**Fiche de Mathématiques 9 -** Séries de Fourier.

# 1 Séries trigonométriques

**Définition 1.1** *On appelle série trigonométrique toute série dont le terme général est de la forme :*

$$u_n = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \ (x \in \mathbb{R})$$

*où $(a_n)$ et $(b_n)$ désignent deux suites de nombres réels ou complexes.*

On adoptera la convention $b_0 = 0$.
Lorsque les coefficients $a_n$ et $b_n$ sont complexes, on écrit souvent la série $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ sous la forme d'une série à double entrée $\sum_n c_n \exp(inx)$.

**Proposition 1.1** *Si les séries $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique*

$$\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

*est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue de $x$ sur $\mathbb{R}$. C'est le cas des séries :*

$$\sum_n \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad \sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad \sum_n \frac{\exp(inx)}{n!}.$$

**Proposition 1.2** *Application de la règle d'Abel.*
*Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de nombres positifs tendant vers zéro en décroissant. Alors la série trigonométrique $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, et sa convergence est uniforme sur chaque intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ quels que soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$. Sa somme est donc une fonction continue de $x$ sur $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.*

**Proposition 1.3** *Périodicité.*
*Si la série $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge en un point $x$ de $\mathbb{R}$, elle converge aussi au point $x + 2k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et sa somme :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

*vérifie $S(x + 2k\pi) = S(x)$.*

**Proposition 1.4** *Continuité.*
*La somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle sur lequel cette série converge uniformément.*

**Proposition 1.5** *Dérivabilité.*
*Si la série obtenue par dérivation terme à terme $\sum_n (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$ est uniformément convergente sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, sa somme est la dérivée de la fonction*

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

*sur l'intervalle $I$ (en supposant que $S$ soit définie sur $I$).*

**Proposition 1.6** *Expression des coefficients.*
*Si* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$*, les coefficients* $a_p$ *et* $b_p$ *de la série trigonométrique* $\sum_n(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ *sont définis par*

- $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)$,
- $a_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(px)S(x)$ *si* $p > 0$,
- $b_p = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(px)S(x)$ *si* $p > 0$.

*Si la série est donnée sous forme complexe, soit* $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\exp(inx)$*, on obtient*

- $c_p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S(x)\exp(-ipx)dx$.

**Proposition 1.7** *Séries trigonométriques associées à une série entière.*
*Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière dont le rayon de convergence* $R$ *soit non nul. On sait que pour tout* $r \in ]0, R[$*, la série* $\sum_n a_n r^n$ *est convergente donc,* $r$ *étant fixé, la série trigonométrique* $\sum_n a_n r^n\exp(inx)$ *est normalement convergente pour* $x \in \mathbb{R}$ *et sa somme est évidemment égale à* $f(r\exp(ix))$.

## 2 Coefficients de Fourier

Le problème des séries de Fourier est, en quelque sorte, la réciproque du problème de sommation des séries trigonométriques : une fonction périodique, de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$ étant donnée, existe t-il une série trigonométrique dont elle soit la somme ?

Si la fonction $f$ est égale à la somme $S$ d'une série trigonométrique, et si la convergence de cette série est uniforme sur $\mathbb{R}$, les coefficients de cette série sont donnés par les formules de la Proposition 1.6. Il est donc naturel d'associer à $f$ les coefficients donnés par ces formules.

**Définition 2.1** *Soit* $f$ *une fonction numérique ou complexe de période* $2\pi$ *sur* $\mathbb{R}$*, intégrable sur tout intervalle compact. Les coefficients de Fourier de* $f$ *sont les nombres* $a_n(f), b_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ *définis par les relations :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

*et la série de Fourier de* $f$ *est la série trigonométrique*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)).$$

**Proposition 2.1** *Calcul pratique.*
*Les notations étant celles de la Définition 2.1, on a pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *:*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

*En particulier, on a*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Ces relations sont particulièrement intéressantes lorsque $f$ est une fonction paire ou impaire.

**Proposition 2.2** *On conserve les notations de la Définition 2.1. Si la fonction* $f$ *est paire (i.e. vérifie* $f(x) = f(-x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ et } b_n(f) = 0.$$

*Si la fonction* $f$ *est impaire (i.e. vérifie* $f(x) = -f(-x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0 \ \textit{et}\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

**Proposition 2.3** *Forme complexe de la série de Fourier.*
*Les hypothèses étant celles de la Définition 2.1, on appellera coefficients de Fourier de type complexe de la fonction $f$ les nombres $c_n(f)$ ($n \in \mathbb{Z}$) définis par :*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-inx)dx.$$

*Cela étant, la série de Fourier de $f$ est la série $\sum_n c_n(f)\exp(inx)$ et on peut écrire :*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\exp(inx).$$

# 3 Règles de convergence

Pour étudier la convergence des séries de Fourier, on utilise la

**Proposition 3.1** *Lemme de Lebesgue.*
*Soit $f$ une fonction numérique ou complexe intégrable sur l'intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale*

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\exp(i\lambda x)dx$$

*tend vers zéro lorsque le nombre réel $\lambda$ tend vers l'infini.*

**Corollaire 3.1** *Si $f$ est une fonction localement intégrable, de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$, les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ constituées par ses coefficients de Fourier tendent vers zéro.*

**Proposition 3.2** *Règle de Dirichlet.*
*Soit $f$ une fonction numérique ou complexe de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle compact et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent. Pour que la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, il suffit que le rapport*

$$\frac{1}{u}[f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)]$$

*reste borné au voisinage de $u = 0$ ($u \in \mathbb{R}^\star$).*

**Proposition 3.3** *Règle pratique.*
*Soit $f$ une fonction numérique ou complexe de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle borné et soit $x$ un point tel que les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent. Si $f$ admet en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sa série de Fourier au point $x$ converge vers*

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

*En particulier, la série de Fourier de $f$ converge vers $f(x)$ en tout point $x$ où $f$ est continue et dérivable.*

**Définition 3.1** *Cas particulier important.*
*Soit $f$ une fonction numérique ou vectorielle définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Nous dirons que $f$ est continue par morceaux (resp. dérivable par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une subdivision $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de $f$ à chacun des intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ ($1 \leq k \leq n$) coïncide avec la restriction d'une fonction continue (resp. dérivable) sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$.*

**Proposition 3.4** *Si $f$ est une fonction complexe de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux, sa série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point $x$ où $f$ est continue, et vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en ses points de discontinuité.*

**Proposition 3.5** *Soit $f$ une fonction numérique de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$ et monotone par morceaux (i.e. telle que chaque intervalle borné puisse être décomposé en une réunion finie d'intervalles sur chacun desquels $f$ soit monotone). Alors la série de Fourier de $f$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ (les hypothèses faites sur $f$ entraînant l'existence de ces limites).*

**Exercice 1** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, $2\pi$-périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

**Exercice 2** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de $f$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$.

**Exercice 3** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-périodique définie par

$$\forall x \in ]-\pi, \pi],\ f(x) = \exp(x).$$

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de $f$.
2. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

**Exercice 4** Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \cos(\alpha x) \text{ sur } ]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de $f$.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$.
3. En déduire enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 5** Soient $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de $f$.
2. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$.

# 4 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro

**Définition 4.1** *Convergence au sens d'Abel.*
*Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels ou complexes, telle que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n u_n z^n$ soit égal à 1. Pour tout $r \in [0, 1[$, posons*

$$f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^n.$$

*Si la fonction $f$ a une limite $S = \lim\limits_{r \to 1} f(r)$ au point $r = 1$, on dit que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge au sens d'Abel vers cette limite $S$.*

**Définition 4.2** *Convergence au sens de Cesaro.*
*Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, posons*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \qquad \sigma_n(f) = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}).$$

*Alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge en moyenne (ou au sens de Cesaro) vers le nombre $\sigma$ si la suite $(\sigma_n)$ tend vers $\sigma$.*

**Proposition 4.1** *Si la série* $\sum_n u_n$ *converge vers le nombre* $S$*, elle converge en moyenne vers* $S$*.*

Soit $f$ une fonction numérique ou complexe de période $2\pi$ et localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))$ sa série de Fourier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on posera :

- $S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$,
- $\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$, la $n$-ième somme de Cesaro associée à $f$.

**Théorème 4.1** *Application aux séries de Fourier.*
*Soit* $f$ *une fonction numérique ou complexe de période* $2\pi$ *sur* $\mathbb{R}$*, intégrable sur tout intervalle borné. Alors sa série de Fourier converge au sens de Cesaro vers* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ *en tout point* $x$ *de* $\mathbb{R}$ *où les limites* $f(x+0)$ *et* $f(x-0)$ *existent. En particulier, la suite* $\sigma_n(x)$ *associée à* $f$ *tend vers* $f(x)$ *en tout point de continuité de* $f$*. Cette convergence est uniforme sur tout intervalle compact* $K$ *tel que* $f$ *soit continue en tout point de* $K$*.*

**Corollaire 4.1** *Si les coefficients de Fourier d'une fonction continue* $f$ *sont tous nuls,* $f$ *est la fonction nulle.*

Une fonction continue est donc entièrement déterminée par la donnée de ces coefficients de Fourier.

**Exercice 6** On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de Dirichlet, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont $2\pi$-périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité $a$ de $f$, on ait :

$$f(a) = \frac{f(a^-)+f(a^+)}{2}.$$

Soient $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$ définie par $g(x) = f(x+a)$ où $a$ est un réel fixé. Exprimer les coefficients de Fourier de $g$ en fonction de ceux de $f$.

**Exercice 7** Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^\star,\ c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}.$$

# 5 Problèmes d'approximation

**Définition 5.1** *Un polynôme trigonométrique est une fonction* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de la forme*

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \tag{1}$$

*où les* $a_k$ *et* $b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *désignent des nombres réels ou complexes et* $n$ *un entier quelconque. Si l'un des coefficients* $a_n(f)$*,* $b_n$ *est non nul, le polynôme trigonométrique* $P$*, défini par (1) est dit d'ordre* $n$*. Dans le cas général,* $P$ *est donc d'ordre au plus égal à* $n$*.*

Un polynôme trigonométrique d'ordre au plus égal à $n$ peut aussi s'écrire sous la forme complexe :

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx), \tag{2}$$

où $c_{-n}, \ldots, c_n$ désignent $2n+1$ coefficients réels ou complexes.

**Proposition 5.1** *Soit* $f$ *une fonction numérique ou complexe continue et de période* $2\pi$ *sur* $\mathbb{R}$*. Alors, quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe un polynôme trigonométrique* $P_\varepsilon$ *vérifiant* $|P_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

**Théorème 5.1** *Théorème de Weierstrass.*
*Soit* $f$ *une fonction numérique ou complexe continue sur un intervalle compact* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$*. Quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$*, il existe un polynôme* $Q_\varepsilon \in \mathbb{C}[X]$ *tel que pour tout* $x \in [a,b]$ *on ait :* $|Q_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$*.*

Toute fonction complexe continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ pouvait être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques ou de véritables polynômes.

**Exercice 8** Montrer que pour tout entier naturel $n$ les fonctions :

$$t \mapsto (\cos(t))^n \text{ et } t \mapsto (\sin(t))^n$$

sont des polynômes trigonométriques.
*Corection* :
Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à $n$. On note $P = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la forme :

$$P : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Montrons maintenant le résultat par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. En supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}(\cos(t))^{n+1} &= (\cos(t))^n\cos(t) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))\right)\cos(t)\\ &= a_0\cos(t) + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos(kt)\cos(t) + b_k\sin(kt)\cos(t))\end{aligned}$$

avec :

$$\cos(kt)\cos(t) = \frac{\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

et :

$$\sin(kt)\cos(t) = \frac{\sin((k+1)t) + \sin((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

pour $k \geq 1$, ce qui entraîne $(\cos(t))^{n+1} \in \mathcal{P}$.
On procède de même pour $(\sin(t))^n$.
On peut aussi utiliser les exponentielles complexes et la formule du binôme pour écrire :

$$(\cos(t))^n = \frac{(\exp(it) + \exp(-it))^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\exp(ikt)\exp(-i(n-k)t) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\exp(i(2k-n)t)$$

et :

$$(\cos(t))^n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\exp(i(2k-n)t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{2^n}\cos((2k-n)t) \in \mathcal{P}_n.$$

**Exercice 9** Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt}.$$

2. Montrer que pour tous réels $a, b, t$, on a :

$$|a\cos(t) + b\sin(t)| \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$

3. Montrer que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt\right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt}.$$

# 6 Un exemple d'espace préhilbertien

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et intégrables au sens de Riemann (donc bornées). Chaque fonction $f\in\mathcal{E}$ peut être prolongée en une fonction périodique de période $2\pi$, à condition de modifier au besoin ses valeurs aux points $\pm\pi$, de façon à avoir $f(\pi)=f(-\pi)$. On peut donc définir les coefficients de Fourier et la série de Fourier de $f$. Le produit scalaire $(f|g)$ de deux éléments quelconques $f,g$ de $\mathcal{E}$ sera défini par

$$(f|g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{3}$$

et, pour tout $f\in\mathcal{E}$, on pose :

$$\|f\|=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}=(f|f)^{1/2}, \tag{4}$$

l'application $f\mapsto\|f\|$ étant une semi-norme sur $\mathcal{E}$. Avec ces conventions, le produit scalaire défini par (3) détermine sur $E$ une structure d'espace préhilbertien.

**Théorème 6.1** *Le polynôme de Fourier d'indice $n$ d'une fonction $f\in\mathcal{E}$ est caractérisé par la propriété suivante : c'est le polynôme trigonométrique $P$ d'ordre au plus égal à $n$, qui réalise le minimum de l'écart quadratique moyen défini par :*

$$\|f-P\|=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|P(x)-f(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

**Proposition 6.1** *Inégalité de Bessel.*
*Si $f$ est une fonction numérique ou complexe intégrable sur $[-\pi,+\pi]$, ses coefficients de Fourier de type complexe $(c_n(f))$ vérifient pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'inégalité dite de Bessel :*

$$\sum_{k=-n}^{+n}|c_k(f)|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx. \tag{5}$$

*En conséquence, la série à double entrée $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$ est convergente et vérifie l'inégalité*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx. \tag{6}$$

**Exercice 10** Montrer que la série trigonométrique $\displaystyle\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction $f\in\mathcal{D}$.

# 7 Théorème de Parseval

**Théorème 7.1** *Si $f$ est une fonction numérique ou complexe intégrable sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$ ses coefficients de Fourier ordinaires $(a_n(f),b_n(f))$ et ses coefficients de Fourier de type complexe $(c_n(f))$ vérifient les relations :*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\pi\left(\frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2)\right). \tag{7}$$

**Exercice 11** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction régularisée, $2\pi$-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0,\pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers $f$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

**Exercice 12** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application $2\pi$-périodique, paire, telle que $\forall x\in[0,\pi]$, $f(x)=x$.

1. Calculer la série de Fourier de $f$.
2. Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de $f$.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

**Exercice 13** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $2\pi$-périodique, impaire et vérifiant $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi]$.

1. Justifier que $f$ est développable en série de Fourier et former ce développement.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 14** Pour $\theta \in ]0, \pi[$, calculer de deux manières la partie réelle de $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \exp(i(n+1)\theta)dt$ afin d'en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

**Exercice 15** $\alpha$ désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Étudier la série de Fourier de $f$ ainsi que sa convergence.
2. Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$ ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$.
4. Justifier et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

**Exercice 16**

1. On note $g$ la fonction $2\pi$-périodique définie par $g(t) = \pi - t$ sur $[0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de $g$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $2\pi$-périodique. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt.$$
3. Établir que l'identité est encore vraie pour $f$ seulement continue par morceaux.

**Exercice 17** Soit $t \in ]-1, 1[$. Former le développement en série de Fourier de

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2}.$$

**Exercice 18** Former le développement en série de Fourier de $x \mapsto \exp(\cos(x)) \cos(\sin(x))$.

**Exercice 19** Pour $|z| < 1$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 - z\cos(t)}{1 - 2z\cos(t) + z^2} \cos(nt) dt$.

# Références


[1] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Tome 2, Analyse, 4ème édition.*

[2] Jean-Etienne ROMBALDI. *Séries entières.* http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rombaldi/Capes/AnalyseChap14.pdf