IMBS3 - ISCID-CO, site de Dunkerque, 2015/2016

Mathématiques appliquées à la gestion - TESTS PARAMÉTRIQUES ET NON PARAMÉTRIQUES

Fiche de Mathématiques 3 - Test d'ajustement du χ^2.

Exercice 1 *Correction* :

On pose l'hypothèse H_0:"Le dé n'est pas truqué", ce qui revient à poser l'hypothèse que chaque face a la même probabilité d'apparaître (équiprobabilité). Si tel est le cas, en 60 jets, les effectifs théoriques attendus devraient être :

$$e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = e_6 = 60 \times \frac{1}{6} = 10.$$

On peut dresser le tableau suivant :

Face x_i	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif empirique n_i	15	7	4	11	6	17	60
Effectif théorique e_i	10	10	10	10	10	10	60
$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$	2,5	0,9	3,6	0,1	1,6	4,9	13,6

Tous les effectifs théoriques sont supérieurs ou égaux à 5 et la taille de l'échantillon ($N = 60$) est suffisante pour que nous puissions appliquer le test d'ajustement du χ^2. La quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$ est un χ^2 à $\nu = k - 1 = 5$ degrés de liberté. Sa valeur pour l'échantillon est $\chi^2_{obs} = 13,6$. Pour $\alpha = 0,05$, la valeur critique lue dans la table est $\chi^2_{lu} = 11,07$. Puisque $\chi^2_{obs} > \chi^2_{lu}$, on rejette l'hypothèse H_0, ce qui signifie qu'on peut considérer que le dé est truqué (ou que le joueur triche).

Exercice 2 *Correction* :

On pose l'hypothèse H_0 : "Les arrivées sont régies par une loi de Poisson de moyenne $m = 2$". On en déduit les effectifs théoriques $e_i = Np_i$ avec $N = 264$, les probabilités $p_i = p(X = x_i)$ étant calculées à l'aide de la loi de Poisson de paramètre $m = 2$.

Nombre de clients x_i	Effectif empirique n_i	Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	Effectif théorique Np_i	$\dfrac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
0	23	0,1353	35,7	4,53
1	75	0,2707	71,5	0,17
2	68	0,2707	71,5	0,17
3	51	0,1804	47,6	0,24
4	30	0,0902	23,8	1,61
Total	264	1	264	7,4
$\left.\begin{array}{c}5\\ \text{plus de }5\end{array}\right\}$ plus de 4	$\left.\begin{array}{c}10\\ 7\end{array}\right\}$ 17	$\left.\begin{array}{c}0,0361\\ 0,0166\end{array}\right\}$ 0,0527	$\left.\begin{array}{c}9,5\\ 4,4\end{array}\right\}$ 13,9	0,69

L'effectif théorique associé à un nombre de clients inférieur à 5 étant insuffisant relativement aux conditions de validité du test, il convient de fusionner les deux dernières lignes du tableau en une seule $x_i > 4$. La valeur du χ^2 observé calculé sur l'échantillon s'élève alors à 7,4 tandis que la valeur χ^2_{lu} lue dans dans la table au seuil $\alpha = 0,05$ et $\nu = k - 1 = 5$ ddl est égale à 11,07. Puisque $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$, on ne peut rejeter l'hypothèse H_0. Au seuil de 5%, on peut admettre que les arrivées des clients sont régies par la loi de Poisson de moyenne $m = 2$.

Exercice 3 *Correction* :

Pour tester l'ajustement d'une loi normale aux données de l'échantillon, il nous faut, pour en estimer les paramètres, calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon. D'où le tableau de calculs suivant :

Classe i	Centre de classe x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[5,5;6,5[$	6	2	12	72
$[6,5;7,5[$	7	3	21	147
$[7,5;8,5[$	8	12	96	768
$[8,5;9,5[$	9	27	243	2187
$[9,5;10,5[$	10	23	230	2300
$[10,5;11,5[$	11	15	165	1815
$[11,5;12,5[$	12	12	144	1728
$[12,5;13,5[$	13	5	65	845
$[13,5;14,5[$	14	2	28	392
$[14,5;15,5[$	15	2	30	450
Total	–	103	1034	10704

On a alors :

- $m = \dfrac{1304}{103} = 10,038$
- $s^2 = \dfrac{10704}{103} - (10,038)^2 = 3,144 \Rightarrow s \simeq 1,773$

On pose l'hypothèse H_0 : "La distribution des chiffres d'affaires mensuels des magasins est régie par une loi normale". On estimera ses paramètres par leurs estimations sans biais :

- μ_x est estimé par $m = 10,038$
- σ_x est estimé par $\hat{s} = \sqrt{\dfrac{N}{N-1}} \times s \simeq 1,78$

Il reste à calculer les probabilités associées à chaque classe. Pour cela, il suffit de calculer les valeurs de l'écart centré réduit correspondant aux limites de classes, puis de déterminer les probabilités des intervalles obtenus à l'aide de la loi normale centrée réduite.

<table>
<tr><th colspan="2">Classe en X</th><th colspan="2">n_i</th><th colspan="2">Classe en T</th><th>p_i</th><th colspan="2">$e_i = Np_i$</th><th>$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$</th></tr>
<tr><td>$[5,5;6,5[$</td><td rowspan="2">$[5,5;7,5[$</td><td>2</td><td rowspan="2">5</td><td>$]-\infty;-1,99[$</td><td rowspan="2">$]-\infty;-1,43[$</td><td>0,0233</td><td>$\boxed{2,3999}$</td><td rowspan="2">$7,8692$</td><td rowspan="2">1,0461</td></tr>
<tr><td>$[6,5;7,5[$</td><td>3</td><td>$[-1,99;-1,43[$</td><td>0,0531</td><td>$5,4693$</td></tr>
<tr><td colspan="2">[7,5;8,5[</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">[-1,43;-0,86[</td><td>0,1185</td><td colspan="2">12,2055</td><td>0,0035</td></tr>
<tr><td colspan="2">[8,5;9,5[</td><td colspan="2">27</td><td colspan="2">[-0,86;-0,30[</td><td>0,1872</td><td colspan="2">19,2816</td><td>3,0897</td></tr>
<tr><td colspan="2">[9,5;10,5[</td><td colspan="2">23</td><td colspan="2">[-0,30;0,26[</td><td>0,2205</td><td colspan="2">22,7115</td><td>0,0037</td></tr>
<tr><td colspan="2">[10,5;11,5[</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2">[0,26;0,82[</td><td>0,1913</td><td colspan="2">19,7039</td><td>1,1230</td></tr>
<tr><td colspan="2">[11,5;12,5[</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">[0,82;1,38[</td><td>0,1223</td><td colspan="2">12,5969</td><td>0,0283</td></tr>
<tr><td>$[12,5;13,5[$</td><td rowspan="3">$[12,5;15,5[$</td><td>5</td><td rowspan="3">9</td><td>$]1,38;1,94[$</td><td rowspan="3">$]1,38;+\infty[$</td><td>0,0576</td><td>$5,9328$</td><td rowspan="3">$8,6314$</td><td rowspan="3">0,0157</td></tr>
<tr><td>$[13,5;14,5[$</td><td>2</td><td>$[1,94;2,51[$</td><td>0,0202</td><td>$\boxed{2,0806}$</td></tr>
<tr><td>$[14,5;15,5[$</td><td>2</td><td>$[2,51;+\infty[$</td><td>0,006</td><td>$\boxed{0,618}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td colspan="2">103</td><td colspan="2">–</td><td>1</td><td colspan="2">103</td><td>5,31</td></tr>
</table>

Explications des calculs pour les deux premières lignes du tableau : sous H_0, $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(10,038;1,78)$. On pose alors $T = \dfrac{X - 10,038}{1,78}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. On s'intéresse à la classe $[5,5;6,5[$. On cherche donc

$$p_1 = p(X \in [5,5;6,5[) = p(5,5 \leq X < 6,5) = p\left(\frac{5,5-10,038}{1,78} \leq X < \frac{6,5-10,038}{1,78}\right) = p\left(-2,55 \leq T < -1,99\right).$$

On assimile la classe $]-2,55;-1,99[$ à $]-\infty;-1,99]$ pour deux raisons :

- l'aire additionnelle, c'est-à-dire $p(-\infty < T < -2,55) = 1 - 0,9946 = 0,0054$, est négligeable. Donc on peut affirmer que $p\left(-2,55 \leq T < -1,99\right) \simeq p(-\infty < T < -1,99)$.

- La somme des probabilités p_i devant être égale à 1, il faut que la variable T parcoure $\mathbb{R} =]-\infty;\infty[$ entièrement. On aura de fait $\sum_i Np_i = \sum_i e_i = N = 103$.

On cherche donc $p_1 = p(X \in [5,5;6,5[) \simeq p(-\infty < T < -1,99)$ qui vaut d'après la table de la loi normale centrée réduite $1 - 0,9767 = 0,0233$. On en déduit l'effectif théorique associé $e_1 = Np_1 = 103 \times 0,0233 = 2,3999$. Comme cet effectif est inférieur à 5 (la valeur a été encadrée dans le tableau), il faudra adjoindre (au moins) deux classes pour que la condition sur les effectifs soit vérifiée.
On s'intéresse maintenant à la classe $[6,5;7,5[$. On cherche

$$p_2 = p(X \in [6,5;7,5[) = p(6,5 \leq X < 7,5) = p\left(\frac{6,5-10,038}{1,78} \leq X < \frac{7,5-10,038}{1,78}\right) = p\left(-1,99 \leq T < -1,43\right).$$

Donc $p_2 = \Pi_T(-1,43) = \Pi_T(-1,99) = (1-\Pi_T(1,43)) - (1-\Pi_T(1,99)) = \Pi_T(1,99) - \Pi_T(1,43) = 0,9767 - 0,9236 = 0,0531$. L'effectif théorique associé est égal à $e_2 = Np_2 = 103 \times 0,0531 = 5,4693 \geq 5$. Il suffit donc d'adjoindre les classes $[5,5;6,5[$ et $[6,5;7,5[$ pour que la condition sur les effectifs théoriques à ce niveau des calculs (attention, on n'a travaillé que sur les deux premiŕes lignes...) soit vérifiée. On additionne alors les effectifs observés n_1 et n_2, et les effectifs théoriques e_1 et e_2, et on calcule la "première erreur" $\frac{(5-7,8692)^2}{7,8692} = 1,0461$. On continue le travail pour chaque classe en veillant systématiquement à ce que la condition sur les effectifs théoriques soit observée. On précise pour conclure que la dernière classe en X $[14,5;15,5[$ admet pour équivalent en T $[2,51;3,07[$ et est assimilée à $[2,51;+\infty[$ pour les mêmes raisons invoquées plus haut.

Après regroupement des deux premières lignes et des trois dernières, on trouve $\chi^2_{obs} = 5,31$. La valeur χ^2_{lu} lue dans la table au seuil de 5% et avec un nombre de degrés de liberté $\nu = k - r - 1 = 7 - 1 - 2 = 4$ est égale à 9,488. Comme $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$, on ne peut rejeter l'hypothèse H_0. On peut donc considérer que les chiffres d'affaires sont normalement distribués.

Exercice 4 *Correction* :
On pose l'hypothèse H_0 : "Le nombre de garçons par famille (de 7 enfants) obéit à une loi binomiale". En toute rigueur, la proportion p des garçons doit être estimée par la fréquence observée sur l'échantillon. En effectuant la somme $\sum_i n_i x_i$, on constate que l'échantillon compte au total 6650 garçons pour $1883 \times 7 = 13181$ enfants, soit une fréquence égale à $0,504$, qu'on arrondira, pour simplifier les calculs et permettre l'utilisation de la table, à $0,5$. Donc la loi (hypothétique) de proabablité régissant le nombre X de garçons par famille de 7 enfants serait une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,5$. Elle s'écrit :

$$P(X = x_i) = C_7^{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-x_i} = C_7^{x_i}\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

On peut alors établir les distributions des effectifs théoriques :

Nombre de garçons x_i	Effectif n_i	Probabilité p_i	$e_i = Np_i$	$\frac{(n_i-e_i)^2}{e_i}$
0	27	0,0078	14,7	10,32
1	111	0,0547	103	0,62
2	287	0,1641	309	1,57
3	480	0,2734	514,8	2,35
4	529	0,2734	514,8	0,39
5	304	0,1641	309	0,08
6	126	0,0547	103	5,14
7	19	0,0078	14,7	1,27
Total	1883	1	1877	21,74

On a $\chi^2_{obs} = 21,74$. Cette valeur est sensiblement plus élevée que la valeur limite du χ^2 à $8-1-1 = 6$ ddl (un paramètre, la probabilité p, ayant été estimée), lue dans la table au seuil de 5% : $\chi^2_{lu} = 12,59$. L'hypothèse doit donc être rejetée à ce seuil. Deux interprétations pourraient être données de ce rejet :

- On pourrait en premier lieu supposer que la probabilité de naissance d'un garçon qu'on a arrondie à 0,5 est incorrecte (minorée), la loi binomiale pouvant néanmoins s'appliquer. Toutefois, une aussi faible minoration de p ne saurait expliquer un tel écart entre l'échantillon et la loi d'ajustement.

- En réalité, on constate que la source de divergence entre les effectifs empiriques et les effectifs théoriques est étroitement localisée aux deux extrémités de la distribution ($X = 0$, $X = 6$ et 7). Autrement dit, la répartition du sexe des enfants dans une famille n'est pas une véritable loterie. Le fait de n'avoir eu aucun garçon (ou aucune fille) sur les 6 premières naissances n'est pas sans influence sur les probabilités relatives à la 7e naissance. L'indépendance entre les épreuves n'étant pas respectée, la loi binomiale ne peut pas être appliquée.

Exercice 5 *Correction* :
Soit l'hypothèse H_0 : "Les absences des étudiants se répartissent uniformément tout au long de la journée". On a le tableau suivant :

Heure de la journée	n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
$[8; 10[$	25	$\frac{1}{4}$	22,5	0,278
$[10; 12[$	15	$\frac{1}{4}$	22,5	2,5
$[13; 15[$	18	$\frac{1}{4}$	22,5	0,9
$[15; 17[$	32	$\frac{1}{4}$	22,5	4,011
Total	90	1	90	7,689

On a $\chi^2_{obs} = 7,689$ et $\chi^2_{lu} = \chi^2_{3;0,95} = 7,81$ donc $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$ et on ne rejette pas H_0. En considérant léchantillon ci-dessus tiré au hasard, on peut affirmer, au seuil de 5%, que les absences des étudiants aux cours se répartissent uniformément tout au long de la journée.

Exercice 6 *Correction* :
L'hypothèse nulle (H_0) est l'hypothèse d'équiprobabilité des numéros de départ dans les places de premier à l'arrivée. Nous prendrons comme hypothèse alternative (H_1) la non équiprobabilité des numéros de départ. Nous supposons que l'échantillon de 144 courses est un échantillon aléatoire. Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, chaque numéro de départ a la même probabilité que les autres de conduire à une place de premier. On a donc le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
1	29	$\frac{1}{8}$	18	6,722
2	19	$\frac{1}{8}$	18	0,056
3	18	$\frac{1}{8}$	18	0
4	25	$\frac{1}{8}$	18	2,722
5	17	$\frac{1}{8}$	18	0,056
6	10	$\frac{1}{8}$	18	3,556
7	15	$\frac{1}{8}$	18	0,5
8	11	$\frac{1}{8}$	18	2,722
Total	144	1	144	16,333

On a donc $\chi^2_{obs} = 16,333$ et $\chi^2_{lu} = \chi^2_{0,05;7} = 14,07 < \chi^2_{obs}$, ce qui signifie qu'au seuil de 5%, on rejette H_0. Ça ne serait pas le cas au seuil 1% car $\chi^2_{lu} = \chi^2_{0,01;7} = 18,41 > \chi^2_{obs}$. Compte tenu de la taille de l'échantillon, et sous réserve de plus ample information sur la constitution de l'échantillon, la différence observée permet de rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité.

Exercice 7 *Correction* :
L'enjeu n'est pas la valeur du paramètre mais le fait que la loi soit une loi de Poisson : “loi des événements rares et indépendants”, cela signifie que le taux instantané d'occurrence d'un accident est constant au cours du temps, que la probabilité d'occurrence de 2 accidents dans un laps de temps h est négligeable devant h : l'hypothèse de loi de Poisson reflète ainsi des hypothèses non triviales sur le mécanisme d'occurrence des accidents à ce carrefour. On dresse le tableau suivante :

x_i	n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
0	2	0,1353	4,331	1,8503
1	13	0,2707	8,661	2,1732
2	8	0,2707	8,661	0,0505
$\left.\begin{array}{c}3\\4\\5\end{array}\right\} \geq 3$	$\left.\begin{array}{c}4\\4\\1\end{array}\right\} 9$	$\begin{array}{c}0,1804\\0,0902\\0,0527\end{array}$	$\left.\begin{array}{c}5,774\\\boxed{1,686}\\\boxed{2,886}\end{array}\right\} 10,346$	0,1751
Total	32	1	32	4,7943

On obtient $\chi^2_{obs} = 4,7943$ et $\chi^2_{lu} = \chi^2_{0,1;3} = 6,25 > \chi^2_{obs}$ ce qui permet d'affirmer que l'hypothèse H_0 ne peut pas être rejetée au seuil de 10%. On peut admettre au seuil de 10% que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 8 *Correction* :
Testons l'hypothèse H_0 selon laquelle X, la variable aléatoire décrivant le choix de la barre, suit une loi uniforme de paramètre $p = \dfrac{1}{5}$. Les effectifs attendus si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(\dfrac{1}{5}\right)$ doivent tous être égaux à $\dfrac{1}{5} \times 200 = 40$. On a le tableau suivant:

x_i	n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
A	40	$\dfrac{1}{5}$	40	0
B	35	$\dfrac{1}{5}$	40	0,625
C	55	$\dfrac{1}{5}$	40	5,625
D	40	$\dfrac{1}{5}$	40	0
E	30	$\dfrac{1}{5}$	40	2,5
Total	200	1	200	8,75

On a donc $\chi^2_{obs} = 8,75$ et $\chi^2_{lu} = \chi^2_{0,05;4} = 9,49 > \chi^2_{obs}$, ce qui signifie qu'on ne peut pas rejeter H_0. Au seuil 5%, on peut dire au vu des résultats d'échantillon que la nouvelle barre n'a pas meilleur goût que les autres.

Exercice 9 *Correction* :
La taille de l'échantillon est $N = 60$. Pour tester l'ajustement d'une loi normale aux données de l'échantillon, il nous faut pour estimer les paramètres calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon :

Classe i	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$[250; 270[$	260	3	780	202800
$[270; 290[$	280	5	1400	392000
$[290; 310[$	300	15	4500	1350000
$[310; 330[$	320	22	7040	2252800
$[330; 350[$	340	13	4420	1502800
$[350; 370[$	360	2	720	259200
Total	–	60	18860	5959600

Grâce au tableau, on peut affirmer que

- $m = \dfrac{1}{N}\sum_i n_i x_i = \dfrac{18860}{60} = 314,33$
- $s^2 = \dfrac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \dfrac{5959600}{60} - (314,33)^2 = 521,22 \Rightarrow ss = 22,830$

On estime les paramètres de la population à l'aide de ceux de l'échantillon :

- μ_x est estimé par $m = 314,33$
- σ_x est estimé par $\hat{s} = \sqrt{\dfrac{N}{N-1}}s = 23,069$

On pose l'hypothèse H_0 : "La durée de vie d'un dispositif électronique typé est distribué selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\hat{\sigma}) = \mathcal{N}(314,33; 23,069)$. Il reste à calculer les probabilités associées à chaque classe. Pour cela, il suffit de calculer les valeurs de l'écart centré réduit correspondant aux limites des classes, puis de déterminer les probabilités des intervalles obtenus à l'aide de la loi normale centrée réduite. On pose $T = \dfrac{X - 314,33}{23,069}$.

Classe en X	Classe en T	Probabilité p_i	n_i	Effectif corrigé n'_i	$e_i N p_i$	e'_i	$\dfrac{(n'_i - e'_i)^2}{e'_i}$
$[250;270[$	$]-\infty;-1,922[$	0,0274	3	8	$\boxed{1,644}$	8,814	0,075
$[270;290[$	$[-1,922;-1,055[$	0,1195	5		7,17		
$[290;310[$	$[-1,055;-0,188[$	0,2778	15	15	16,668	16,668	0,167
$[310;330[$	$[-0,188;0,679[$	0,3270	22	22	19,62	19,62	0,289
$[330;350[$	$[0,679;1,546[$	0,1877	13	15	11,262	14,898	$\simeq 0$
$[350;370[$	$[1,546;+\infty[$	0,0606	2		$\boxed{3,636}$		
Total	–	1	60	60	60	60	$\chi^2_{obs} = 0,531$

On a $\chi^2_{lu} = \chi^2_{1;0,05} = 3,84$ car $\nu = (6-2) - 2 - 1 = 1$ et $\alpha = 0,05$. Donc, $\chi^2_{lu} < \chi^2_{obs}$ et on ne rejette pas H_0. Les donnée permettent, au seuil de 5%, de penser que la durée de vie d'un dispositif électronique de ce type est distribué selon une loi normale.

Exercice 10 *Correction* :

Calculons la moyenne de la série : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_i n_i x_i = 1,92$. On peut alors tester l'hypothèse H_0 selon laquelle $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(1,92)$. Puisque $P(X = k) = \exp(-1,92)\dfrac{1,92^k}{k!}$, on obtient le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
0	6	0,147	7,33	0,241
1	14	0,281	14,07	0,000
2	16	0,270	13,51	0,459
3	8	0,173	8,65	0,049
$\left.\begin{matrix}4\\ \geq 5\end{matrix}\right\} \geq 4$	$\left.\begin{matrix}4\\ 2\end{matrix}\right\} 6$	$\begin{matrix}0,083\\ 0,046\end{matrix}$	$\left.\begin{matrix}\boxed{4,15}\\ \boxed{2,3}\end{matrix}\right\} 6,45$	0,031
Total	50	1	50	0,780

On a donc $\chi^2_{obs} = 0,780$ et $\chi^2_{lu} = \chi^2_{0,05;3} = 7,81 > \chi^2_{obs}$ (on a en effet $\nu = k - r - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$). On ne peut donc pas rejeter au seuil 5% l'hypothèse H_0 selon laquelle X obéit à une loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.

ANNEXE - Quantiles de la loi du χ^2_ν

La table donne les valeurs (quantiles) $\chi^2_{\nu,1-\alpha}$ telles que $P(\chi^2_\nu < \chi^2_{\nu,1-\alpha}) = 1-\alpha$.

ν	$1-\alpha$									
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2