

ANALYSE 2

Fiche de Mathématiques 9 - Séries de Fourier.

1 Séries trigonométriques

2 Coefficients de Fourier

3 Règles de convergence

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π -périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f .
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Correction :

1. Sur $[0, \pi/2]$, on a $f(x) = 4x^2 - \pi^2$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ avec $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(\pi/2) = 4\pi$. Sur $]\pi/2, \pi]$, on a $f(x) = 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2$ et cette relation est aussi valable pour $x = \pi/2$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2, \pi]$ avec $f'_d(\pi/2) = 4\pi$ et $f'_g(\pi) = 0$. Par parité et périodicité, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et un dessin serait sûrement très convaincant) et f' est une fonction impaire, 2π -périodique avec

$$f'(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8\pi - 2x & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Puisque la fonction f est paire, les coefficients $b_n(f)$ sont nuls et

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} (4t^2 - \pi^2) \cos(nt) dt + \int_{\pi/2}^\pi (8t\pi - 3\pi^2 - 4t^2) \cos(nt) dt \right)$$

ce qui donne après quelques calculs pénibles

$$a_{2p}(f) = 0 \text{ et } a_{2p+1}(f) = \frac{32(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^3},$$

ou plus simplement en exploitant la relation $b_n(f') = -na_n(f)$, ou $a_n(f'') = nb_n(f') = -n^2a_n(f)$ en considérant la pseudo-dérivée d'ordre 2 de f .

3. Puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est égale à sa somme de Fourier (Théorème de Dirichlet) et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{32}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \cos((2n+1)x).$$

En évaluant pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

Correction :

1. $a_{2n}(f) = \frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)}$ et $a_{2n+1}(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il y a donc convergence uniforme de la série de Fourier vers f .
En $x = 0$, on obtient :

$$f(0) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}4}{\pi(4n^2-1)} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Exercice 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \exp(x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
2. En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Correction :

1. $c_n(f) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}$.
2. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc la série de Fourier converge simplement vers la fonction f^* régularisée de f . Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^*(x) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} \exp(inx)$. Pour $x = 0$, on obtient $\frac{\pi}{\text{sh}(\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in}$. Or,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} \right) = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2+1}.$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{\text{sh}(\pi)} \right).$$

De même avec $x = \pi$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} (1 + \pi \coth(\pi))$.

Exercice 4 Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f .
2. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.
3. En déduire enfin la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction :

1. $b_n(f) = 0$ pour $n > 1$ et $a_n(f) = (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite

$$f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(n^2-\alpha^2)} \cos(nx).$$

2. Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} \right)$ et pour $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1-\alpha\pi \cotan(\alpha\pi)}{2\alpha^2}.$$

3. Il y a convergence normale de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ pour $\alpha \in [0, 1/2]$ donc quand $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.

$$\text{Quand } x \rightarrow 0, \cotan(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + o(x) \text{ donc } \frac{1-\alpha\pi \cotan(\alpha\pi)}{2\alpha^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6} \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \text{ch}(\alpha x)$ sur $] -\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f .

2. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$.

Correction :

1. $b_n(f) = 0$ pour $n > 1$ et $a_n(f) = (-1)^n \frac{2\alpha \text{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 + n^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite,

$$f(x) = \frac{\text{sh}(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \text{sh}(\pi)}{\pi(\alpha^2 + n^2)} \cos(nx).$$

2. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\alpha\pi}{\text{sh}(\alpha\pi)} - 1 \right)$$

et pour $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha\pi \coth(\alpha\pi) - 1}{2\alpha^2}.$$

4 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro

Exercice 6 On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de Dirichlet, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont 2π -périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité a de f , on ait :

$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$

Soient $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$ définie par $g(x) = f(x + a)$ où a est un réel fixé. Exprimer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f .

Correction : Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \exp(-int) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + a) \exp(-int) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \exp(-in(x - a)) dx = \exp(ina) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx = \exp(ina) c_n(f). \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} a_n(g) &= c_{-n}(g) + c_n(g) = \exp(-ina) c_{-n}(f) + \exp(ina) c_n(f) \\ &= \exp(-ina) \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} + \exp(ina) \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\ &= \frac{\exp(ina) + \exp(-ina)}{2} a_n(f) + \frac{\exp(ina) - \exp(-ina)}{2i} b_n(f) \\ &= \cos(na) a_n(f) + \sin(na) b_n(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(g) &= i(c_n(g) - c_{-n}(g)) = i(\exp(ina) c_n(f) - \exp(-ina) c_{-n}(f)) \\ &= i \left(\exp(ina) \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} - \exp(-ina) \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \right) \\ &= \frac{\exp(ina) - \exp(-ina)}{2} b_n(f) - \frac{\exp(ina) + \exp(-ina)}{2i} a_n(f) \\ &= \cos(na) b_n(f) - \sin(na) a_n(f), \end{aligned}$$

ce qui peut aussi se vérifier avec :

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t + a) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n(x - a)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(na) \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(na) \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \\ &= \cos(na) a_n(f) + \sin(na) b_n(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(n(x-a)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(na) \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx - \sin(na) \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \cos(na) b_n(f) - \sin(na) a_n(f). \end{aligned}$$

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad c_n(f) &= \frac{c_n(f')}{in} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) &= -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}. \end{aligned}$$

Correction : Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il existe alors une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$$

telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge par continuité en fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) \exp(-int) dt$$

et comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_k, a_{k+1}]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) \exp(-int) dt &= \left[i \frac{f(t) \exp(-int)}{n} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) \exp(-int) dt \\ &= i \frac{f(a_{k+1}^-) \exp(-ina_{k+1}) - f(a_k^+) \exp(-ina_k)}{n} - \frac{i}{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) \exp(-int) dt. \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors $f(a_k^-) = f(a_k^+) = f(a_k)$ pour tout k compris entre 0 et p et :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} (f(a_{k+1}) \exp(-ina_{k+1}) - f(a_k) \exp(-ina_k)) - \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) \exp(-int) dt \\ &= -\frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) \exp(-int) dt = \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(t) \exp(-int) dt \end{aligned}$$

puisque f est 2π -périodique et $c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} a_n(f) &= c_{-n}(f) + c_n(f) = \frac{c_n(f') - c_{-n}(f')}{in} = -\frac{b_n(f')}{n} \\ b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{c_{-n}(f') + c_n(f')}{n} = \frac{a_n(f')}{n} \end{cases}.$$

Remarque 4.1 Avec les notations et hypothèses précédentes, on a :

$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = 0$$

puisque f est 2π -périodique. Donc la relation $c_n(f') = in c_n(f)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5 Problèmes d'approximation

Exercice 8 Montrer que pour tout entier naturel n les fonctions :

$$t \mapsto (\cos(t))^n \text{ et } t \mapsto (\sin(t))^n$$

sont des polynômes trigonométriques.

Correction :

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n . On note $P = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la forme :

$$P : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Montrons maintenant le résultat par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. En supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} (\cos(t))^{n+1} &= (\cos(t))^n \cos(t) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \cos(t) \\ &= a_0 \cos(t) + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) \cos(t) + b_k \sin(kt) \cos(t)) \end{aligned}$$

avec :

$$\cos(kt) \cos(t) = \frac{\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

et :

$$\sin(kt) \cos(t) = \frac{\sin((k+1)t) + \sin((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

pour $k \geq 1$, ce qui entraîne $(\cos(t))^{n+1} \in \mathcal{P}$.

On procède de même pour $(\sin(t))^n$.

On peut aussi utiliser les exponentielles complexes et la formule du binôme pour écrire :

$$(\cos(t))^n = \frac{(\exp(it) + \exp(-it))^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \exp(ikt) \exp(-i(n-k)t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \exp(i(2k-n)t)$$

et :

$$(\cos(t))^n = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k \exp(i(2k-n)t) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n} \cos((2k-n)t) \in \mathcal{P}_n.$$

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

2. Montrer que pour tous réels a, b, t , on a :

$$|a \cos(t) + b \sin(t)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Montrer que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

Correction :

1. Dans le cas où $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace des suites réelles de carré sommable nous dit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sqrt{a_n(f')^2 + b_n(f')^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f')^2 + b_n(f')^2)} \end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ et de l'égalité de Parseval (voir dernière section) appliquée à la fonction $f' \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}$$

(on rappelle que $a_0(f') = 0$).

2. Si $a^2 + b^2 = 0$, c'est évident, sinon il existe un réel θ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta) \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta)$$

(puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$) et :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(t) = \cos(\theta) \cos(t) + \sin(\theta) \sin(t) = \cos(\theta - t) \in [-1, 1].$$

On peut aussi écrire que :

$$a \cos(t) + b \sin(t) = a \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} + b \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \frac{a - ib}{2} \exp(it) + \frac{a + ib}{2} \exp(-it)$$

et :

$$|a \cos(t) + b \sin(t)| \leq \left| \frac{a - ib}{2} \right| + \left| \frac{a + ib}{2} \right| \leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Comme $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{a_0(f)}{2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

6 Un exemple d'espace préhilbertien

Exercice 10 Montrer que la série trigonométrique $\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être

la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.

Correction : Le théorème d'Abel nous assure la convergence de la série trigonométrique pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ cette série est nulle. Si cette série est la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$, cela signifie que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et le théorème de Bessel nous dit que la série

$\sum (b_n(f))^2 = \sum \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui n'est pas vrai. On peut en fait remplacer la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par n'importe quelle suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum u_n^2 = +\infty$.

7 Théorème de Parseval

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π -périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f .

3. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Correction :

1. f est impaire donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} (1) \sin(nt) dt = 2 \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$ donc

$$b_{2p}(f) = 0 \text{ et } b_{2p+1}(f) = \frac{4}{(2p+1)\pi} \text{ (on a utilisé : } \int_0^T = \int_0^{2\pi} = \int_x^{x+T} = \int_{-\pi}^{\pi} \text{ en posant } x = -\pi).$$

On en déduit que $S_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)x)$.

2. D'après le théorème de Dirichlet, la fonction f étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$, ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)x) = f(x).$$

Si $x_0 \neq k\pi$ (x_0 n'est pas un point de discontinuité), $S(x) = f(x)$, et si $x_0 = k\pi$ (x_0 est un point de discontinuité), étant donné que $f(x^+) = f(\pi^+) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 1$ et $f(x^-) = f(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -1$,

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0.$$

3. La convergence simple de la série de Fourier vers $f(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$ (qui n'est pas un point de discontinuité) donne :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}{(2p+1)\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

L'égalité de Parseval donne $\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{(2p+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ existe et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Ensuite, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π -périodique, paire, telle que $\forall x \in [0, \pi], f(x) = x$.

1. Calculer la série de Fourier de f .
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f .

3. Déterminer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$

4. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$

Correction :

1. Puisque f est paire : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$. Ensuite,

• $a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^0 (-t) dt + \int_0^{\pi} (t) dt \right) \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$

• Pour $n \geq 1$: $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{n^2 \pi} [\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi}.$

Donc, $a_{2k}(f) = 0, \forall k \geq 1$ et $a_{2k+1}(f) = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi}, \forall k \geq 0.$

Par suite, $S_n(x) = a_0(f) + \sum_{p=1}^n a_p(f) \cos(px) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$

2. f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc d'après le théorème de Dirichlet, $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = f(x).$$

3. Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Par la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = 2a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}(f)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ existe et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De même, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, impaire et vérifiant $f(t) = \frac{\pi-t}{2}$ sur $]0, \pi]$.

1. Justifier que f est développable en série de Fourier et former ce développement.

2. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction :

1. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier. $a_n(f) = 0$ et, par intégration par parties, $b_n(f) = \frac{1}{n}$. Le développement en série de Fourier de f s'écrit

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

2. Pour $t = 1$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

3. Par la formule de Parseval on a $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)^2}{4} dt = \frac{1}{6\pi} [-(\pi-t)^3]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14 Pour $\theta \in]0, \pi[$, calculer de deux manières la partie réelle de $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt$ afin d'en

déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Correction : D'une part $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt = \int_0^1 \frac{\exp(i\theta)}{1-t \exp(i\theta)} dt = \int_0^1 \frac{1}{\exp(-i\theta)-t} dt$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale.

• Ensuite,

$$\operatorname{Re} \int_0^1 \frac{dt}{\exp(-i\theta)-t} = \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{\exp(-i\theta)-t}{|\exp(-i\theta)-t|^2} dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta)-t}{(\cos(\theta)-t)^2 + \sin^2(\theta)} dt = -\ln(2 \sin(\theta/2)).$$

- D'autre part $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^N t^n \exp(i(n+1)\theta) dt + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt = \sum_{n=0}^N \frac{\exp(i(n+1)\theta)}{n+1} + \varepsilon_N$$

avec $|\varepsilon_N| = \left| \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^{N+1} \exp(i(N+2)\theta)}{1-t \exp(i\theta)} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{m_\theta} dt = \frac{1}{m_\theta(N+2)} \xrightarrow{N \rightarrow 0} 0$ où $m_\theta = \min\{|1-t \exp(i\theta)| | t \in [0, 1]\} > 0$. Ainsi

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(i(n+1)\theta)}{n+1}$$

puis

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta) dt \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

et enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Exercice 15 α désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et f la fonction 2π -périodique définie sur $] - \pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Étudier la série de Fourier de f ainsi que sa convergence.
2. Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$?

3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$.

4. Justifier et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

Correction :

1. La fonction f est paire donc $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$. On obtient $a_0(f) = \frac{2\alpha}{\pi}$ et $a_n(f) = \frac{2 \sin(n\alpha)}{n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La série de Fourier est alors

$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha) \cos(nt)}{n}.$$

En vertu du théorème de Dirichlet, celle-ci converge en tout point vers la régularisée de f car la fonction f est de classe C^1 par morceaux. Puisque la régularisée de f n'est pas continue, cette convergence ne peut pas être uniforme.

2. La régularisée de f prend respectivement les valeurs 1 et 1/2 en 0 et α .
3. Par la formule de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = 2a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2$$

On en déduit après calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

4. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car continue, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. En découpant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \left[\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right] dt.$$

On a $\varphi'(t) = \frac{2 \sin(t)}{t^3} (t \cos(t) - \sin(t))$. Puisque φ' est continue et puisque

$$t^{3/2} \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } t^{3/2} \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall t \in]0, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{t^{3/2}}$ et en particulier

$$\forall t \in [n\alpha, (n+1)\alpha], |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\left| \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt \right| \leq \int_0^\alpha t \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}} dt = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}} M$$

puis

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt \right| \leq M\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = C\sqrt{\alpha}.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi - \alpha}{2} + O(\sqrt{\alpha})$ et quand $\alpha \rightarrow 0^+$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16

- On note g la fonction 2π -périodique définie par $g(t) = \pi - t$ sur $[0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de g .
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π -périodique. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt.$$

- Établir que l'identité est encore vraie pour f seulement continue par morceaux.

Correction :

- En représentant la fonction g , on peut voir qu'à la valeur en 0 $[2\pi]$ près, cette fonction est impaire. Par suite $a_n(g) = 0$ et $b_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \sin(nt) dt = \frac{2}{n}$.
- Puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f est développable en série de Fourier et donc

$$\forall t \in [0, 2\pi], f(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

De plus, il y a convergence normale de cette série de Fourier. On a alors

$$\forall t \in [0, 2\pi], (\pi - t)f(t) = a_0(f)(\pi - t) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\pi - t)(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

avec convergence normale de la série de fonctions sous-jacente. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$ cette série de fonctions continues et ainsi obtenir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t) dt = \frac{a_0(f)}{2\pi} (\pi - t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt + \frac{b_n(f)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt \right).$$

En reconnaissant les coefficients de Fourier de g déjà calculés

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n}.$$

- Par polarisation

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} (f(t) + g(t))^2 dt - \int_0^{2\pi} (f(t) - g(t))^2 dt \right).$$

Exercice 17

Soit $t \in]-1, 1[$. Former le développement en série de Fourier de

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - 2t \cos(x) + t^2}.$$

Correction :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{1 - 2t \cos(x) + t^2} &= \frac{a}{t - \exp(ix)} + \frac{\bar{a}}{t - \exp(-ix)} \quad (\text{avec } a = \frac{\sin(x)}{\exp(ix) - \exp(-ix)} = \frac{1}{2i}) \\ &= \operatorname{Re} \left(i \exp(-ix) \frac{1}{1 - t \exp(-ix)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin((n+1)x). \end{aligned}$$

La fonction étudiée étant impaire, $a_n(f) = 0$. Par convergence normale obtenue via $|t| < 1$, on a $b_{n+1}(f) = t^n$. Ainsi l'écriture précédente est le développement en série de Fourier de la fonction étudiée.

Exercice 18 Former le développement en série de Fourier de $x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$.

Correction :

$\exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(inx)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cos(nx)$. Il reste à justifier que ce développement correspond au développement en série de Fourier de la fonction. Puisque la fonction est paire, $b_n(f) = 0$. On a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cos(nx) dx.$$

Par convergence normale de la série de fonctions engagée,

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n!} \cos(nx) dx = 2.$$

On a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \cos(mx) \cos(nx) dx.$$

Par convergence normale de la série de fonctions engagée,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m!} \cos(mx) \cos(nx) dx.$$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0$ si $m \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi$ si $m = n \neq 0$. Ainsi $a_n(f) = \frac{1}{n!}$.

Finalement, l'écriture

$$\exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cos(nx)$$

est bien le développement en série de Fourier de la fonction considérée.

Exercice 19 Pour $|z| < 1$, calculer $\int_0^{\pi} \frac{1 - z \cos(t)}{1 - 2z \cos(t) + z^2} \cos(nt) dt$.

Correction :

$$\frac{1 - z \cos(t)}{1 - 2z \cos(t) + z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \exp(it)z} + \frac{1}{1 - \exp(-it)z} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (\exp(int) + \exp(-int)) z^n \text{ puis}$$

$$\frac{1 - z \cos(t)}{1 - 2z \cos(t) + z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) z^n$$

avec convergence normale sur $[0, \pi]$. Par suite,

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - z \cos(t)}{1 - 2z \cos(t) + z^2} \cos(nt) = \frac{\pi}{2} z^n$$

compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $t \mapsto \cos(kt)$.

Références

- [1] JACQUELINE LELONG-FERRAND, JEAN-MARIE ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*
- [2] JEAN-ETIENNE ROMBALDI. *Séries entières.*
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap14.pdf>