Exercices d'algèbre – Fiche 2: Lemme de Zorn

Responsable: Isar Stubbe

---

1. *Reformulations du lemme de Zorn.* Montrer l'équivalence des assertions suivantes:

   (a) Dans tout ensemble ordonné, toute chaîne est contenue dans une chaîne maximale.

   (b) Tout ensemble ordonné contient une chaîne maximale.

   (c) Tout ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée, a un élément maximal.

   (d) Tout ensemble ordonné non-vide dont toute chaîne non-vide est majorée, a un élément maximal.

   Indication. (a⇒b) Considérer la chaîne vide. (b⇒c) Considérer un majorant d'une chaîne maximale. (c⇒a) Soit une chaîne C dans un ensemble ordonné $(P, \leq)$. L'ensemble des chaînes dans $(P, \leq)$ contenant C est ordonné par inclusion, et toute chaîne $\mathcal{C}$ dans cet ensemble ordonné (une chaîne de chaînes, donc) est majorée par $\bigcup \mathcal{C}$. Conclure. (c⇔d) Etudier la chaîne vide.

2. *Le lemme de Zorn implique le théorème de Bernstein.* On veut montrer que, pour tous ensembles X et Y, il existe une injection $X \to Y$ ou une injection $Y \to X$.

   (a) Observer que le théorème est trivial lorsque $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$. Dans la suite on supposera que $X \neq \emptyset \neq Y$.

   (b) Montrer qu'une relation $R \subseteq X \times Y$ entre X et Y satisfait à

   $$\text{si } (x, y) \in R \text{ et } (x', y) \in R \text{ alors } x = x', \text{ et si } (x, y) \in R \text{ et } (x, y') \in R \text{ alors } y = y'$$

   si et seulement si R est le graphe d'une *bijection partielle* entre X et Y.

   (c) Montrer que l'ensemble de ces relations est non-vide et ordonné par l'inclusion de relations.

   (d) Soit une chaîne non-vide $\mathcal{C}$ dans cet ensemble ordonné. Montrer que $\bigcup \mathcal{C}$ en est un majorant.

   (e) Par le lemme de Zorn il existe un élément maximal $P_{\mathsf{max}} \subseteq X \times Y$. Montrer que la relation P_{max} est le graphe d'une injection $X \to Y$ ou que la relation opposée $P_{\mathsf{max}}^{\mathsf{op}}$ est le graphe d'une injection $Y \to X$.

3. *Le lemme de Zorn implique le principe de bon ordre.* On veut montrer que tout ensemble peut être bien ordonné.

   (a) Observer que tout est trivial pour l'ensemble vide; considérons donc un ensemble $A \neq \emptyset$.

   (b) Notons $(B, \leq_B)$ pour un sous-ensemble $B \subseteq A$ muni d'un bon ordre $\leq_B$. Montrer qu'il existe au moins une telle paire $(B, \leq_B)$.

   (c) Ecrivons $(B, \leq_B) \preccurlyeq (C, \leq_C)$ lorsque $(B, \leq_B)$ est un *segment initial* de $(C, \leq_C)$: cela veut dire que $B \subseteq C$, $\leq_C$ coïncide avec $\leq_B$ sur B, et $x \leq_C y$ pour tout $x \in B$ et $y \in C \setminus B$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

   (d) Soit une chaîne non-vide $\mathcal{C}$ dans cet ensemble ordonné. Poser $C := \bigcup\{B \mid (B, \leq_B) \in \mathcal{C}\}$ et définir un <u>bon</u> ordre $\leq_C$ adéquat pour montrer que $\mathcal{C}$ est majorée par $(C, \leq_C)$.

   (e) Par le lemme de Zorn il existe un élément maximal $(B, \leq_B)$. Montrer que $B = A$ et conclure. Indication: s'il existe $a \in A \setminus B$ alors on peut définir $(B', \leq_{B'})$ par $B' = B \cup \{a\}$ et $b \leq_{B'} a$ pour tout $b \in B$.