R(A)$ .

**Corollaire 6.1** Soient  $f, g$  deux fonctions complexes définies sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$  et développables en série entière, telles que  $f(0) = 0$ . Alors la fonction composée  $h = f \circ g$  est développable en série entière dans un voisinage de l'origine, et on a  $h'(0) = g'(0)f'(0)$ .

**Proposition 6.1** Soient  $A, B$  deux séries entières d'ordres respectifs

$$\alpha = \omega(A), \quad \beta = \omega(B) \quad (\alpha > 0)$$

alors la série composée  $B \circ A$  est d'ordre  $\alpha\beta$ .

## 7 Inverse d'une série entière

**Proposition 7.1** Soit  $A = \sum_n a_n z^n$  une série entière dont le rayon de convergence est non nul et dont le terme constant  $a_0$  est non nul. Il existe alors une série entière unique  $B$ , dont le rayon de convergence est non nul, et qui vérifie  $AB = 1$  d'où :

$$\tilde{A}(z)\tilde{B}(z) = 1 \text{ pour } z < \inf(R(A), R(B)).$$

**Corollaire 7.1** Soit  $f : z \mapsto f(z)$  une fonction complexe définie et développable en série entière sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , et telle que  $f(0) \neq 0$ . Alors, il existe un voisinage de l'origine sur lequel la fonction  $1/f$  est définie et développable en série entière.

## 8 Séries majorantes, séries entières réciproques

**Définition 8.1** Soient  $A = \sum_n a_n z^n$  et  $B = \sum_n b_n z^n$  deux séries entières. On dit que la série  $B$  est une majorante de la série  $A$  si les coefficients  $b_n$  sont tous positifs et vérifient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité  $|a_n| \leq b_n$ .

**Proposition 8.1** Si la série entière  $B$  est une majorante de la série entière  $A$ , les rayons de convergence de ces séries vérifient l'inégalité  $R(A) \geq R(B)$ .

**Lemme 8.1** *Existence de majorantes*

Soit  $A = \sum_n a_n z^n$  une série entière d'ordre au moins égal à  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Alors, pour tout  $r < R(A)$ , il existe une majorante de  $B$  de la forme

$$B = M \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{z^n}{r^n} = M \frac{z^k}{r^k} \frac{1}{1 - z/r}, \quad (M = \text{cste}).$$

**Définition 8.2** On dit que deux séries entières  $A, B$  sont réciproques l'une de l'autre si elles sont d'ordre non nul et vérifient les relations formelles

$$A \circ B = B \circ A = z.$$

**Proposition 8.2** Soit  $B = \sum_n b_n z^n$  une série entière. Pour qu'il existe une série entière  $A = \sum_n a_n z^n$  telle que  $B \circ A = z$ , il faut et il suffit que  $B$  soit d'ordre 1, cette série  $A$  est alors unique, d'ordre 1, et vérifie formellement  $A \circ B = z$  : elle est donc réciproque de la série  $B$ .

**Proposition 8.3** Soit  $B$  une série entière d'ordre 1, dont le rayon de convergence est non nul. Alors, la série entière  $A$ , réciproque de  $B$ , a un rayon de convergence non nul et, pour  $|z|$  assez petit, on a :  $\tilde{B}(\tilde{A}(z)) = z$  et  $\tilde{A}(\tilde{B}(z)) = z$ .

**Corollaire 8.1** Soit  $f$  une fonction complexe, définie et développable en série entière sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , telle que  $f(0) = 0$ . Pour qu'il existe une fonction complexe  $g$ , développable en série entière au voisinage de l'origine et satisfaisant à  $f(g(z)) = g(f(z)) = z$  pour  $|z|$  assez petit, il faut et il suffit que l'on ait  $f'(0) \neq 0$ . Si cette condition est réalisée, il existe un voisinage  $U$  de l'origine tel que la restriction  $f_U$  de  $f$  à  $U$  soit un homomorphisme de  $U$  sur un voisinage de l'origine et la réciproque  $g$  de  $f_U$  vérifie  $g'(0) = \frac{1}{f'(0)}$ .

## 9 Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe

**Définition 9.1** Soit  $U$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$  (resp. de la droite numérique  $\mathbb{R}$ ). Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est dite analytique dans  $U$  si pour tout point  $z_0$  de  $U$ , l'application  $u \mapsto f(z_0 + u)$  est développable en série entière sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ).

**Proposition 9.1** Soient  $U$  un ouvert de (resp.  $\mathbb{R}$ ) et  $f$  une fonction analytique dans  $U$ . Alors  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $U$ , et chaque point  $z_0$  de  $U$  admet un voisinage sur lequel on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n.$$

**Remarque 9.1** Toute fonction holomorphe d'une variable complexe est nécessairement analytique. Par contre, une fonction dérivable et même indéfiniment dérivable d'une variable réelle n'est pas nécessairement analytique.

**Proposition 9.2** Toutes les dérivées d'une fonction analytique sont analytiques.

**Proposition 9.3** Soient  $f, g$  deux fonctions analytiques définies sur un même ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbb{R}$ ). Alors leur somme  $f + g$  et leur produit  $fg$  sont analytiques dans  $U$ . Enfin, si  $N$  désigne l'ensemble des zéros de  $g$ , le quotient  $f/g$  est analytique dans l'ouvert  $U \setminus N$ .

**Proposition 9.4** Soit  $f$  une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbb{R}$ ) et soit  $g$  une fonction analytique sur un ouvert (de  $\mathbb{C}$  ou de  $\mathbb{R}$ ) contenant  $f(U)$ . Alors la fonction composée  $h = g \circ f$  est analytique dans  $U$ .

## DIVERGENCE DE LA SERIE DES INVERSES DES NOMBRES PREMIERS

L'objectif de ce petit article est de prouver que la série des inverses des nombres premiers diverge : ceci prouve de façon imparable que l'ensemble des nombres premiers est infini. La première démonstration de ce résultat est due à Euler au XVIII<sup>e</sup> siècle. Nous en proposerons ci-après deux. On note  $p_n$  le  $n^{\text{e}}$  nombre premier, si bien que  $p_1=2, p_2=3, p_3=5,$  etc.

### Première démonstration

Soit  $N$  un entier naturel et considérons la somme  $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$ .

Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers, de  $p_1$  jusqu'à  $p_r$ . Ces nombres premiers interviennent dans la décomposition de  $2, 3, \dots, N$ , avec des exposants différents, éventuellement nuls. Appelons  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  les plus grands exposants de  $p_1, p_2, \dots, p_r$  rencontrés. Si bien que quel que soit l'entier  $q$  compris entre 2 et  $N$ , on peut écrire  $\frac{1}{q} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i^{k_i}}$ , avec  $k_i$  entier de  $0, \alpha_i$ .

Par conséquent :

$$S_N = 1 + \sum_{q=1}^N \prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i^{k_i}} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_r} + \dots + \frac{1}{p_r^{\alpha_r}}\right) \\ \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \times \dots \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_r}} = P \in \mathbb{R}$$

Ce raisonnement est valable quel que soit l'entier  $N$ . Cela prouve que la suite  $(S_N)$  est majorée : ce qui est absurde car on sait qu'elle est divergente. Bref, il y a nécessairement un nombre infini de nombres premiers.

### Deuxième démonstration

... ou un complément à celle qu'on vient de faire... Car on ne sait toujours rien de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$  : converge-t-elle ou non ? Remarquons que c'est une série de nombres positifs, l'écriture a donc bien un sens, la somme pouvant être égale à l'infini. Réutilisons les résultats précédents. Soit  $n$  un entier naturel. Les  $n$  premiers nombres premiers sont  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . En posant  $N = p_n$ , les seuls facteurs premiers qui interviennent dans la décomposition des entiers de 2 à  $N$  sont  $p_1, p_2, \dots, p_n$  et appelons comme plus haut  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les plus grands exposants de  $p_1, p_2, \dots, p_n$  rencontrés.

On peut encore écrire :

$$S_N = 1 + \sum_{q=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i^{k_i}} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_n} + \dots + \frac{1}{p_n^{\alpha_n}}\right) \\ \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \times \dots \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = P_n$$

Faisons tendre  $n$  vers l'infini : il est clair que  $p_n$  tend vers l'infini et donc  $S_N$  aussi !

On peut donc dire que le produit  $P_n$  tend vers l'infini.

Par conséquent,  $\ln P_n = \ln \left( \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right)$  diverge aussi vers l'infini. En

d'autres termes, la série de terme général  $\ln \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right)$  est divergente.

Mais par ailleurs, comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = +\infty$ , il est clair que le terme général de cette dernière

série équivaut à  $\frac{1}{p_k}$  pour  $k$  tendant vers l'infini. Autrement dit, la série de terme général

$\frac{1}{p_k}$  à savoir la série des inverses des nombres premiers est aussi divergente.

### Troisième démonstration (sur une idée de Paul Erdos)

Nous conservons les mêmes notations que précédemment.

Nous raisonnons par l'absurde et on suppose que la série des inverses des nombres premiers converge. Le reste d'ordre  $n$  tend donc vers 0. En particulier, il existe un entier  $n$  tel que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{2}$$

Soit  $N$  un entier quelconque. On partage l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  en deux sous-ensembles disjoints, dont la réunion est  $\{1, \dots, N\}$  tout entier :

$A$  est l'ensemble des entiers de  $\{1, \dots, N\}$  dont la décomposition en facteurs premiers comporte au moins un des  $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$

$B$  est le complémentaire de  $A$  dans  $\{1, \dots, N\}$ .

Estimons le cardinal de  $A$ .

Il est facile de calculer le nombre d'entiers de l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  qui sont divisibles par un nombre premier  $p$  : il est égal au nombre de multiples de  $p$  de  $\{1, \dots, N\}$  et inférieur ou égal à  $\frac{N}{p}$ .

Le cardinal de l'ensemble  $A$  est donc majoré par :

$$\text{card } A \leq \frac{N}{p_{n+1}} + \frac{N}{p_{n+2}} + \dots = N \left( \frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \dots \right) \leq \frac{N}{2}.$$

Symétriquement, le cardinal de  $B$  est supérieur ou égal à  $\frac{N}{2}$ .

Considérons maintenant un entier  $r$  dans  $B$ , c'est-à-dire un entier dont la décomposition en facteur premier ne comporte que les nombres  $p_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .

Écrivons  $r$  sous la forme  $r = m^2 \times q$ , où  $q$  est sans facteurs carrés ( $m = 1$  si  $r$  n'a aucun facteur carré).

On a  $m \leq \sqrt{r} \leq \sqrt{N}$ , car  $m^2 \leq r \leq N$  et donc il y a au plus  $\sqrt{N}$  choix pour  $m$ . Maintenant, la décomposition en facteurs premiers de  $q$  ne comporte que les nombres  $p_1, \dots, p_n$ , avec des exposants égaux à 0 ou 1. Il y a donc au plus  $2^n$  tels facteurs  $q$ .

On a donc prouvé que :

$$\frac{N}{2} \leq \text{card } B \leq 2^n \times \sqrt{N}$$

$n$  est fixé au départ, mais  $N$  peut être choisi aussi grand que l'on veut. On aboutit à une

contradiction car on sait que pour  $N$  suffisamment grand,  $\frac{N}{2} > 2^n \sqrt{N}$ .

C'est bien que la série des inverses des nombres premiers est divergente.

### Constante de Brun (WIKIPEDIA)

En 1919, le mathématicien Viggo Brun démontra que la série des inverses des nombres premiers jumeaux est convergente : sans doute voulait-il prouver que les nombres premiers jumeaux sont en nombre infini. Mais contrairement à ce qui se passe pour les nombres premiers, la série des inverses des nombres premiers jumeaux est bel et bien convergente... Ce qui n'empêche pas, notons-le, que ces derniers soient en nombre infini...

La somme de cette série est maintenant appelée **constante de Brun des nombres premiers jumeaux**, ou plus simplement **constante de Brun**, et est habituellement désignée par  $B_2$  :

$$B_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \dots$$

En calculant les nombres premiers jumeaux jusqu'à  $10^{14}$  (et découvrant au passage l'infâme bogue de la division du Pentium), Thomas Nicely a estimé par une méthode heuristique la constante de Brun à approximativement 1,902160578. Plus récemment, il a amélioré cette approximation à

$B_2 = 1,90216\ 05823 \pm 0,00000\ 00008$ ,  
en utilisant les jumeaux jusqu'à  $1,6 \times 10^{15}$ .

Le 21 mars 2006 la constante fut portée à la valeur

$$B_2 = 1.90216\ 05825\ 09 \pm 0.00000\ 00014\ 35$$

Il existe aussi une **constante de Brun pour les quadruplets de nombres premiers**. Un *quadruplet de premiers* est un couple constitué de jumeaux premiers, séparés d'une distance de 4 (la plus courte distance possible) soit  $(p, p + 2, p + 6, p + 8)$ . Les premiers quadruplets de premiers sont (5, 7, 11, 13), (11, 13, 17, 19), (101, 103, 107, 109). La constante de Brun pour les quadruplets de premiers, notée  $B_4$ , est la somme des inverses de tous les nombres premiers des quadruplets :

$$B_4 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{107} + \frac{1}{109}\right) + \dots$$

avec la valeur :

$$B_4 = 0,87058\ 83800 \pm 0,00000\ 00005.$$



## ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES II

par Pierre MARRY

Maître de conférences au CNAM

Le sujet de l'épreuve d'Analyse de cette année tournait autour de la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ . Dans une première partie, on étudiait en détail le domaine de convergence de cette série entière, ainsi que certaines propriétés de sa somme. La seconde partie était consacrée à la fonction  $\zeta$  de Riemann (cas où  $z = 1$ ). Enfin, dans la troisième partie, on déduisait de la première partie, à l'aide de séries de Fourier, des expressions de certaines intégrales comme sommes de séries numériques. Compte tenu du résultat désastreux de l'année précédente, toutes les questions difficiles avaient été *monnayées* en sous-questions indiquant pas à pas la marche à suivre, et un candidat connaissant précisément les grands théorèmes d'analyse du programme aurait dû pouvoir réaliser un *sans-faute*.

De fait, la moyenne de l'épreuve (6,21/20) est de près d'un point supérieure à celle de l'an dernier (5,29/20), et à peu près toutes les questions posées ont été abordées par des candidats. Le pourcentage de bons, voire très bons, candidats reste stable, bien que faible. Le pourcentage de très mauvais candidats, présentant un déficit catastrophique sur le plan des connaissances, de la rigueur, voire de la logique la plus élémentaire, reste lui aussi stable, hélas ! Ignorance de la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, confusion entre les propriétés du logarithme et celles de l'exponentielle, ignorance des formules élémentaires de trigonométrie sont monnaie courante.

Parmi les parties du cours pour lesquelles on constate une nette amélioration des connaissances des candidats, il faut signaler les séries de Fourier : les expressions des coefficients, les théorèmes de convergence sont assez généralement bien connus, même si un certain flou demeure sur leur dénomination. En particulier le théorème de convergence normale est assez souvent appelé *théorème de Dirichlet*. Dans sa quête du Graal, un candidat wagnérien utilise *l'égalité de Parsifal* (probablement monté sur un *étalon de Riemann*, selon l'expression d'un autre candidat). Mais tout cela reste anecdotique.

En revanche, sont très mal maîtrisées les hypothèses des divers théorèmes permettant des interversions de limites : théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone, dérivation sous les signes  $\int$  et  $\sum$ , etc. . . , qui sont tout de même les outils principaux de l'analyse dont disposent les candidats. Si ce manque de maîtrise n'a pas empêché ces derniers d'avancer dans le problème, il leur a néanmoins coûté de nombreux points, car le barème était très exigeant sur la rigueur des démonstrations. Mais il est finalement logique que les candidats aient quelques problèmes avec la notion de limite, qu'ils n'ont que deux ans pour apprendre à maîtriser, au vu de la nullité des programmes du deuxième cycle sur cette question. Pourtant, la manipulation des  $\varepsilon$  et des  $\alpha$  reste la base du calcul scientifique qu'ils auront à effectuer en tant qu'ingénieurs.

Qu'il me soit permis ici de rappeler à mes collègues de classes préparatoires que le critère de d'Alembert spécifique aux séries entières :  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , n'est plus au programme depuis 1996 pour des raisons évidentes (cas de séries *à trous*, oubli des valeurs absolues, etc. . . ) et que seul subsiste le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes positifs. Les candidats, s'ils souhaitent utiliser ce critère pour des séries entières, doivent donc étudier la limite du rapport  $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$  et en tirer les conséquences qui s'imposent, à l'exclusion de toute autre méthode. Toute

détermination du rayon de convergence à l'aide de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , quand ce n'est pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , se voit automatiquement attribuer la note 0, que le résultat soit exact ou non, et ce depuis déjà huit ans ! Il est dommage que l'information n'arrive pas à passer, après tant d'années.

## Références

- [1] JACQUELINE LELONG-FERRAND, JEAN-MARIE ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition* .
- [2] JEAN-ETIENNE ROMBALDI. *Séries entières*.  
[http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap14.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap14.pdf)
- [3] SITE INTERNET CAPES INTERNET. *Série des nombres premiers*.  
[http ://capesinterne.free.fr/PLC1/arithmetique/exercices/serie\\_nombres\\_premiers2.pdf](http://capesinterne.free.fr/PLC1/arithmetique/exercices/serie_nombres_premiers2.pdf)