Fiche de Mathématiques 8 - Intégrales généralisées.

Dans ce chapite, on traite deux problèmes distincts, mais qui se posent souvent simultanément : celui des intégrales généralisées (intégrales de fonctions définies sur des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$) et celui des intégrales dépendant d'un paramètre, c'est-à-dire d'intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ où $(t,x) \to f(t,x)$ désigne une fonction à deux variables t, x.

1 Intégrales généralisées

Définition 1.1 *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et E un e.v.n. complet. Une application $f : I \to E$ sera dite localement intégrable sur I si sa restriction à chaque sous-intervalle compact de I est intégrable.*

Définition 1.2 *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ de $\mathbb{R}$ ($-\infty < a \leq b \leq +\infty$). On dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b]$ est la limite au point b, si elle existe, de la fonction*

$$F : x \to \int_a^x f(t)dt \ (a \leq x < b).$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a,b]$ est divergente. De même, si f est localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $]a,b]$ ($-\infty \leq a < b < +\infty$), l'intégrale généralisée de f sur $]a,b]$ est la limite au point a, si elle existe, de la fonction

$$F : x \to \int_x^b f(t)dt \ (a < x \leq b).$$

Dans les deux cas, l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Définition 1.3 *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit c un point quelconque de $]a,b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si chacune des intégrales*

$$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$

est convergente et on pose alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On va voir que l'intégrale de f sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ peut se définir directement comme une limite d'intégrales sur des intervalles compacts.

Proposition 1.1 *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert $]a,b[$ borné ou non. Pour que l'intégrale de f sur cet intervalle soit convergente, il faut et il suffit que la fonction*

$$\varphi : (x,y) \to \int_x^y f(t)dt, \ (a < x < y < b)$$

ait une limite lorsque le point (x,y) tend vers le point (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ et cette limite est l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On a donc

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{(x,\,y) \to (a,\,b) \\ a < x < y < b}} \int_a^x f(t)dt.$$

Exercice 1 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \exp(-t)$ est convergente sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = 1$.

Correction : Pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_0^x \exp(-t)dt = 1 - \exp(-x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est convergente sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Correction : Pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente sur $]0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Correction : Pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\to} 2.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est divergente sur $]0, 1]$.

Correction : Pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \sin(t)$ est divergente sur $[0, +\infty[$.

Correction : Pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^x \sin(t)dt = 1 - \cos(x)$$

et la fonction cos n'a pas de limite à l'infini.

2 Calcul pratique des intégrales généralisées

Proposition 2.1 *On désigne par $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et par $(c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ et soit f une fonction vectorielle définie et continue sur chacun des intervalles ouverts $]c_{i-1}, c_i[$ $(1 \leq i \leq n)$. S'il existe une fonction vectorielle F définie et continue sur $[a, b]$ admettant $f(t)$ pour dérivée en tout point t où f est définie, alors f admet une intégrale généralisée et on a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Proposition 2.2 *Changement de variable.*
Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle ouvert $]a, b[$ sur l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et soit f une fonction vectorielle continue sur $]\alpha, \beta[$. Pour que l'intégrale de f sur $]\alpha, \beta[$ soit convergente il faut et il suffit que l'intégrale de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur $]a, b[$ le soit et on a alors :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Proposition 2.3 *Intégration par parties.*
Soient u, v deux fonctions numériques ou complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telles que les limites

$$A = \lim_{x\to a} u(x)v(x) \text{ et } B = \lim_{x\to b} u(x)v(x)$$

existent. Si l'une des intégrales

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx \text{ et } \int_a^b u'(x)v(x)$$

est convergente, il en est de même de l'autre, et on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = B - A - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Théorème 2.1 *Si les intégrales de f et g sur I sont convergentes, il en est alors de même de l'intégrale des fonctions $\overline{f}$ et $f + \lambda g$ pour tout nombre complexe λ et on a :*

$$\int_a^b \overline{f}(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx} \text{ et } \int_a^b (f(x)+\lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx.$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ *converge et* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))dx$ *diverge.*

Remarque 2.1 On ne peut rien dire à priori concernant la somme de deux intégrales divergentes ni le produit de deux fonctions convergentes.

Corollaire 2.1 *Si* f *est à valeurs complexes, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *est convergente si et seulement si les intégrales* $\int_a^b Re(f)(x)dx$ *et* $\int_a^b Im(f)(x)dx$ *sont convergentes et en cas de convergence on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f)(x)dx + i\int_a^b Im(f)(x)dx.$$

Exercice 6 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \ln(t)$ est convergente sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$.

<u>*Correction*</u> : On a $\int_x^1 \ln(t)dt = -1 - x\ln(x) + x \underset{x\to 0}{\to} -1$.

Exercice 7 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \left(\frac{1}{1-\exp(-t)} + \ln(t) - \frac{1}{t}\right)\exp(-t)$ est convergente sur $]0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$.

<u>*Correction*</u> : Une primitive de $f(t) = \frac{\exp(-t)}{1-\exp(-t)} - \left(-\exp(-t)\ln(t) + \exp(-t)\frac{1}{t}\right)$ est :

$$F(t) = \ln(1-\exp(-t)) - \exp(-t)\ln(t) = \ln\left(\frac{1-\exp(-t)}{t}\right) + \ln(t)(1-\exp(-t))$$

et on a $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} F(t) = 0$, ce qui donne $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$.

Exercice 8 Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente sur $]-1,1[$ et $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi$.

<u>*Correction*</u> : Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(x) \underset{x\to 1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

et par parité, pour $y \in]-1,0]$,

$$G(y) = \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{-y} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(-y) \underset{y\to -1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Exercice 9 Soit λ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(\lambda x)dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.

<u>*Correction*</u> : Soit F la primitive de f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^x \exp(\lambda t)dt = \begin{cases} x & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ \dfrac{\exp(\lambda x)-1}{\lambda} & \text{si} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}.$$

- Pour $\lambda = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale diverge.
- Pour $Re(\lambda) > 0$, on a :
$$|F(x)| = \left|\frac{\exp(\lambda x)}{\lambda}\right|.|1 - |\exp(-\lambda x)| = \frac{\exp(Re(\lambda)x)}{|\lambda|}(1-\exp(-Re(\lambda)x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty.$$
et l'intégrale diverge.
- Pour $Re(\lambda) < 0$, on a : $\left|\frac{\exp(\lambda x)}{\lambda}\right| = \frac{\exp(Re(\lambda)x)}{|\lambda|} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et l'intégrale converge vers $-\frac{1}{\lambda}$.

- Il reste à considérer le cas où $Re(\lambda) = 0$, soit le cas où $\lambda = iy$ avec $y \in \mathbb{R}^\star$ ($\lambda = 0$ est déjà étudié). Dans ce cas l'intégrale diverge puisque la fonction $\varphi : x \to \exp(iyx)$ n'a pas de limite à l'infini (la suite $\left(\varphi\left(\frac{n\pi}{y}\right)\right)_{n\geq 1} = (\exp(in\pi))_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ est divergente).

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l'$.

1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt$.
2. Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))dt$.

Correction :

1. En notant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour $x > 0$ et en utilisant le Théorème des Accroissements Finis, on a :
$$\int_0^x (f(t+1) - f(t))dt = [F(t+1) - F(t)]_0^x = F(x+1) - F(x) - F(1) = f(c_x) - F(1).$$
où $c_x \in]x, x+1[$. Et faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que :
$$\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt = l - F(1).$$
De manière analogue, on vérifie que :
$$\int_{-\infty}^0 (f(t+1) - f(t))dt = F(1) - l'$$
et finalement
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt = l - l'.$$
2. Avec $f(t) = \arctan(t) \underset{t\to\pm\infty}{\pm} \frac{\pi}{2}$, on déduit que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))dt = \pi.$$

Exercice 11 Soient a, b deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(at)\cos(bt)dt$ en précisant sa valeur en cas de convergence.

Correction :

- Pour $b = 0$, l'exercice 9. nous dit que cette intégrale converge si et seulement si $a < 0$.
- Pour $b \neq 0$, le changement de variable $t = u - \frac{\pi}{2b}$ nous dit que cette intégrale converge si et seulement si l'intégrale $\exp(-a\frac{\pi}{2b}) \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2b}}^{+\infty} \exp(a)\cos\left(bu - \frac{\pi}{2}\right) du$ converge, ce qui est encore équivalent à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \exp(at)\sin(bt)dt$ converge.

En notant $\lambda = a + ib$, on a : $\exp(at)\cos(bt) = \mathrm{Re}(\exp(\lambda t))$ et $\exp(at)\sin(bt) = \mathrm{Im}(\exp(\lambda t))$ et utilisant le résultat de l'exercice 9., on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(at)\cos(bt)dt$ converge si et seulement si $a < 0$.
Pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a alors
$$\int_0^{+\infty} \exp(at)\cos(bt)dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \exp(\lambda t)dt\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Exercice 12 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$ est convergente et calculer sa valeur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt = 1$ et une intégration par parties nous montre que $I_{n+1} = (n+1)I_n$, ce qui donne $I_n = n!$.

Exercice 13 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$ converge et calculer sa valeur.

Correction : Une intégration par parties nous donne pour $x \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)} = \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 \\ &= -\ln(2) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} -\ln(2). \end{aligned}$$

Exercice 14 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt$ converge et calculer sa valeur.

Correction : Avec $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(t^2)}{t^2} = 1$, on prolonge par continuité en 0 la fonction à intégrer et le seul problème de convergence est à l'infini. Une intégration par parties nous donne pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt = \left[-\frac{\arctan(t^2)}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = -\frac{\arctan(x^2)}{x} + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

(la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\arctan(t^2)}{t}$ se prolonge aussi par continuité en 0 avec $g(0) = 0$) et la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{1}{(1+t^2)^2 - 2t^2}$ donne $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$.

Exercice 15 Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$ converge et calculer sa valeur.

Correction : Le changement de variable $t = u^2$ donne $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ et une décomposition en éléments simples donne $I = \dfrac{4}{9}\sqrt{3}\pi$.

Exercice 16 Prouver la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(nt))dt$.

Correction : Pour $t > 0$, on a : $f(t) = \ln(\sin(t)) = \ln\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \ln(1) = 0$, donc $t \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)$ se prolonge par continuité en 0 et comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)dt$ est convergente (exercice 6.), on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$ est convergente. Notons I la valeur de cette intégrale. Le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ nous donne pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(t))dt \underset{x\to 0^+}{\to} I$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt = I$. On peut alors écrire que :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Le changement de variable $u = 2t$ nous dit que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt$ est convergente et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt.$$

De même, le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ nous donne :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(2t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt = I.$$

On a donc en définitive : $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt - \frac{\pi}{2}\ln(2) = I - \frac{\pi}{2}\ln(2) \Leftrightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

3 Les intégrales de Riemann

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Théorème 3.1 *Soient α un réel et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.*

1. *L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$ avec :*
$$\forall\alpha>1,\ \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}.$$
2. *L'intégrale de f sur $]0,1]$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$ avec :*
$$\forall\alpha<1,\ \int_0^{1}\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

On pourra noter l'analogie entre les intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$ et les séries de Riemann.

Remarque 3.1 L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente quel que soit le réel α.

On peut montrer de manière analogue la

Proposition 3.1 *Pour $a<b$ et α dans $\mathbb{R}$, l'intégrale de $f:t\mapsto\dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$, (resp. $f:t\mapsto\dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$) sur $[a,b[$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$ avec :*
$$\forall\alpha<1,\ \int_a^b\frac{dt}{(b-t)^\alpha}=\int_a^b\frac{dt}{(t-a)^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Exercice 17 On considère pour $(r,s)\in\mathbb{R}^2$ l'intégrale :
$$I_a(r,s)=\int_a^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx \text{ où } a\in]0,1[.$$

1. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s$ suivant les valeurs de r et de s.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ converge si et seulement si $r>-1$ et $s>-1$.
   On notera $I(r,s)$ cette intégrale généralisée pour $r>-1$ et $s>-1$.
3. Si $r>-1$ et $s>-1$, montrer que :
$$I(r,s)=\int_0^{+\infty}\exp(-(r+1)x)x^s dx=\frac{1}{(r+1)^{s+1}}I(0,s).$$
4. Montrer que pour $s>0$, $I(0,s)=sI(0,s-1)$.
5. En déduire la valeur de $I(r,n)$ pour tout $r>-1$ et $n\in\mathbb{N}$.

Correction :

1. Le changement de variable $x=\dfrac{1}{t}$ nous donne :
$$\lim_{x\to0}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)^s}{t^r}=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & r>0 \text{ et } s\in\mathbb{R}\\ 0 & \text{si} & r=0 \text{ et } s<0\\ 1 & \text{si} & r=s=0\\ +1 & \text{si} & r=0 \text{ et } s>0\\ +1 & \text{si} & r<0 \text{ et } s\in\mathbb{R}\end{array}\right..$$
2. L'intégrale
$$\int_0^{1/e}x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx=\int_0^{1/e}\frac{dx}{x^{-r}|\ln(x)|^{-s}}$$
   est une intégrale de Bertrand et on sait qu'elle converge si et seulement si $-r<1$ et $s\in\mathbb{R}$ ou $-r=1$ et $-s>1$.
   Le changement de variable $t=-ln(x)$ nous montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{1/e}^1\frac{dx}{x^{-r}|\ln(x)|^{-s}}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\exp((r+1)t)t^{-s}}$, cette dernière étant de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^{-s}}$, donc convergente uniquement pour $-s<1$.
   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ converge si et seulement si $r>-1$ et $s>-1$.
3. En effectuant le changement de variable $t=-\ln(x)$, on a pour $r>-1$ et $s>-1$:

$$I(r,s) = \int_0^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx = \int_0^{+\infty} \exp(-(r+1)t) t^s dt$$

et le changement de variable $u = (r+1)t$ nous donne :

$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} \exp(-u) \frac{u^s}{(r+1)^s} \frac{du}{r+1} = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$

4. Pour $s > 0$, une intégration par parties donne :

$$I(0,s) = [-t^s \exp(-t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} t^{s-1} \exp(-t) dt = sI(0,s-1).$$

5. Avec $I(0,n) = nI(0,n-1)$ pour tout entier $n \geq 1$, on déduit par récurrence que $I(0,n) = n!I(0,0) = n!$. Il en résulte que :

$$I(r,n) = \frac{1}{(r+1)^{n+1}} I(0,n) = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}}$$

pour tout entier naturel n et tout réel $r > -1$.

4 Critères généraux de convergence

Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Soit c un point quelconque de $]a,b[$ et soit $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Par définition, la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence des deux limites finies $F(a+0)$ et $F(b-0)$.

Proposition 4.1 *Cas d'une fonction numérique positive.*
Soit f une fonction numérique positive localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b[$, on ait : $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Si l'intégrale de f sur $[a,b[$ est divergente, l'intégrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b. On conviendra alors d'écrire : $\int_a^b f(t)dt = +\infty$.

Corollaire 4.1 *Soient f, g deux fonctions numériques positives sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$, vérifiant pour tout $t \in [a,b[$ l'inégalité $f(t) \leq g(t)$.*

- *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, il en est de même de $\int_a^b f(t)dt$.*
- *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, il en est de même de $\int_a^b g(t)dt$.*

Proposition 4.2 *Cas général. Critère de Cauchy.*
Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$. Pour que l'intégrale de f sur $[a,b[$ soit convergente, il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) de points de $[a,b[$ convergeant vers b, la suite

$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$$

ait une limite et cette limite est alors égale à $\int_a^b f(t)dt$.

On en déduit le résultat fondamental :

Théorème 4.1 *Critère de Cauchy pour les intégrales.*
Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$, à valeurs dans un e.v.N. complet E. Pour que l'intégrale de f sur $[a,b[$ soit convergente, il faut et il suffit qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ donné, on puisse faire correspondre un nombre $X(\varepsilon)$ tel que les inégalités $b > v > u \geq X(\varepsilon)$ entraînent

$$\left\| \int_u^v f(t)dt \right\| \leq \varepsilon.$$

5 Convergence absolue et semi-convergence. Règles pratiques

Définition 5.1 *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert I de $\mathbb{R}$, d'extrémités a, b. On dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b \|f(t)\|dt$ est convergente.*

Théorème 5.1 *Soient I un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a, b et $f : I \to E$ une application localement intégrable de I dans un e.v.n. complet E. Pour que l'intégrale de f sur I soit convergente, il suffit qu'il existe une fonction numérique positive φ localement intégrable sur I, telle que pour tout $t \in I$, on ait $\|f(t)\| \leq \varphi(t)$ et telle que l'intégrale $\int_a^b \varphi(t)dt$ soit convergente ; l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors absolument convergente.*

Corollaire 5.1 *Pour que l'intégrale d'une fonction localement intégrable soit convergente, il suffit qu'elle soit absolument convergente.*

Proposition 5.1 *Soient f, g deux fonctions numériques positives localement intégrables sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, équivalentes au voisinage de b. Si l'une des intégrales*

$$\int_a^b f(t)dt, \qquad \int_a^b g(t)dt$$

est convergente, il en est de même de l'autre.

Proposition 5.2 *Soit g une fonction numérique strictement positive et localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et soit f une fonction numérique ou complexe localement intégrable sur $[a, b[$ telle que la limite $k = \lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)}$ existe. Alors :*

1. *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.*
2. *Si $k \neq 0$ et si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge, il en est de même de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.*

En prenant pour fonction de comparaison g la fonction $t \to 1/t^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), on obtient les règles suivantes :

Proposition 5.3 *Soit f une fonction numérique ou complexe localement intégrable sur l'intervalle $]a, b]$ telle que la limite $k = \lim_{t\to a}(t-a)^\alpha f(t)$ existe.*

- *Si $\alpha < 1$ l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente au point a.*
- *Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente au point a.*

On a de même

Proposition 5.4 *Soit f une fonction numérique ou complexe localement intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$ telle que la limite $k = \lim_{t\to a} t^\alpha f(t)$ existe.*

- *Si $\alpha > 1$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente au point à l'infini.*
- *Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente à l'infini.*

Exercice 18 Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ sont absolument convergentes.

<u>*Correction*</u> : Cela résulte immédiatement de la convergence des intégrales de Riemann à l'infini pour $\alpha > 1$ et de :

$$\forall t \geq 1, \ \left|\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \text{ et } \forall t \geq 1, \ \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Exercice 19 Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^\alpha)}{t^\alpha}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ sont convergentes.

<u>*Correction*</u> : On traite le cas de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$. Une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt.$$

On conclut alors avec l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha + 1}dt$ et avec $\left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$

Exercice 20 Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sqrt{t}}dt.$

Correction : La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. Un développement limité nous donne pour $t \ge 1$:

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{1+\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}}\right) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2(t)}{t}(1+\varepsilon(t))\right)$$

avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$. Soit

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))$$

avec $\left|\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))\right| \le \frac{2}{t\sqrt{t}}$ pour t assez grand. Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Exercice 21 Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ soit bornée. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt.$

Correction : On désigne par M un majorant de $|F|$. Une intégration par parties donne pour tout réel $x > 0$:

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

avec : $\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \le \frac{M}{t^2}$, ce qui entraîne la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt - F(1).$

6 Intégrales semi-convergentes. Règle d'Abel

Proposition 6.1 *Règle d'Abel.*
Sit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[a,+\infty[$, positive, décroissante et tendant vers zéro à l'infini. Soit d'autre part g une fonction numérique ou complexe, localement intégrable sur $[a,+\infty[$, telle que la fonction

$$x \to \left|\int_a^x g(t)dt\right|$$

soit majorée par un nombre k, indépendant de x. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Corollaire 6.1 *Si f est une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty[$ et si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \exp(i\lambda t)f(t)dt$ est convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. En conséquence, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \cos(\lambda t)f(t)dt$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\lambda t)f(t)dt$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Exercice 22 Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt.$$

Correction : Comme $\lim\limits_{t\to0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, il n'y a pas de problème de convergence en 0 et l'exercice 21. nous dit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente. Avec $0 \le \frac{\sin^2(t)}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ est convergente. Pour tous réels $x > \varepsilon > 0$, une intégration par parties faite en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t},\ u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t),\ v(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

donne :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

et en utilisant la relation $1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + 2\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt.$$

Le changement de variable $y = \frac{t}{2}$ nous donne :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy.$$

Enfin avec $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ on déduit que :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = x\exp(ix^n)$$

où $n \geq 3$ est un entier.

Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente avec $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

<u>*Correction*</u> : Avec $|f(x)| = x$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. On peut écrire que $f = u'v$ avec $u(x) = \frac{1}{ni}\exp(ix^n)$ et $v(x) = \frac{1}{x^{n-2}}$. Comme $|u(x)v(x)| = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{n-2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (on a $n \geq 3$), on déduit du théorème d'intégration par parties que les intégrales $\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx = x\exp(ix^n)dx$ et $\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \frac{2-n}{ni}\int_1^{+\infty} \frac{\exp(ix^n)}{x^{n-1}}dx$ sont de même nature. Comme $\left|\frac{\exp(ix^n)}{x^{n-1}}\right|$ avec $n-1 \geq 2$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(ix^n)}{x^{n-1}}dx$ est absolument convergente et on en déduit alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} x\exp(ix^n)dx$ est convergente.

7 Relations entre la convergence des intégrales et la convergence des séries

Proposition 7.1 *Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ soit convergente.*

Cette proposition permet difficilement d'établir la convergence d'une intégrale donnée, car elle exige que l'on étudie toutes les suites (x_n) tendant vers $+\infty$. Dans le cas où f est une fonction positive, il suffit de considérer une suite particulière (x_n) :

Proposition 7.2 *Soit f une fonction numérique positive localement intégrable sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il suffit qu'il existe une suite croissante (x_n) tendant vers $+\infty$, telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ soit convergente.*

Dans le cas plus particulier où la fonction positive f est décroissante, on a :

Théorème 7.1 *Soit f une fonction numérique positive et décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, il faut et il suffit que la série de terme général $u_n = f(n)$ soit convergente (u_n étant défini pour n entier tels que $n > a$).*

Exercice 24 Montrer que pour $0 < \alpha \leq 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est semi-convergente.

<u>*Correction*</u> : On sait déjà que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ sont convergentes pour $\alpha > 0$ (exercice 18.). Comme pour $t \geq 1$ et $0 < \alpha \leq 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \geq \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|$ (qui résulte de $t \geq t^\alpha$ ou encore $t^{1-\alpha} \geq 1$), il nous suffit de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente. Pour ce faire, on utilise la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $\forall n \geq 1,\ x_n = n\pi$. Pour $n \geq 1$, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{n\pi + u} du \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin(u) du = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty$, ce qui entraîne la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$.

8 Intégrale définie dépendant d'un paramètre

Théorème 8.1 *Soient X un espace topologique $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : (t,x) \to f(t,x)$ une application continue de $[a,b] \times X$ dans un e.v.n. complet E. Alors la fonction :*

$$F : X \to E,\ x \mapsto \int_a^b f(t,x)dt$$

est continue.

Théorème 8.2 *Dérivation sous le signe* $\displaystyle\int$.
Soit Δ le rectangle semi-ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités $a \leq t \leq b$, $\alpha < x < \beta$, (a, b réels finis, $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$) et soit $f : (t,x) \to f(t,x)$ une application continue de Δ dans un e.v.n. complet E, telle que la dérivée partielle $f'_x(t,x)$ existe et soit continue sur Δ. Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et on a :

$$F'(x) = \int_a^b f'_x(t,x)dt. \tag{1}$$

En d'autres termes, si $f : \Delta \to E$ est continue, l'existence et la continuité de f' sont des conditions suffisantes pour assurer l'existence de la dérivée F' et permettent d'échanger les signes de dérivation et d'intégration. On traduit aussi la relation (1) en disant que la dérivée de F s'obtient par dérivation sous le signe $\displaystyle\int$

Proposition 8.1 *Cas où les limites d'intégration dépendent du paramètre.*
Les hypothèses étant celles du Théorème (8.1), la fonction (de trois variables) :

$$\phi : [a,b] \times [a,b] \times X \to E,\ (u,v,x) \mapsto \int_u^v f(t,x)dt$$

est continue.

Proposition 8.2 *Si les hypothèses du Théorème 8.1 sont vérifiées, et si $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ sont deux applications continues de X dans $[a,b]$, la fonction*

$$\phi : X \to E,\ x \mapsto \phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dx$$

est continue.

Proposition 8.3 *Si les hypothèses du Théorème 8.2 sont vérifiées et si $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ sont deux applications dérivables de $]\alpha, \beta[$ dans $[a,b]$, la fonction :*

$$\phi :]\alpha, \beta[\to E,\ x \mapsto \phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$$

est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$\phi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f'_x(t,x)dt + f(v(x),x)v'(x) - f(u(x),x)u'(x).$$

9 Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Définition 9.1 *Soient $[a,b]$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, X un ensemble quelconque et $f:(t,x)\to f(t,x)$ une application de $[a,b[\times X$ dans un e.v.n. complet E, telle que pour chaque $x\in X$, l'intégrale $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ soit convergente. On dit que cette intégrale est uniformément convergente sur X si, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un nombre $\beta(\varepsilon)$ (ne dépendant que de ε) tel que les inégalités $\beta(\varepsilon)\le u<b$ entraînent*

$$\left\|\int_u^b f(t,x)dt\right\|\le\varepsilon.$$

On a alors

Théorème 9.1 *Soient $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, X un espace topologique et $f:(t,x)\to f(t,x)$ une application continue de $[a,b[\times X$ dans un e.v.n. complet E telle que l'intégrale*

$$F(x)=\int_a^b f(t,x)dt$$

soit uniformément convergente sur X. Alors la fonction $F:X\to E$ est continue.

Théorème 9.2 *Soit Δ un ensemble plan défini par des inégalités de la forme $a\le t<b$, $\alpha<x<\beta$ et soit $(t,x)\to f(t,x)$ une application continue de Δ dans un e.v.n. complet E telle que :*

1. *f admet une dérivée partielle $f'_x(t,x)$ continue sur Δ,*
2. *pour chaque $x\in]\alpha,\beta[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est convergente,*
3. *l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'_x(t,x)dt$ est uniformément convergente sur $]\alpha,\beta[$.*

Alors la fonction $F:]\alpha,\beta[\to E$, $x\mapsto\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et on a

$$F'(x)=\int_a^b f'_x(t,x)dt$$

10 Critères de convergence uniforme pour les intégrales

Proposition 10.1 *Critère de Cauchy pour la convergence uniforme.*
Soient $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$, X un ensemble quelconque et $(t,x)\to f(t,x)$ une application de $[a,b[\times X$ dans un e.v.n. complet E, telle que pour chaque $x\in X$, la fonction $t\to f(t,x)$ soit localement intégrable sur $[a,b[$. Pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ soit uniformément convergente sur X, il faut et il suffit qu'à chaque nombre $\varepsilon>0$ on puisse associer un nombre $\beta(\varepsilon)$ (ne dépendant que de ε) tel que les inégalités $\beta(\varepsilon)\le u<v<b$ entraînent

$$\forall x\in X,\ \left\|\int_u^v f(t,x)dt\right\|\le\varepsilon.$$

Définition 10.1 *Les notations étant celles de la Proposition précédente, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est normalement convergente s'il existe une fonction numérique positive φ, localement intégrable sur $[a,b[$ telle que*

1. *pour tout $t\in[a,b[$ et tout $x\in X$ on ait $\|f(t,x)\|\le\varphi(t)$,*
2. *l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt$ soit convergente.*

Théorème 10.1 *Pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ soit uniformément convergente, il suffit qu'elle soit normalement convergente.*

Proposition 10.2 *Règle d'Abel pour la convergence uniforme.*
X étant un ensemble quelconque et a un nombre réel, soient $(t,x)\to f(t,x)$ une fonction numérique définie sur l'ensemble $[a,+\infty[\times X$ et $(t,x)\to g(t,x)$ une fonction numérique ou complexe définie sur $[a,+\infty[\times X$, telles que :

1. *pour chaque $x \in X$, la fonction $t \to f(t,x)$ est positive et décroissante ; de plus elle tend vers zéro uniformément par rapport à x lorsque t tend vers $+\infty$,*
2. *pour chaque $x \in X$, la fonction $t \to g(t,x)$ est localement intégrable sur $[a,+\infty[$, et il existe un nombre k indépendant de x tel que pour tout $x \in X$, et tout $u \in [a,+\infty[$, on ait : $\left|\int_a^u g(t,x)dt\right| \leq k$.*

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)dt$ est uniformément convergente sur X.

Proposition 10.3 *Soit f une fonction numérique positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, tendant vers zéro à l'infini. Alors l'intégrale*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp(itx)f(t)dt,\ x \in \mathbb{R}^\star$$

est uniformément convergente sur l'ensemble défini par $|x| \geq x_0$, quel que soit $x_0 > 0$. En conséquence, si f est continue, F est continue sur $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exercice 25 Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors pour tout réel λ non nul, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(i\lambda t)dt$ est convergente.

Correction : Pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\left|\int_0^x \exp(i\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|\exp(i\lambda x) - 1| \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(i\lambda t)dt$ est convergente pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\lambda \neq 0$.

Exercice 26 Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}dt$ suivant les valeurs des nombres réels α et λ.

1. Traiter le cas $\lambda = 0$.
   On suppose, dans les questions suivantes, que $\alpha \neq 0$.
2. Montrer que, si $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}dt$ est absolument convergente.
3. Montrer que, si $0 < \alpha < 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}dt$ est semi-convergente.
4. Montrer que, si $\alpha \leq 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}dt$ est divergente.
5. Montrer que, si $0 < \alpha \leq 1$, alors les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha}dt$ sont semi-convergentes.
6. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ est divergente.
7. Montrer que les deux fonctions f et g définies sur $[1,+\infty[$ par $f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2(t)}{t}$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. À quelle propriété cette question fournit-elle un contre-exemple ?

Correction :

1. Pour $\lambda = 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha > 1$, on a alors :
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. Pour tout réel $t \geq 1$, on a $\left|\frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}\right| = \frac{1}{t^\alpha}$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha}dt$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
3. Pour tout réel $x > 1$, on a :
$$\left|\int_1^x \exp(i\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|\exp(i\lambda x) - \exp(i\lambda)| \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$ pour $\alpha > 0$, on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha} dt$ est convergente pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\lambda \neq 0$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha} \right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} dt = +\infty$ donc l'intégrale est semi-convergente dans ce cas.

4. Par conjugaison complexe, on voit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-i\lambda t)}{t^\alpha} dt$ l'est. Il en résulte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ le sont.

Pour montrer la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(i\lambda t)}{t^\alpha} dt$ pour $\alpha \leq 0$, il suffit donc de montrer celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$. Tenant compte de la parité de la fonction cos, on peut supposer que $\lambda > 0$. Soit donc $\alpha = -\beta$ un réel négatif ou nul, λ un réel strictement positif et F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^\beta \cos(\lambda t) dt.$$

En désignant par $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$, on a :

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_n + \frac{\pi}{2\lambda}} t^\beta \cos(\lambda t) dt$$

et le changement de variable $t = x_n + u$, nous donne :

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (x_n + u)^\beta \cos(\lambda(x_n + u)) du = \int_0^\pi 2\lambda (x_n + u)^\beta \cos(\lambda u) du.$$

Mais pour $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2\lambda}$, on a $0 \leq \lambda u \leq \dfrac{\pi}{\lambda}$ et $\cos(\lambda u) \geq 0$, de sorte que :

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) \geq x_n^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u) du = \int_0^\pi 2\lambda (x_n + u)^\beta \cos(\lambda u) du = \frac{x_n^\beta}{\lambda} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

et F ne peut avoir de limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ diverge.

5. On sait déjà que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ sont convergentes pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel λ. Par parité, on peut supposer que $\lambda > 0$. On note F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt$$

et $(x_n)_{n \geq 1}$ est la suite définie par $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$. Pour $\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{|\cos(\lambda(x_n + u))|}{(x_n + u)^\alpha} du = \int_0^\pi 2\lambda \frac{\cos(\lambda u)}{(x_n + u)^\alpha} du \\ &\geq \frac{1}{(x_n + \frac{\pi}{2\lambda})^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u) du = \frac{1}{\lambda(\frac{2n\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda})^\alpha}. \end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(\frac{2n\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda})^\alpha} = +\infty$ et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (F(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}) - F(x_n)) = +\infty$. Avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F\left(x_k + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_k)) &= \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_k + \frac{\pi}{2\lambda}} \frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt \\ &\leq \int_1^{x_n + \frac{\pi}{2\lambda}} \frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt = F(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}), \end{aligned}$$

on déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}) = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt$ est divergente pour $0 < \alpha \leq 1$. On procède de manière analogue pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\|\sin(\lambda t)|}{t^\alpha} dt$.

6. Pour tout réel t, on a $\dfrac{\sin^2(t)}{t} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos(2t)}{t}\right)$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ est divergente.
7. Avec $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(1 + \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} = 0$, on déduit que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$. Et on a ici $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ divergente.

11 Limites d'intégrales généralisées

Proposition 11.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions localement intégrables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, à valeurs dans le même e.v.n. complet E et telles que les intégrales généralisées $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ soient uniformément convergentes. Si la suite (f_n) converge simplement sur $]a,b[$ vers une fonction f, et si la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur chaque intervalle compact $[u,v]$ contenu dans $]a,b[$ alors la fonction limite est localement intégrable sur $]a,b[$, l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ est convergente et la suite (I_n) tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$.*

Proposition 11.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions numériques ou vectorielles localement intégrables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et convergeant simplement vers une fonction localement intégrable f. Supposons qu'il existe une fonction positive g satisfaisant à $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ quels que soient $t \in]a,b[$ et $n \in \mathbb{N}$ et telle que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ soit convergente (ce qu'on peut exprimer en disant que les intégrales $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ sont normalement convergentes). Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

12 Application aux séries

Proposition 12.1 *Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ une série de fonctions continues sur $]a,b[$ convergeant uniformément sur chaque intervalle compact contenu dans $]a,b[$ et telles que les intégrales $\int_a^b u_n(t)dt$ soient convergentes et soient*

$$S_n(t) = \sum_{p=0}^{n} u_p(t), \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t).$$

Si les intégrales $\int_a^b S_n(t)dt$ convergent uniformément aux points a et b alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt$ est convergente et on a :

$$\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)dt.$$

Références

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Intégrales généralisées.*
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼rombaldi/Capes/AnalyseChap13.pdf