Exercices d'algèbre – Fiche 1: Réduction de formes quadatiques réelles

Responsable: Isar Stubbe

---

1. Démontrer que n formes linéaires $\phi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_j a_{ij}x_j$ forment une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ si et seulement si la matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ est inversible; dans ce cas, $(\phi_1, ..., \phi_n)$ est la base duale de la base formée par les colonnes de A^{-1}. Appliquer cette méthode à:
   (a) $\phi_1(x, y) = 3x + 2y$, $\phi_2(x, y) = -x + 4y$
   (b) $\phi_1(x, y, z) = 3x - y + z$, $\phi_2(x, y, z) = -x + z$, $\phi_3(x, y, z) = x + y + z$
   (c) $\phi_1(x_1, ..., x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $\phi_2(x_1, ..., x_4) = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $\phi_3(x_1, ..., x_4) = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4$, $\phi_4(x_1, ..., x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 + x_4$

2. Soit la forme quadratique $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto -2(x_1x_2 + x_2x_3) + 2x_2(x_2 + x_3) + 3x_3^2$.
   (a) Donner sa matrice réelle symétrique M par rapport à la base canonique.
   (b) Ecrire la forme bilinéaire symétrique associée.
   (c) Expliquer pourquoi il n'est pas possible de construire une base q-orthogonale par le procédé de Gram-Schmidt partant de la base canonique.
   (d) Ecrire la forme q comme une somme pondérée de carrés de formes linéaires indépendantes par la méthode de réduction de Gauss.
   (e) En déduire une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^tDP = M$.
   (f) Donner une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   (g) Déterminer le rang et la signature de q.

3. Ecrire chaque forme quadratique $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme une somme pondérée de carrés de formes linéaires indépendantes par la méthode de réduction de Gauss, en déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$, puis donner le rang et la signature de q:
   (a) $q(x, y) = x^2 + xy$
   (b) $q(x, y, z) = 3x^2 + 11y^2 - z^2 + 2xy - 2xz - 6yz$
   (c) $q(x, y, z) = x^2 + 3xy$
   (d) $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$

4. Pour chaque matrice réelle symétrique donnée, faire la réduction de Gauss d'une forme quadratique associée pour trouver une matrice diagonale congruente (et préciser la matrice de passage), puis déterminer le rang et la signature de la forme quadratique associée:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$