Master 2 LT, MPM, MIR **Pôle Lamartine - ULCO**

Recherche Opérationnelle Mercredi 06 Novembre 2013 - Contrôle Terminal - Session 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Documents interdits. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 - *Correction* : 5pts

Dans cet exercice, x et y décrivent respectivement les nombres de lots A et de lots B que souhaite acheter le gérant.

1. 1pt On a le système (S) d'inéquations suivant :

$$(\text{S}) \begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2x + 3y \geq 90 & (3) \\ 4x + 12y \geq 240 & (4) \\ 8x + 6y \geq 240 & (5) \end{cases}$$

2. 1pt On donne ci-dessous le domaine $(\mathcal{D})$ des solutions réalisables :

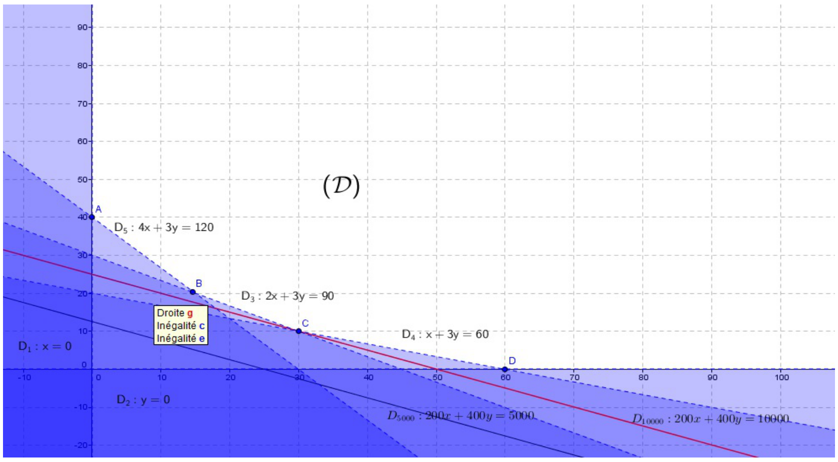


FIGURE 1 – Domaine des solutions réalisables

On a posé :

$$D_1 := x = 0,\ D_2 : y = 0,\ D_3 : 2x + 3y = 90,\ D_4 : 4x + 12y = 240,\ D_5 : 8x + 6y = 240.$$

Pour chacune des inégalités de (S), on considère un point test n'appartenant pas à la droite associée et on observe si les coordonnées du point vérifient cette inégalité. Si ce n'est pas le cas, on se trouve dans la mauvaise région du plan (le mauvais demi-plan), qu'on hachure. Le domaine des solutions réalisables est l'intersection des bons demi-plans.

3. 0,5pt La dépense Z en euros occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B est donnée par

$$Z(x, y) = 200x + 400y.$$

On notera D_Z la droite d'équation $D_Z : 200x + 400y - Z = 0$.

4. 0,5pt Procéder aux achats nécessaires avec 5000€ revient à s'assurer que le demi-plan

$$200x + 400y \leq 5000 \text{ de frontière } D_{5000} : 200x + 400y = 5000$$

contienne un point au moins du domaine des solutions réalisables. Graphiquement, on constate que ce n'est pas le cas. Cependant, on souhaite s'en assurer par le calcul. On a

$$200x + 400y - 5000 \leq 0 \Leftrightarrow x + 2y \leq 25 \Leftrightarrow x \leq 25 - 2y.$$

Tout point $M(x, y)$ appartenant au demi-plan vérifie donc la relation $x \leq 25 - 2y$. Or, d'après l'inégalité (3), on note que $x \geq 45 - \frac{3}{2}y$ ce qui est contradictoire avec la contrainte précédente dans le quart de plan nord-est. On obtiendra le même type de contradiction avec les inégalités (4) et (5). Conclusion, on ne peut procéder aux achats nécessaires avec 5000€.

5. On cherche le nombre de lots A et de lots B à acheter, permettant de satisfaire aux contraintes de (S) et de minimiser la dépense Z. On doit donc résoudre le programme linéaire (PL) suivant :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2x + 3y \geq 90 & (3) \\ 4x + 12y \geq 240 & (4) \\ 8x + 6y \geq 240 & (5) \\ \text{Maximiser } Z(x,y) = 200x + 400y & \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Puisque l'équation de D_Z peut se réecrire sous la forme réduite suivante :

$$D_Z : y = -\frac{200}{400}x + \frac{Z}{400} = -\frac{1}{2}x + \frac{Z}{400},$$

minimiser Z (qui revient à minimiser $\frac{Z}{400}$) équivaut à minimiser l'ordonnée à l'origine de D_Z.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $\vec{u} = \begin{pmatrix} -400 \\ 200 \end{pmatrix}$, ou plus simplement $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_Z, il suffit de trouver la droite D_Z, portée par $\vec{v}$, qui contient au moins un point du domaine des solutions réalisables $\mathcal{D}$ et qui minimise l'ordonnée à l'origine.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Cette droite passe par le point $C = D_3 \cap D_4$ dont les coordonnées (x_C, y_C) vérifient le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x_C + 3y_C = 90 & (L_1) \\ 4x_C + 12y_C = 240 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_C + 3y_C = 90 \\ 6y_C = 60 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_C = 30 \\ y_C = 10 \end{array} \right.$$

6. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La dépense minimale est donc atteinte en achetant 30 lots A et 10 lots B et se monte à $Z(30,10) = 10000$€.

Exercice 2 - *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ On transforme dans un premier temps le programme linéaire donné sous sa forme standard. On introduit pour cela 3 variables d'écart e_1, e_2, e_3 positives. Les 6 variables x, y, z, e_1, e_2, e_3 doivent alors vérifier le programme linéaire suivant :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{l} x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z + e_1 = 120 \\ \frac{1}{2}x + z + e_2 = 120 \\ 2x + y + z + e_3 = 120 \\ \text{Maximiser } Z(x,y,z) = 35x + 45y + 42z \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$+$\boxed{\text{1pt}}$ Le triplet $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est une solution admissible car il vérifie toutes les contraintes de (PL). On peut donc démarrer l'algorithme du simplexe en considérant une production nulle, et remplir le "tableau initial" de l'annexe B :

VHB / VDB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C	
e_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	120	$120/(3/2) = 80$	$(L_p) \leftarrow (L_p)/(3/2)$
e_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	0	120	$120/0 \simeq \infty$	(L_{e_2})
e_3	2	1	1	0	0	1	120	$120/1 = 120$	$(L_{e_3}) \leftarrow (L_{e_3}) - \frac{2}{3}(L_p)$
Z	35	45	42	0	0	0	0	–	$(L_Z) \leftarrow (L_Z) - 30(L_p)$

TABLE 1 – Tableau initial

$\boxed{\text{0,5pt}}$+$\boxed{\text{1pt}}$ D'après la règle du plus grand gain marginal, la variable y entre en base. On calcule alors les rapports $\frac{\text{cste}_i}{y_i}$ qu'on inscrit dans la colonne C du tableau précédent. La variable e_1 sort de base puisqu'elle est associée à la valeur la plus petite. Il faut ensuite à l'aide de combinaisons linéaires sur les lignes transformer la colonne associée à la variable y, c'est-à-dire $(\frac{3}{2}, 0, 1, 45)$, en la colonne $(1, 0, 0, 0)$. Ces combinaisons sont indiquées sur la droite du tableau précédent. On peut maintenant remplir le tableau 2 de l'annexe B :

VDB \ VHB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C	
y	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	80	$80/(2/3) = 120$	$(L_y) \leftarrow (L_y) - \frac{1}{2}(L_p)$
e_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	0	120	$120/(1/2) = 240$	$(L_{e_2}) \leftarrow (L_{e_2}) - \frac{3}{8}(L_{e_3})$
e_3	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	40	$120/4 = 30$	$(L_p) \leftarrow (L_p)/(4/3)$
Z	5	0	-3	-30	0	0	-3600	–	$(L_Z) \leftarrow (L_Z) - \frac{15}{4}(L_{e_3})$

TABLE 2 – Tableau 2

$\boxed{0{,}5\text{pt}}+\boxed{1\text{pt}}$ La variable x entre en base au détriment de e_3 qui sort de base. On obtient le tableau 3 :

VDB \ VHB	x	y	z	e_1	e_2	e_3	cste	C
y	0	1	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	60	
e_2	0	0	1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{8}$	105	
x	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	30	
Z	0	0	-3	$-\frac{55}{2}$	0	$-\frac{15}{4}$	-3750	–

TABLE 3 – Tableau 3

$\boxed{1\text{pt}}$ Les coefficients dans la ligne L_Z étant tous négatifs, l'algorithme s'arrête. En lisant attentivement le dernier tableau, on constate que $y = 60$, $e_2 = 105$, $x = 30$ et $Z = 3750$. Les variables z, e_1 et e_3 sont hors-base donc nulles.

Exercice 3 $\boxed{5\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ La relaxation linéaire du programme linéaire (PNE) de l'exercice est la suivante

$$(\text{PL}) \begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 25 \\ 2x_1 + 12x_2 \leq 43 \\ 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ \text{Maximiser } Z(x_1, x_2) = 9x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

On note $D_1 : x_1 = 0$, $D_2 : x_2 = 0$, $D_3 : x_1 = 6$, $D_4 : 4x_1 + 2x_2 = 25$, $D_5 : 2x_1 + 12x_2 = 43$, $D_6 : 4x_1 - 4x_2 = 6$. Le polyèdre P associé à (PL), représentant le domaine des solutions réalisables, est donné à la figure 2 de la page suivante.

2. • $\boxed{1{,}5\text{pt}}$ La fonction objectif Z atteint son maximum en C dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 5 \\ 2x_1 + 12x_2 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{116}{28} \\ x_2 = \frac{81}{28} \end{cases} \quad (\text{nœud } 0)$$

Cette solution est bien-sûr inacceptable car les variables ne sont pas entières. Cependant, elle fournit une première borne supérieure sur $Z^\star_{PNE}$:

$$Z^\star_{PNE} \leq \frac{342}{7} \simeq 48,86.$$

Pour information, $x_1 \simeq 4,14$ et $x_2 \simeq 2,89$. Branchons maintenant sur une variable entière. On rappelle le critère de choix de la variable de branchement énoncée en cours :

"on prend la variable la plus distante d'un entier".

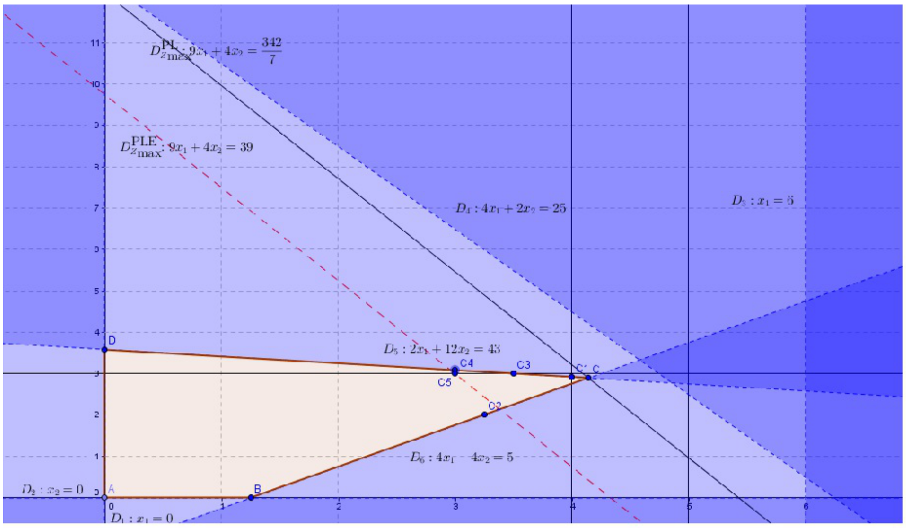


FIGURE 2 – Domaine des solutions réalisables associé à (PL)

Il s'agit donc dans l'exercice de la variable x_1. Comme x_1 ne peut prendre que des valeurs entières,

$$\text{soit } x_1 \leq 4, \text{ soit } x_1 \geq 5.$$

En imposant séparément l'une et l'autre conditions, on obtient deux sous-modèles, un modèle fils et un modèle fille. On va alors résoudre les relaxations linéaires correspondant aux problèmes fils et filles.

– Si $x_1 \leq 4$, on note d'après la méthode graphique que le point $C_1(4, \frac{35}{12})$ (nœud 1) permet à Z d'atteindre son maximum. En ce point, $Z = \frac{143}{3}$.
– Si $x_1 \geq 5$, la relaxation linéaire est non réalisable.

On a donc

$$Z^{\star}_{PNE} \leq \frac{143}{3} \simeq 47,67.$$

- $\boxed{\text{1pt}}$ La solution obtenue n'est toujours pas acceptable car elle comporte une partie fractionnaire. Il n'est pas nécessaire ici d'utiliser le critère de choix du nœud à diviser (qui porte sur la relaxation linéaire qui fournit la plus grande valeur de la fonction objectif) puisque nous n'avons qu'un nœud. La variable à brancher est maintenant x_2 car seule la variable x_2 est non entière. On opère donc le branchement suivant :

$$\text{soit } x_2 \leq 2, \text{ soit } x_2 \geq 3.$$

On résout les relaxations linéaires correspondant aux problèmes fils et filles.

– Si $x_2 \leq 2$, on note d'après la méthode graphique que le point $C_2(\frac{13}{4}, 2)$ (nœud 2) permet à Z d'atteindre son maximum. En ce point, $Z = \frac{149}{4}$.
– Si $x_2 \geq 3$, on note d'après la méthode graphique que le point $C_3(\frac{7}{2}, 3)$ (nœud 3) permet à Z d'atteindre son maximum. En ce point, $Z = \frac{87}{2}$.

On a donc

$$Z^{\star}_{PNE} \leq \frac{87}{2} = 43,5.$$

- $\boxed{\text{0,5pt}}$ Les solutions obtenues ne sont toujours pas acceptables car elles comportent des parties fractionnaires. On se concentre alors sur la relaxation linéaire qui fournit la plus grande valeur de la fonction objectif et donc le nœud 3. La variable à brancher est de ce fait x_1 puisque $x_2 \in \mathbb{N}$. On opère le branchement suivant :

$$\text{soit } x_1 \leq 3, \text{ soit } x_1 \geq 4.$$

On résout les relaxations linéaires correspondant aux problèmes fils et filles.

– Si $x_1 \leq 3$, on note d'après la méthode graphique que le point $C_4(3, \frac{37}{12})$ (nœud 4) permet à Z d'atteindre son maximum. En ce point, $Z = \frac{118}{3}$.
– Si $x_1 \geq 4$, la relaxation linéaire est non réalisable.

On a donc

$$Z^{\star}_{PNE} \leq \frac{118}{3} \simeq 39,33.$$

- $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ La solution obtenue n'est toujours pas acceptable car elle comporte une partie fractionnaire. La variable à brancher est maintenant x_2 car seule la variable x_2 est non entière. On opère donc le branchement suivant :

$$\text{soit } x_2 \leq 3, \text{ soit } x_2 \geq 4.$$

On résout les relaxations linéaires correspondant aux problèmes fils et filles.
  - Si $x_2 \leq 3$, on note d'après la méthode graphique que le point $C_5(3,3)$ (nœud 5) permet à Z d'atteindre son maximum. En ce point, $Z = 39$.
  - Si $x_2 \geq 4$, la relaxation linéaire est non réalisable.
- $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ La méthode est terminée puisqu'il n'existe plus de nœud à diviser. On détermine la solution optimale comme étant la meilleure solution entière trouvée. Il s'agit du point $C_5(3,3)$ auquel correspond une valeur optimale de l'objectif de $Z^\star_{PNE} = 39$.

On donne ci-dessous la disposition des différents points utilisés :

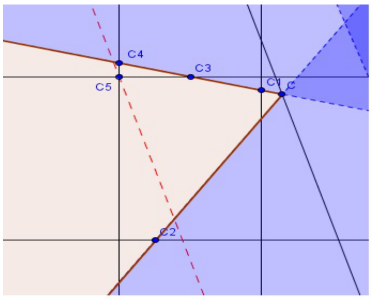


FIGURE 3 – Les différents nœuds du "Branch and Bound"

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{4\text{pts}}$

Le programme (PL) peut se réécrire sous la forme :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 - 9 \leq 0 \\ \text{Minimiser } f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \end{array} \right.$$

1. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ Le Lagrangien associé à ce programme est donné par :

$$L(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(x_1 + 3x_2 - 9).$$

Les fonctions contraintes g_k, $k = 1, 2$ sont toutes linéaires, on peut donc utiliser le lagrangien dans la résolution de notre programme d'optimisation sous contraintes (c'est ce qu'on appelle la condition de qualification des contraintes).

2. $\boxed{1\text{pt}}$ Si $(x_1^\star, x_2^\star, \lambda_1^\star, \lambda_2^\star)$ est une solution du programme (PL), alors

$$(\text{S}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^\star, x_2^\star) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^\star, x_2^\star) = 0 \\ g_1(x_1^\star, x_2^\star) \leq 0 \\ \lambda_1^\star \geq 0 \\ \lambda_1^\star g_1(x_1^\star, x_2^\star) = 0 \\ g_2(x_1^\star, x_2^\star) \leq 0 \\ \lambda_2^\star \geq 0 \\ \lambda_2^\star g_2(x_1^\star, x_2^\star) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2(x_1^\star - 4) + \lambda_1^\star + \lambda_2^\star & = & 0 \\ 2(x_2^\star - 4) + \lambda_1^\star + 3\lambda_2^\star & = & 0 \\ x_1^\star + x_2^\star & \leq & 4 \\ \lambda_1^\star & \geq & 0 \\ \lambda_1^\star(x_1^\star + x_2^\star - 4) & = & 0 \\ x_1^\star + 3x_2^\star & \leq & 9 \\ \lambda_2^\star & \geq & 0 \\ \lambda_2^\star(x_1^\star + 3x_2^\star - 9) & = & 0 \end{array} \right.$$

3. (a) $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^\star + x_2^\star = 4 \\ x_1^\star + 3x_2^\star = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^\star = \frac{3}{2} \\ x_2^\star = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Alors, les deux premières équations du système (S) se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\frac{3}{2} - 4) + \lambda_1^\star + \lambda_2^\star = 0 \\ 2(\frac{5}{2} - 4) + \lambda_1^\star + 3\lambda_2^\star = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^\star + \lambda_2^\star = 5 \\ \lambda_1^\star + 3\lambda_2^\star = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^\star = 6 \\ \lambda_2^\star = -1 \end{array} \right.$$

ce qui est incompatible avec le fait que $\lambda_2^\star \geq 0$. La situation de départ ne donne donc lieu à aucune solution.

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a

$$\begin{cases} x_1^\star + x_2^\star = 4 \\ x_1^\star + 3x_2^\star < 9 \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda_2^\star = 0$ (seule la première contrainte est saturée à l'optimum) d'après la 8-ième équation de (S). Ainsi, les deux premières équations de (S) impliquent que $x_1^\star = x_2^\star = 2$ et $\lambda_1^\star = 4$. Toutes les conditions sont satisfaites donc $(x_1^\star, x_2^\star, \lambda_1^\star, \lambda_2^\star) = (2, 2, 4, 0)$ est une solution possible.

(c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a

$$\begin{cases} x_1^\star + x_2^\star < 4 \\ x_1^\star + 3x_2^\star = 9 \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda_1^\star = 0$ (seule la seconde contrainte est saturée à l'optimum) d'après la 5-ième équation de (S). Alors, les deux premières équations de (S) impliquent que $x_1^\star = \frac{12}{5}$ et $x_2^\star = \frac{11}{5}$, ce qui contredit la condition $x_1^\star + x_2^\star < 4$. La situation de départ ne donne donc lieu à aucune solution.

(d) $\boxed{\text{0,5pt}}$ On a

$$\begin{cases} x_1^\star + x_2^\star < 4 \\ x_1^\star + 3x_2^\star < 9 \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda_1^\star = \lambda_2^\star = 0$ (aucune des contraintes n'est saturée à l'optimum) d'après les 5-ième et 8-ième lignes de (S). Ainsi, les deux premières équations de (S) impliquent que $x_1^\star = x_2^\star = 4$, ce qui contredit la condition $x_1^\star + x_2^\star < 4$. La situation de départ ne donne donc lieu à aucune solution.

4. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La fonction f est convexe (l'ensemble des points situés au dessus de son graphe est un ensemble convexe) et les deux contraintes de (PL) sont linéaires (région réalisable convexe). Le problème est donc convexe et les conditions de Kuhn et Tucker sont aussi suffisantes pour prouver qu'on est à l'optimum. Par conséquent,

$$(x_1^\star, x_2^\star, \lambda_1^\star, \lambda_2^\star) = (2, 2, 4, 0)$$

est un minimum global.
On représente graphiquement la solution de notre problème à la figure 4.

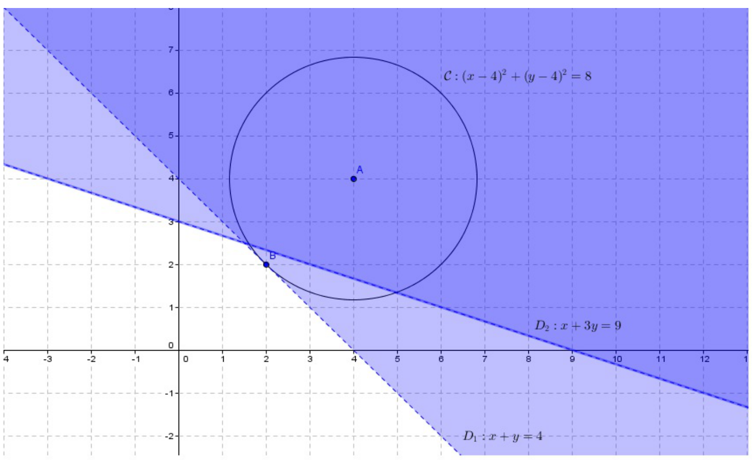
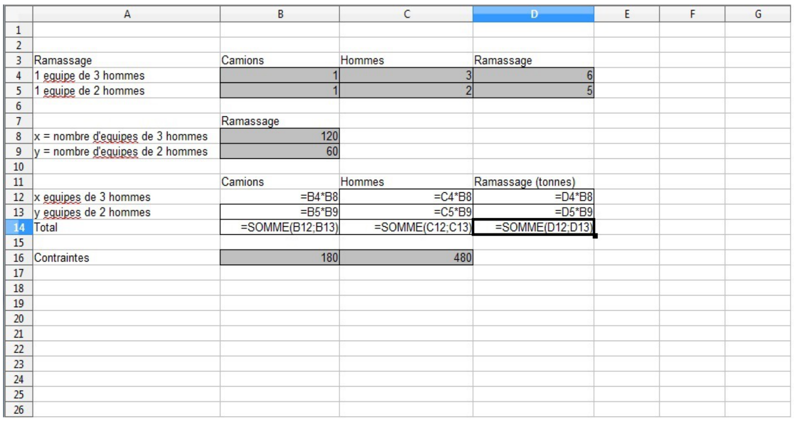


FIGURE 4 – Solution graphique du problème (PL)

Exercice 5 *Correction* : 2pts

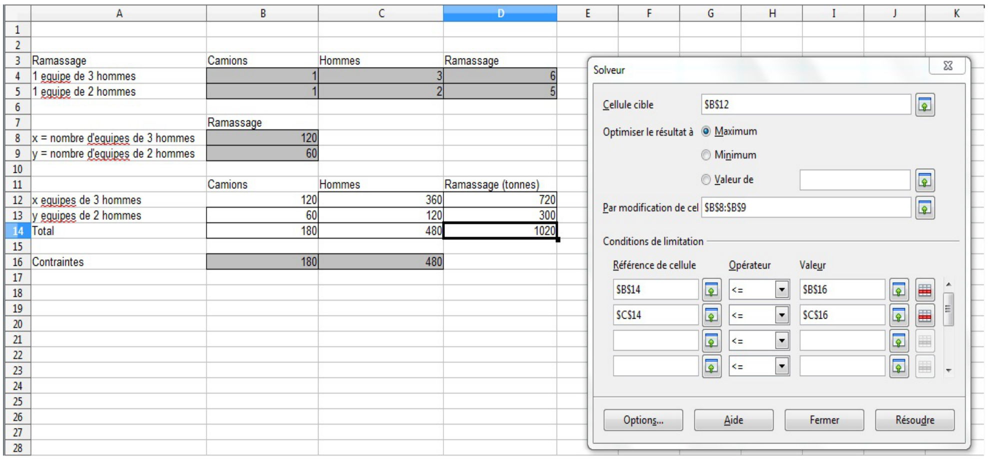
On remplit les cellules grisées et blanches comme mentionné sur la figure 5.



	A	B	C	D
3	Ramassage	Camions	Hommes	Ramassage
4	1 equipe de 3 hommes	1	3	6
5	1 equipe de 2 hommes	1	2	5
7		Ramassage		
8	x = nombre d'equipes de 3 hommes	120		
9	y = nombre d'equipes de 2 hommes	60		
11		Camions	Hommes	Ramassage (tonnes)
12	x equipes de 3 hommes	=B4*B8	=C4*B8	=D4*B8
13	y equipes de 2 hommes	=B5*B9	=C5*B9	=D5*B9
14	Total	=SOMME(B12;B13)	=SOMME(C12;C13)	=SOMME(D12;D13)
16	Contraintes	180	480	

FIGURE 5 – Capture d'écran 1 - Formules

On utilise ensuite le solveur d'Excel (ou d'OpenOffice.org Calc) qu'on remplit de la manière suivante (cf. figure 6) :



	A	B	C	D
3	Ramassage	Camions	Hommes	Ramassage
4	1 equipe de 3 hommes	1	3	6
5	1 equipe de 2 hommes	1	2	5
7		Ramassage		
8	x = nombre d'equipes de 3 hommes	120		
9	y = nombre d'equipes de 2 hommes	60		
11		Camions	Hommes	Ramassage (tonnes)
12	x equipes de 3 hommes	120	360	720
13	y equipes de 2 hommes	60	120	300
14	Total	180	480	1020
16	Contraintes	180	480	

FIGURE 6 – Capture d'écran 2 - Solveur et solution

Il faut donc former 120 équipes de 3 hommes et 60 équipes de 2 hommes pour collecter un maximum d'ordures à savoir 1020 tonnes.